Math. P.
61 m - 1

Burg



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

R

<36635608920014

<36635608920014

Bayer. Staatsbibliothek

Ausführliches Lehrbuch

der

höhern Mathematik.

Math. P. 61m

Mit besonderer

Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens.

Bearbeitet und herausgegeben

von

Adam Burg,

ord. öff. Professor der höhern Mathematik am k. k. polytechnischen Institute in Wien.

Erster Band.

Enthaltend:

Die Lehre von den Functionen, höhern Gleichungen, unendlichen Reihen u. s. w., endlichen Differenzen und Summen.

Wien.

Gedruckt und im Verlage bei Carl Gerold.

1832.

45. D

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Seiner Excellenz

dem

hochgebornen Herrn

Andreas Joseph Freiherrn von Stifft,

Seiner k. k. apostolischen Majestät wirklichem geheimen Rathe, auch Staats- und Conferenz-Rathe,

Commandeur des königl. ungarischen St. Stephans-Ordens, Inhaber des silbernen Verdienstkreuzes, Ritter des königl. preufsischen rothen Adler-Ordens zweiter Classe, Grofsband des königl. französischen St. Michael-Ordens, Commandeur des königl. portugiesischen Christus-Ordens, des kaiserl. brasilianischen Ordens vom südlichen Kreuze, des königl. sicilianischen Ferdinand- und Verdienst-Ordens, des königl. sächsischen Civil-Verdienst-Ordens, dann des königl. baierischen Verdienst-Ordens; Sr. k. k. apostolischen Majestät erstem Leibarzte und Protomedicus, Doctor der Arzeneikunde, Indigenat des Königreichs Ungarn, Landstand von Niederösterreich, von Tirol und Steiermark; Mitglied der gelehrten Gesellschaften zu London, Venedig und Padua, der k. k. Josephs-Akademie, der k. k. Landwirthschafts-Gesellschaft, und der k. k. Akademie der bildenden Künste in Wien, der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, der mährisch-schlesischen des Ackerbaues und der Landeskunde zu Brünn, der kaiserl. Leopold. Carol. der Naturforscher, der kaiserl. russischen medicinisch-chirurgischen Akademie zu St. Petersburg und der Universität zu Krakau; in den Jahren 1805 und 1821 gewesener Rector-Magnificus der Wiener Universität, der medicinischen Studien und Facultät Director und Präses, etc. etc.

mit innigster Verehrung

gewidmet

vom Verfasser

Seiner Excellenz

dem

hochgebornen Herrn

Andreas Joseph Freiherrn von Stifft,

Seiner k. k. apostolischen Majestät wirklichem geheimen Rathe, auch Staats- und Conferenz-Rathe,

Commandeur des königl. ungarischen St. Stephans-Ordens, Inhaber des silbernen Verdienstkreuzes, Ritter des königl. preußischen rothen Adler-Ordens zweiter Classe, Großkreuz des königl. [illegible] St. Michaels-Ordens, Commandeur des königl. portugiesischen Christus-Ordens, des kaiserl. brasilianischen Ordens vom südlichen Kreuze, des königl. sicilianischen Ferdinand- und Verdienst-Ordens, des königl. sächsischen Civil-Verdienst-Ordens [illegible] des königl. [illegible] Verdienst-Ordens; [illegible] Majestät ersten Leibarzte und Protomedicus, Doctor der Arzneikunde, [illegible] Mitglied der [illegible] Gesellschaften [illegible] der k. k. Akademie der bildenden Künste in Wien, der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, der [illegible] und der Landeskunde zu [illegible] der kaiserl. Leopold. Carol. der Naturforscher, der kaiserl. medicinisch-chirurgischen Akademie zu St. Petersburg und der Universität zu [illegible] in den Jahren [illegible] gewesener Rector Magnificus der Wiener Universität, der medicinischen Studien [illegible] Director und Präses, etc. etc.

mit innigster Verehrung

gewidmet

vom Verfasser.

Ew. Excellenz!

Das gegenwärtige Lehrbuch verdanket seine Entstehung lediglich der Nachsicht, mit welcher Ew. Excellenz meinen ersten wissenschaftlichen Versuch aufgenommen und mich zu neuen Anstrengungen ermuthiget haben; und zunächst dem dadurch herbeigeführten glücklichen Umstande, daſs mir durch den väterlichen Rath und die gnädige Verwendung Ew. Excellenz, von unserem allergnädigsten und huldvollsten Kaiser die Lehrkanzel der höhern Mathematik an einem National-Institute verliehen wurde, dessen segenreiches Wirken mit jedem Tage erfreulicher hervortritt, und welches in Ew. Excellenz seinen vorzüglichsten Pfleger und gnädigsten Beschützer verehrt. Wenn ich daher die Bitte wage: Ew. Excellenz dieses Werk ehrfurchtsvoll zueignen zu dürfen, so geschieht dieſs nicht bloſs, um so groſsen und ausgezeichneten Verdiensten, wie jene sind, welche Ew.

Excellenz im In- und Auslande und durch Dero hohe Weisheit noch ganz neuerlich, als bleibendes Denkmal für die Mit- und Nachwelt, im reichsten Maſse Sich erworben haben, meine geringe Huldigung darzubringen; sondern vorzüglich, um dadurch Gelegenheit zu finden, die unbegrenzte Verehrung, die ich gegen Ew. Excellenz hege, und die innigste Dankbarkeit, welche gegen Ew. Excellenz in meinem Herzen niemals erlöschen wird, auch öffentlich aussprechen und an den Tag legen zu können.

Der ich mit tiefster Ehrfurcht verharre

Ew. Excellenz

unterthänigst gehorsamster Diener

Adam Burg.

Vorrede.

Wenn auch die reine Mathematik, diese ewige Grundform aller strengen und ächten Vernunftwissenschaften, überall nur eine ist und seyn kann; so darf sich nichtsdestoweniger ihr Vortrag, besonders jener der sogenannten höhern Mathematik, je nach den besondern Zwecken und individuellen Ansichten der Bearbeiter dieser hehren Wissenschaft, verschieden gestalten.

Es mag aber der bei Ausarbeitung eines mathematischen Lehr- oder Handbuches vorschwebende oder beabsichtigte Zweck — welcher nur edler Art seyn soll — wie immer beschaffen seyn; so dürfte dieser doch schwerlich bei einer zu grofsen Kürze des Vortrages, noch weniger aber durch eine zu sehr sublimirte und gekünstelte Beweisart und Entwicklung der Sätze zu erreichen seyn. Der Verfasser mufs daher mit Leidwesen es bekennen, dafs ihm jene Richtung, welche der Vortrag der Mathematik in unsern Tagen, und zwar in vielen der neuesten Lehrbücher genommen hat, eine durchaus falsche zu seyn scheint. Denn unmöglich kann irgendwo die Aufgabe darin bestehen: ein Lehrsystem aufzustellen, in welchem die verwickeltsten und

schwierigsten Sätze, ohne alle erläuternde und belehrende Beispiele, trocken an einander gereiht und dergestalt vorgetragen sind, daſs bei einem unsäglichen Aufwand an Fleiſs und Geduld, und oft bloſs mit Zuziehung der weit faſslicheren Quellen selbst, unter unersetzlichem Zeitverluste, es nur den allerfähigsten Köpfen möglich ist, die Schritt für Schritt sich darbietenden Schwierigkeiten zu besiegen und ans ersehnte Ziel zu gelangen; allen Uebrigen aber eine der erhabensten Wissenschaften dergestalt verleidet wird, daſs sie, als unmündig, für immer ausgeschlossen bleiben von dem Genusse, welchen der menschliche Geist bei Wahrnehmung und Entdeckung von Wahrheiten empfindet, welche, wie die Mathematik sie darbietet, eben so überraschend als evident sind.

Wenn nun aber auch die diesfälligen Ansichten des Verfassers, wenigstens indirecte, schon daraus hervorgehen, daſs er sich entschieden gegen diese krankhafte Tendenz: Alles zu mystificiren — sey es um neu, oder gelehrt zu scheinen — ausspricht; so glaubt er es dennoch den Freunden der Mathematik und Allen, die sich seines Buches bedienen wollen, schuldig zu seyn, den Plan, welcher ihn bei Bearbeitung desselben geleitet, so wie das Ziel, welches er dabei unverrückt im Auge gehabt und nach Möglichkeit zu erreichen gestrebt hat, noch insbesondere zu entwickeln und darzulegen.

Da dieses Lehrbuch zunächst den Zöglingen des k. k. polytechnischen Institutes gewidmet seyn soll,

deren Tendenz eine durchaus practische ist; so sind die nöthigen Lehrsätze nicht bloſs im Zusammenhange aufgestellt und erwiesen, sondern auch gleichlaufend durch passende und practische Beispiele erläutert worden. Bei Entwerfung und Auswahl dieser Beispiele, wie der eingeflochtenen Uebungsaufgaben und behandelten Materien überhaupt, hat der Verfasser möglichst darauf Rücksicht genommen, daſs die höhere Mathematik die Basis für Physik, Mechanik, practische Geometrie und Baukunst bilden, der Schüler sonach für diese Fächer gehörig vorbereitet, von manchem scheinbar trockenen Satze ein Vorgeschmack seiner nützlichen Anwendung gegeben, und dadurch endlich Lust und Liebe für diese ernste, die gröſste Aufmerksamkeit und den anhaltendsten Fleiſs fordernde Wissenschaft gewonnen werden soll. Denn nur auf solche Weise dürfte das Studium der höhern Mathematik — anstatt, daſs dieses jetzt häufig in einer bloſsen Anhäufung von Doctrinen und Sätzen besteht, die einen todten unfruchtbaren Schatz bilden, mit dem man nichts anzufangen weiſs — lebendige Wurzeln schlagen, und auſser den erquickenden Blüthen, die dasselbe schon im eigenen Gebiethe bringet, auch in allen fernern Zweigen die reichsten und herrlichsten Früchte tragen.

Der Verfasser darf es aber nicht verschweigen, daſs dieses schöne Ziel auch nur dann vollkommen erreicht werden kann, wenn der Anfänger nicht zu vorzeitig und ehe er noch mit den nöthigen Vorkenntnissen aus der Elementarmathematik ausgerüstet ist, sich zum Studium der höhern dränget. Er muſs

vielmehr dringend vor dem häufig Statt findenden Miſsgriffe warnen, das Studium der höhern Mathematik vorzunehmen, bevor man noch mit den ersten und einfachsten Rechnungsoperationen im Reinen ist und die einfachste Gleichung, ohne sie auf die erbärmlichste Art zu miſshandeln, auflösen kann; da doch die Auflösung der einfachen und quadratischen Gleichungen, mit Einer oder mehreren Unbekannten, hier nur mehr ein leichtes Spiel seyn sollte. Der Wahn, als könne man, ohne Rücksicht auf die nöthige Vorbereitung, nicht früh genug in die höhere Mathematik eintreten, um an Zeit zu gewinnen, ist um so trauriger, als gerade dadurch diese Absicht um so gewisser vereitelt, und das Studium der übrigen darauf basirten Fächer ganz unmöglich oder erfolglos wird: denn in keiner Wissenschaft, am allerwenigsten in der Mathematik, kann man ungestraft beim Ende anfangen.

Der Verfasser war bemüht, die Beweise der aufgestellten Lehrsätze überall, ohne der strengen mathematischen Methode etwas zu vergeben, so einfach und ungezwungen als möglich zu führen und zwischen der seichten Oberflächlichkeit und fruchtlosen, unleidlichen Rigorosität ohne Maſs und Ziel, den goldenen Mittelweg zu gehen. Am allermeisten aber war sein Streben dahin gerichtet, dem Vortrage durch und durch die gröſste Klarheit, Deutlichkeit und Bestimmtheit zu verschaffen. Und er hat dieses Ziel mit gleicher Beharrlichkeit selbst dort noch verfolgt, wo es nicht anders, als auf Kosten der sonst so lobens- und wünschenswerthen Kürze zu er-

reichen war; weil er die Meinung hegt, dafs man nicht schreibt um kurz, sondern um deutlich zu seyn und verstanden zu werden; und weil ihm der traurige Unterschied zwischen dem musterhaften, vielleicht längern, dafür aber natürlichen und faſslichen Vortrage eines *Euler*, der auch das Schwerste aufzuhellen verstand, und dem zwar kürzern, dafür aber gezwungenen und unverständlichen Vortrag mancher Neuern, die auch das Leichteste zu verdunkeln wissen, nur zu lebhaft vorschwebte.

Da das Gebiet der höhern Mathematik (wie das jeder andern Wissenschaft) viel zu ausgedehnt ist, als dafs es möglich wäre, selbst nur ihre vorzüglichsten und fruchtbarsten Felder, in dem kurzen Zeitraume eines Schuljahres, mit einiger Vollständigkeit zu bearbeiten und zu pflegen; so kommt der Schüler schon während der Erlernung der darauf folgenden, oben genannten, Fächer, noch viel häufiger aber nach Vollendung seiner Studien und beim Eintritte ins practische Leben, in die Lage, Sätze, welche entweder gar nicht oder nur ganz kurz vorgetragen werden konnten, mit mehr Ausführlichkeit nachholen zu sollen; was auch sehr leicht angeht, sobald nur ein tüchtiger Grund gelegt, der Thatkraft die rechte Richtung gegeben, und die kostbare Zeit nicht mit unnützen, gelehrten Speculationen vergeudet worden ist. Der Verfasser hat daher, um das zeitraubende Nachschlagen und besonders die nur selten ausführbare Anschaffung gröfserer und kostspieliger Werke möglichst entbehrlich zu machen, es für seine Pflicht gehalten, diesem Lehrbuche eine

grösſere Ausdehnung und Vollständigkeit zu geben, als ohne diese Rücksicht geschehen und nöthig gewesen wäre.

Aus diesen und den oben angeführten Gründen dürfte sich daher vorliegendes Werk nicht bloſs zum Leitfaden bei öffentlichen Vorlesungen — in welchem Falle dem umsichtigen Lehrer die Auswahl der, nach Maſsgabe der disponibeln Zeit und des beabsichtigten Zweckes passenden Materie ein Leichtes seyn wird — sondern auch ganz vorzüglich als ein dem austretenden Schüler fürs practische Leben nothwendiges Handbuch zum Nachholen und Selbstunterrichte eignen.

Der Verfasser hat, da ihm diese Eintheilung und die daraus entspringende Ordnung im Vortrage die zweckmäſsigste schien, sein Werk in drei Theile oder Bände abgetheilt; im ersten, hier vorliegenden, in vierzehn Capiteln die Lehre der Functionen, höhern Gleichungen, unendlichen Reihen, u. s. w. bis zu jener der endlichen Differenzen und Summen; im zweiten Bande, in zwei Abschnitten und fünfzehn Capiteln, die analytische Geometrie in der Ebene wie im Raume; und im dritten Bande endlich, welcher in zwei Abschnitte und einen Anhang zerfällt, in neunzehn Capiteln die Differential- und Integral-, nebst den Elementen der Variationsrechnung behandelt, und sämmtliche Lehren auf bedeutend viele Beispiele, die zusammen genommen wohl allein einen Band ausmachen dürften, angewandt. Da der zweite Band bereits unter der Presse ist, und das

Manuscript für den dritten zum Drucke bereit liegt; so wird das ganze Werk in kurzer Zeit den Freunden der höhern Mathematik vollständig zur Einsicht und Beurtheilung vorgelegt werden können.

Der vorurtheilsfreie Sachkenner wird ohne Zweifel sehr bald finden, dafs, obschon der Verfasser seiner Pflicht gemäfs, die neuesten und besten mathematischen Schriften dabei zu Rathe gezogen hat — wefshalb er sich auch gedrungen fühlt, gegen alle im Werke selbst genannten Männer, denen die höhere Mathematik mehr oder weniger verdankt und welche diese Wissenschaft überhaupt gefördert haben, seinen wärmsten Dank auszusprechen —, dieses Werk gleichwohl nicht in die Cathegorie der blofsen Compilationen gehöre, sondern aufser der eigenthümlichen Anordnung, mit vielen neuen Beweisen, schärfern Ableitungen und allgemeineren Entwicklungen, die aber alle zugleich eine gröfsere Einfachheit zum Zwecke haben, bereichert sey.

Der Verfasser mufs endlich die Entscheidung, in wie ferne ihm sein Streben: das Studium einer der schwierigsten, aber auch erhabensten und lohnendsten Wissenschaften zu erleichtern und ihr in demselben Mafse neue Anhänger und Verehrer zu gewinnen, gelungen sey, der Zukunft und dem billigen, unpartheiischen Urtheile der Sachverständigen, so wie den Freunden der Mathematik überhaupt überlassen. Und weit entfernt, sich einzubilden, dafs er das vorgesteckte Ziel vollkommen erreicht habe, glaubt der Verfasser dennoch — beson-

ders wenn er zum Theile nach dem Erfolge schliessen darf, welchen er bei seinen eigenen Vorlesungen, denen dieses Buch, obschon noch im Manuscripte und weniger vollendet, seit mehreren Jahren zum Grunde liegt, hervorgehen sah — der freudigen Hoffnung Raum geben zu dürfen: daſs dieses Werk, wenn es nur einigermaſsen mit der Liebe aufgenommen wird, mit welcher es bearbeitet worden, seinen Zweck nicht ganz verfehlen und sofort manches Gute stiften werde.

Wien, am 8. April 1832.

Der Verfasser.

Inhalt des ersten Bandes.

Einleitung.

Von den Functionen im Allgemeinen.

Seite

Erklärung und Eintheilung der Functionen 1
Satz der unbestimmten Coefficienten 7
Satz über die Verbindung mehrerer Functionen von ders. Form 9

Erstes Capitel.

Allgemeine Gesetze für die Multiplication der Functionsreihen. Polynomischer und Binomischer Lehrsatz.

Multiplication der Functionsreihen 11
Beispiele hierüber 17
Polynomischer Lehrsatz 19
Beispiele . 28
Binomischer Lehrsatz 30
Entwicklung von $a^n + b^n$ durch y, wenn $a + b = y$ ist . 33
Allgemeinere Ableitung des binomischen Satzes 37
Beweis der allgemeinen Giltigkeit des polynomischen Lehrsatzes 41

Zweites Capitel.

Von den Grenzen der Functionen; dem unendlich Grofsen und unendlich Kleinen.

Erklärungen . 43
Lehrsätze über die unendlich grofsen Gröfsen 48
» » » » kleinen » 49
Entwicklung mehrerer solcher Sätze mittelst der Grenzenrechn. 52

Drittes Capitel.

Theorie der höhern Gleichungen.

I. Gleichungen mit *einer* Unbekannten.

Erklärungen . 57
Das Polynom X der Gl. $X = 0$ ist eine contin. Function von x 58

Seite

Ist A_m der gröfste im Polynome X vorkommende Coefficient, so wird für $x =$ oder $> A_m + 1$ das erste Glied x^n desselben gröfser als die Summe aller folgenden Glieder 60

Erhält X für $x = a$ und $x = b$ verschiedene Zeichen, so liegt wenigstens eine Wurzel der Gleichung $X = 0$ zwischen a und b 62

Jede Gleichung von ungerader Ordnung hat wenigstens eine, und von gerader Ordnung, deren letztes Glied negativ ist, wenigstens zwei reelle Wurzeln . . 63

Jede Gleichung von gerader Ordnung, deren letztes Glied positiv ist, besitzt wenigstens eine in dem Ausdrucke $p + q\sqrt{-1}$ enthaltene Wurzel 65

Ist w eine Wurzel der Gl. $X = 0$, so ist X durch $x - w$ ohne Rest theilbar 69

Jede Gleichung des n^{ten} Grades hat genau n Wurzeln . . . 70

Ist $p + q\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gl. $X = 0$, so ist auch $p - q\sqrt{-1}$ eine Wurzel derselben 73

Eigenschaften der Coefficienten einer höhern Gleichung 75

durch Zeichenänderung der in geraden Stellen stehenden Glieder von X, werden die Wurzeln der Gl. $X = 0$ in die mit entgegengesetzten Zeichen verwandelt . 77

*Cartesi*scher oder *Harrioti*scher Lehrsatz 78

Transformation der Gleichungen.

Eine Gl. in eine andere zu verwandeln, in welcher die Wurzeln um a kleiner sind 81

Aus einer Gleichung das zweite Glied wegzuschaffen . . . 82

Eine Gl. in eine andere verwandeln, deren Wurzeln m Mal so grofs sind 83

Aus einer gegebenen Gl. die Brüche wegzuschaffen 84

Für eine gegebene Gl. die Differenzen-Gleichung zu finden 86

Beispiele für die Entwicklung der quadrirten Differenzengleichung 90

Die gleichen Wurzeln 91

Die symmetrischen Functionen der Wurzeln.

Die Summe der m^{ten} Potenzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden . 94

Entwicklung der von *Waring* herrührenden Formeln . . . 98

Für eine gegebene Gl. $X = 0$ jene der quadrirten Differenzen $Z = 0$ zu entwickeln 100

Allgemeine Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades.

Seite

Cubische Gleichungen 102
Discussion der drei Wurzeln und Berechnung derselben mittelst trigonometr. Functionen 105
Beispiele . 110
Gleichungen des vierten Grades 113
Beispiele . 116

Auflösung von Gleichungen, deren Ordnungsexponenten sich herabbringen lassen.

Reciproke Gleichungen 118
Binomische Gleichungen 124

Auflösung der numerischen Gleichungen.

Grenzen der reellen Wurzeln 128
Beispiel . 131

Das Aufsuchen der *rationalen* Wurzeln.

Eine Gleichung, in welcher die Coefficienten ganze Zahlen sind, kann keinen Bruch zur Wurzel haben 132
Methode, um das Aufsuchen der rationalen Wurzeln zu erleichtern 133
Beispiele . 135

Das Aufsuchen der *irrationalen* Wurzeln.

Newton'sche Näherungsmethode 139
Beispiel . 140
Lagrange'sche Näherungsmethode 142
Beispiel . 143
Näherungsweise Berechnung der Wurzeln mittelst der *regula falsi* . 145
Methode, um die sämmtlichen reellen Wurzeln einer Gleichung zu entdecken; von *Lagrange* 148
Beispiel . 150
von Herrn *Ch. Sturm*, sammt Beispiel 153
vom Verfasser 154
Beispiele 156
Kennzeichen und Berechnung der imaginären Wurzeln 162

II. Gleichungen mit *mehreren* und insbesondere mit *zwei* Unbekannten.

Seite

Elimination einer der beiden unbekannten Gröfsen aus zwei höhern Gleichungen mit zwei Unbekannten 168
Beispiele . 170
Erörterung der wesentlichsten besondern Fälle, welche bei dieser Elimination eintreten können; sammt erläuternden Beispielen 172
Bemerkung über die Auflösung höherer Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten 183
Anwendung der *regula falsi* zur näherungsweisen Auflösung höherer Gleichungen mit zwei unbekannten Gröfsen . 184
Beispiel . 185

Viertes Capitel.

Von den Reihen im Allgemeinen.

Erklärungen 187
Aus dem summatorischen Gliede einer Reihe das allgemeine Glied und die Reihe zu finden 188
Beispiele . 189

Arithmetische Reihen.

a) Differenzen-Reihen.

Erklärung . 192
Eine beliebige Differenz irgend eines Gliedes der Reihe a_1, a_2, a_3, . . . d. i. $\Delta^m a_n$ zu bestimmen 193
Das allgemeine Glied a_n einer Reihe durch das erste Glied a_1 und die Differenzen desselben auszudrücken . . . 195
Das summatorische Glied S_n der Reihe $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ zu finden 197
Beispiele . 200

b) Summen- oder figurirte Zahlenreihen.

Erklärung . 202
Die Polygonalzahlen, oder figurirte Zahlen der zweiten Ordnung 204
Die Pyramidalzahlen, oder figurirte Zahlen der dritten Ordnung 205
Die figurirten Zahlen überhaupt 206
Aufgaben . 208

c) Potenzreihen 210
Beispiele . 215

Besondere Anwendung der Differenzenreihen.

Seite

Beispiele . 217

Das Interpoliren der Reihen.

Erklärung . 220
Beispiele . 223
Allgemeines Interpolationsproblem, nebst Beispiel 226
Newton'sche Interpolationsformel 228
Lagrange'sche » 231

Fünftes Capitel.

Von den vorzüglichsten Umwandlungen der Functionen einer Variablen.

Erklärung . 233

I. Zerlegung ganzer, rationaler Functionen in Factoren 234

II. Zerlegung rationaler, gebrochener Functionen in Partialbrüche.

A) Wenn der Nenner aus ungleichen einfachen Factoren besteht.

a) Wenn diese zugleich sämmtlich reell sind; sammt Beispielen 235
b) Wenn auch imaginäre Factoren vorkommen . . 238

B) Wenn der Nenner auch *gleiche* Factoren besitzt 239
Beispiel . 240
Beispiel, wenn ein quadratischer Factor wiederholt vorkömmt . 242
Bestimmung der Partialbrüche nach *Euler* 243
Beispiele hiezu 244

III. Entwicklung der Functionen in unendliche Reihen.

Die aus gebrochenen Functionen entstehenden recurrirenden Reihen 248
Beispiele hiezu 249
Bestimmung der erzeugenden Function aus der recurrirenden Reihe und der Relationsscala; sammt Beispiel . . . 252
Bestimmung der gebrochenen Function, wenn nebst der Reihe bloſs die Zahl der Theile der Relationsscala gegeben ist; sammt Beispielen 254

Seite

Berücksichtigung des Falles, in welchem die Coefficienten einer recurr. Reihe eine arithm. Reihe bilden; sammt Beispiel 256
Untersuchung, ob eine gegebene Reihe eine recurrirende sey, und wenn diefs der Fall ist, dafür die erzeugende Function zu finden; sammt Beispiel 258
Bestimmung des allgemeinen Gliedes einer recurrirenden Reihe 261
Beispiele hiezu 262
Bestimmung des summatorischen Gliedes einer recurrirenden Reihe; sammt Beispielen 264

Sechstes Capitel.

Von der Umkehrung der Reihen.

Erklärung . 266
Beispiele . —

Siebentes Capitel.

Ueber die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen.

Entwicklung eines Kennzeichens über die Convergenz unendlicher Reihen 274
Beispiele . 276
Lehrsatz über die Convergenz und Divergenz der Reihen . 278
Beispiele . 279
Vereinfachung der oben entwickelten allgemeinen Kennzeichen für Reihen, bei welchen das allgemeine Glied die Form $\frac{n^r + p\,n^{r-1} + \dots}{n^m + p'\,n^{m-1} + \dots}$ besitzt 283
Beispiele . 284

Achtes Capitel.

Entwicklung der Exponentialgröfsen und logarithmischen Reihen. Bemerkungen über die Convergenz unendlicher Factorenfolgen.

Erklärung und Entwicklung von a^x 287
Reihe für e^x und Berechnung der Zahl e 292
Die logarithmischen Reihen —
Bestimmung des Moduls eines Logarithmensystems 295

Seite

Kunstgriffe, um die Reihe von $l(1+y)$ für Werthe von $y>1$ gut convergirend zu machen 296
Borda's Reihe . 298
Haros'sche Reihe 299
Lagrange'sche Reihe 300
Methode, um sehr ausgedehnte logarithmische Tafeln, mit Zuziehung der Differenzrechnung auf eine leichte und bequeme Weise zu berechnen 302
Ueber das *Briggische* Logarithmensystem 304
Berechnung des Moduls für das *Briggische* System 305
Methode zur Berechnung der Logarithmen sehr grofser Zahlen auf bedeutend viele Decimalstellen 307
Beispiel . 308
Entwicklung einer Reihe zur Bestimmung der einem gegebenen Logarithmus entsprechenden Zahl 309
Beispiel . 310
Entwicklung einer Formel zur näherungsweisen Berechnung von x aus der Gleichung $x^x = a$ —
Beispiel . 312
Ueber die Convergenz unendlicher Factorenfolgen —
Beispiele hierüber 314

Anmerkungen.

A) Bemerkenswerthe Entwicklungen von a^x 320
B) Entwicklungen von $log.(1+x)$ 322
C) Entwicklung von $l(1+A_1x+A_2x^2+\ldots)$. . 325

Neuntes Capitel.

Entwicklung der vorzüglichsten trigonometrischen Reihen und der Reihen zur Berechnung von π; der *Moivre*schen Formel; Anwendung der letztern auf die Auflösung der binomischen und einiger trinomischen Gleichungen.

Entwicklung der Exponentialausdrücke und Reihen für $sin.x$ und $cos.x$ 327

Anmerkung.

Eine von der vorigen verschiedene Ableitung der Reihen für $sin.x$ und $cos.x$ 329
Auflösung dieser beiden Reihen in Binomial-Factoren 331
Entwicklung der Reihen für $tang\,x$ und $cot.x$ 332

Anmerkung.

Entwicklung von $l.sin.x$ und $l.cos.x$ 333

Seite

Entwicklung von Reihen, um den Bogen x durch $sin.\,x$ oder $tang.\,x$ auszudrücken 335

Reihen zur Berechnung von π 336

Die *Moivre*'sche Formel 339

Jeder positiven Zahl entsprechen unendlich viele Logarithmen, wovon nur ein einziger reell ist; einer negativen Zahl hingegen kommen blofs (unendlich viele) imaginäre Logarithmen zu 344

Anwendung des Vorhergehenden auf die Auflösung der binomischen Gleichungen.

Auflösung der Gleichung $x^n - 1 = 0$; sammt Beispielen . . 345

» » » $x^n + 1 = 0$; » » . . 349

Auflösung der trinomischen Gleichungen $x^{2n} + p\,x^n + q = 0$ 351

Anmerkung in Betreff der Berechnung von $\sqrt[n]{a \pm \sqrt{b}}$; nebst Beispielen —

Entwicklung des *Moivre*'schen und *Cotes*'schen Theorems . 355

Zehntes Capitel.

Entwicklung der Sinus und Cosinus der vielfachen, und der Potenzen von Sinus und Cosinus der einfachen Bogen.

Entwicklung von $cos.\,n\,(x \pm 2\,r\,\pi) + \sqrt{-1}\;sin.\,n\,(x \pm 2\,r\,\pi)$. 357

Entwicklung von $cos.\,n\,x$ und $sin.\,n\,x$

a) wenn n eine ganze positive oder negative Zahl ist 358

b) wenn n gebrochen ist 359

Ableitung von Formeln, in welchen $cos.\,n\,x$ und $sin.\,n\,x$ (mit einiger Beschränkung) entweder blofs durch $sin.\,x$ oder $cos.\,x$ ausgedrückt erscheint 361

Entwicklung von $cos.\,n\,x$ und $sin.\,n\,x$ (wenn n eine ganze Zahl ist) nach steigenden Potenzen von $sin.\,x$ und $cos.\,x$ (in der Note) 363

Ableitung der Reihen für $sin.\,y$ und $cos.\,y$ aus $sin.\,n\,x$ und $cos.\,n\,x$, nach *Euler* 364

Potenzen der Sinus und Cosinus —

Anmerkung.

I. Verwandlung einer gegebenen unendlichen Reihe in einen Kettenbruch; nebst Beispielen hierüber . . 369

II. Verwandlung eines Kettenbruchs in eine unendliche Reihe; sammt Beispielen 375

Eilftes Capitel.

Die Elemente der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Seite

Erklärungen 377
Die absolute oder einfache Wahrscheinlichkeit 380
Beispiele . 381
Die relative Wahrscheinlichkeit 385
Beispiele . 386
Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit 388
Beispiele . 389
Die wiederholten Versuche 396
Beispiele . 403
Die Steigerung der Wahrscheinlichkeit durch fortgesetzte Versuche 407
Beispiele . 408
Regeln beim Wetten 409
Beispiele . 410
Rechtmäſsige Theilung des Einsatzes vor Beendigung des Spiels —
Beispiele . 411
Werden dem einen Spieler gewisse Vortheile zugestanden, so verschaffen ihm die wiederholten Versuche endlich einen sichern Gewinn; ein Satz, auf welchem z. B. der Gewinn oder Fortbestand der gewöhnlichen Zahlen-Lotterien beruht 413
Die Wahrscheinlichkeit *a posteriori* 416
Vermischte Beispiele 420
Folgerungen aus den oben vorgetragenen Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung 432

Zwölftes Capitel.

Von den endlichen Differenzen der Functionen.

Entwicklung der 1^{sten}, 2^{ten}, 3^{ten}, ... Differenz von $f(x)$. . 435
Entwicklung der ersten Differenzen der vorzüglichsten Functionen 438

Anmerkung.

Entwicklung von $f(x+i)$ nach steigenden Potenzen von i 440
Ableitung der Regeln zur Bestimmung der Differenzen $\Delta.xyz$.., $\Delta.\frac{x}{y}$, u. s. w. 443
Beispiele über die höheren Differenzen der Functionen . 444

Seite

Formeln, um die Totaldifferenzen durch die partiellen Differenzen auszudrücken 447

Dreizehntes Capitel.

Von den Summen oder endlichen Integralien der Functionen.

Erklärungen . 451
Bestimmung der ersten und einfachsten Summen 452
» » höhern Summen 458

Vierzehntes Capitel.

Anwendung der Summen und Differenzen auf einige besondere Fälle.

Bestimmung des allgemeinen Gliedes jeder beliebigen arithmet. Reihe; sammt Beispielen 463
Bestimmung der summatorischen Glieder der Reihen; sammt Beispielen 464
Anwendung der partiellen Summen auf die Bestimmung des Summengliedes einer Doppelreihe 467
Entwicklung einiger Sätze der Combinationslehre, mit Hilfe der Summenrechnung 469
Anwendung der Summen- und Differenzrechnung auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung; sammt Beispielen 472

Einleitung.

Von den Functionen im Allgemeinen.

§. 1.

Erklärungen.

1. Eine Gröſse heiſst **beständig** (**constant**), wenn diese während einer Rechnung oder Entwicklung einen und denselben Werth unverändert beibehält. Dagegen wird eine Gröſse **veränderlich** (**variabel**) genannt, wenn man ihr in der nämlichen Entwicklung oder Untersuchung nach und nach alle möglichen Werthe beilegen kann; diese liegen indessen häufig innerhalb gewisser Grenzen, welche von der Natur des Gegenstandes selbst vorgezeichnet sind. Der Regel nach werden die beständigen Gröſsen mit den ersten, die veränderlichen aber mit den letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet.

2. Hängt der Werth einer Gröſse von dem Werthe einer andern ab, so wird die erste Gröſse eine **Function** der letztern genannt. Dieser Erklärung zu Folge kann nun jeder analytische Ausdruck als eine Function von allen darin vorkommenden Gröſsen überhaupt angesehen werden; indeſs berücksichtiget man dabei gewöhnlich nur die **veränderlichen** Gröſsen, und nennt einen solchen Ausdruck **Function** der darin enthaltenen **Variablen** *).

*) So ist z. B. bei der Ableitung und nähern Untersuchung (Discussion) der Gleichung des Kreises, der Halbmesser eine **beständige**, die Abscisse eine **veränderliche** Gröſse. Es kann indeſs, wie wir in der Folge sehen werden, Fälle geben, in welchen man auch den Halbmesser als veränderlich ansehen muſs, so, daſs es also erst aus der Natur der

Um diese Abhängigkeit kurz anzudeuten, setzt man den, in der Regel eingeklammerten, veränderlichen Gröſsen, einen der Buchstaben f, F, φ, ψ... vor, und bezeichnet z. B. den Ausdruck $\sqrt{2ax - x^2}$ mit $f(x)$, oder $F(x)$ u. s. w.; jenen $a + by^2 - 3 \sin. y$ mit $f(y)$, $\varphi(y)$ etc.; den folgenden $2x - 3y^2 + a^x + b$ mit $f(x, y)$, $\psi(x, y)$ u. s. w. um anzuzeigen, daſs der erste eine Function von x, der zweite eine Function von y, und der letzte eine Function von x und y ist. Ist es nöthig, auch eine oder mehrere der vorkommenden beständigen Gröſsen sichtbar zu machen, so werden diese ebenfalls in die Parenthese neben die veränderlichen Gröſsen hingesetzt und durch Beistriche getrennt.

Man gebraucht übrigens als Functionszeichen in ein und derselben Entwicklung den nämlichen Buchstaben nur für solche Ausdrücke, welche sich in nichts, als in der Verschiedenheit der die Variablen bezeichnenden Buchstaben unterscheiden, und von denen daher einer in den andern, durch bloſse Vertauschung dieser Buchstaben, übergehen kann. Bezeichnet man z. B. $z + a^x - ab \log. \sin. x$ mit $f(x)$, so wird in der nämlichen Entwicklung oder Rechnung, unter $f(y)$ der Ausdruck $z + a^y - ab \log. \sin. y$ verstanden. Man nennt solche Functionen, welche sich bloſs in der Bezeichnung der variablen Gröſsen unterscheiden, ähnliche Functionen.

Aufgabe oder Untersuchung hervorgehen kann, welche Gröſsen als beständig, und welche als veränderlich anzusehen und zu behandeln sind.

Da ferner, um bei diesem Beispiele stehen zu bleiben, in der Gleichung des Kreises, der Werth der Ordinaten, wenn man den Halbmesser (die beständige Gröſse) nicht weiter dabei berücksichtigt, also die Ordinaten desselben Kreises unter einander vergleicht, von dem Werthe der entsprechenden Abscissen abhängt; so ist die Ordinate eine Function von der zugehörigen Abscisse.

Nach einigen neuern Analysten, wie z. B. *Cauchy*, soll man aus den gegebenen Werthen der veränderlichen Gröſsen, immer den Werth der Function wirklich bestimmen können, wenn ihr diese Benennung mit Recht zukommen soll. Allein diese Einschränkung der obigen Definition scheint zum mindesten ohne Nutzen zu seyn.

Um Functionen von Functionen zu bezeichnen, schreibt man $\varphi f(x)$, $f F(x)$ etc. so, dafs wenn man z. B.

$$a + b\sqrt{x} = f(x)$$

setzt, $\varphi f(x)$ irgend eine andere Function von $a + b\sqrt{x}$, z. B. $(a + b\sqrt{x})^n$ bezeichnet; hingegen würde $ff(x)$ nichts anderes, als $a + b\sqrt{a + b\sqrt{x}}$ bedeuten.

Anmerkung. Statt der Bezeichnung $f(x)$, $\varphi(y)$, $F(z)$ u. s. w. bedient man sich auch häufig blofs der gleichnamigen grofsen Buchstaben X, Y, Z, etc.

3. Ist die Abhängigkeit einer Function von den zum Grunde liegenden veränderlichen Gröfsen, also die Verbindung der veränderlichen mit den beständigen Gröfsen, welche sofort die Function ausmacht, bekannt und mittelst Gleichungen ausgedrückt, so, dafs z. B. $y = \sqrt{2ax - x^2}$, $z = 4x^2 - 3\cos.v$ ist; so setzt man ebenfalls, der Kürze wegen, $y = f(x)$, $z = F(x, v)$, um anzuzeigen, dafs im ersten Falle y eine Function von x, im zweiten aber z eine Function von x und v ist. Die Gröfsen y und z (die Functionen), welche ihrer Natur nach ebenfalls veränderlich sind, heifsen auch relativ veränderliche Gröfsen, während die erstern, nämlich x, und x und v, absolut veränderlich genannt werden.

Die hier angeführten Beispiele sind zugleich Beispiele von gesonderten oder entwickelten (*expliciten*) Functionen, weil y und z allein oder gesondert auf der einen Seite der Gleichung stehen. Ist hingegen blofs die Relation einer Function mit den Gröfsen, von welchen sie abhängt, gegeben, ohne dafs diese selbst noch bestimmt oder entwickelt ist, so wird eine solche Function eine ungesonderte oder unentwickelte (*implicite*) Function genannt; so wäre z. B. in der Relation

$$y^2 - 3ax^3 + bxy = 0$$

y eine ungesonderte Function von x, so wie auch umgekehrt x eine solche Function von y; in $\log. x = y$, ist y eine gesonderte oder entwickelte Function von x, dagegen x eine unentwickelte Function von y.

4. Eine Function heiſst algebraisch, wenn sich in den vorkommenden Verbindungen der veränderlichen und beständigen Gröſsen, auf die erstern keine andern als algebraische Rechnungsoperationen, nämlich keine andern, als Addition, Subtraction, Multiplication, Division, und Potenzirung mit ganzen oder gebrochenen, jedoch beständigen, Exponenten beziehen. Im Gegentheile wird eine Function transcendent genannt; unter diesen sind die logarithmischen und Kreisfunctionen die vorzüglichsten, und bis jetzt noch die wichtigsten *). So sind z. B.

$$ax^n + \frac{b}{x} - 3a\sqrt[3]{x^2} \quad \text{und} \quad 2x^{\frac{1}{2}} - y\,log.\,a$$

algebraische Functionen von x, und von x und y; dagegen sind $a + 2\,log.\,x$, $2x^2 - a^x$ und $a - b\,sin.\,x$ Beispiele von transcendenten Functionen.

5. Die algebraischen Functionen werden noch eingetheilt in rationale und irrationale, so wie auch in ganze und gebrochene. Rational heiſst eine Function, wenn die vorkommenden veränderlichen Gröſsen weder einen gebrochenen Exponenten besitzen, noch unter einem Wurzelzeichen stehen, vorausgesetzt, daſs alle möglichen Reductionen vorausgegangen sind; im Gegentheile ist die Function irrational. Ganz wird eine Function genannt, wenn die veränderlichen Gröſsen weder mit negativen Exponenten, noch als Nenner (mit positiven Exponenten) erscheinen; im Gegentheile heiſst die Function gebrochen. So ist z. B. in

$$y = 2x - \frac{a}{b}x^4 + a^{-1}$$

y eine ganze, rationale, und in

*) Es lassen sich, wie wir in der Folge sehen werden, die transcendenten Gröſsen als solche definiren, denen unendlich viele Werthe zukommen; oder auch als solche, welche durch Gleichungen von bestimmten Graden nicht dargestellt werden können, und sich nur mittelst unendlicher Reihen ausdrücken lassen. Ihre Benennung rührt daher, daſs man sie als Gröſsen angesehen hat, welche die Kräfte der gewöhnlichen Algebra übersteigen.

$$y = a^2 - \frac{3b}{2 - x} + \frac{\sqrt[3]{a + x^2}}{\sqrt{x}},$$

eine gebrochene, irrationale Function.

Die allgemeine Form einer ganzen, rationalen Function, von einer variablen Gröſse ist:

$$1)\quad A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

so wie die einer gebrochenen rationalen Function:

$$2)\quad \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.}{a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.}$$

wobei A, B, C ... und a, b, c ... von x ganz unabhängige, unbestimmte Coefficienten sind.

Ist die höchste Potenz von x im Nenner gröſser, als die im Zähler, so heiſst die Function echt gebrochen; findet diese Eigenschaft nicht Statt, so wird die Function unecht gebrochen genannt.

6. a) Eine Function zweier oder mehrerer veränderlichen Gröſsen heiſst homogen oder gleichartig, wenn die Summe, aus den veränderlichen Factoren, d. i. die Dimension, in einem jeden Gliede gleich groſs ist; im Gegentheile wird die Function heterogen oder ungleichartig genannt. So ist z. B.

$$z = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

eine ganze homogene Function vom dritten Grade oder von der dritten Ordnung, und

$$z = \frac{2x^2 - 3xy}{x + 2y}$$

eine gebrochene gleichartige Function von der ersten Ordnung; dagegen sind

$$z = 2a + bx^2y + x^4 \quad \text{und} \quad z = \frac{a - 3x^2y + 4y^3}{ax - by}$$

ungleichartige Functionen, die erstere vom vierten, die letztere vom zweiten Grade.

b) Aus der vorigen Definition folgt auch die nachstehende:

Eine Function mehrerer veränderlichen Gröſsen

$$f(x, y, z, \ldots)$$

ist homogen und vom Grade m, wenn

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^m f(x, y, z, \ldots)$$

wird, wobei t eine willkürliche oder neue variable Gröſse bezeichnet.

So geht z. B. die Function $x^2 + 3xy + \frac{y^3}{x}$, wenn man statt x und y, tx und ty schreibt, über in

$$t^2 x^2 + 3t^2 xy + \frac{t^3 y^3}{tx} = t^2 \left(x^2 + 3xy + \frac{y^3}{x}\right);$$

folglich ist diese eine homogene Function des zweiten Grades.

7. Zwei oder mehrere Functionen von der nämlichen Variablen sind von einerlei Form, wenn die Exponenten der Variablen in beiden oder allen Functionen nach dem nämlichen Gesetze fortschreiten; so sind z. B. die beiden Functionen

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots \text{ und } A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

so wie auch die beiden folgenden:

$$A_1 x + (A_2 x^2 + A_3 xy + A_4 y^2) + \ldots$$
$$\text{und } a_1 x + (a_2 x^2 + a_3 xy + a_4 y^2) + \ldots$$

von derselben Form, und unterscheiden sich sofort bloſs durch die Verschiedenheit der Coefficienten.

8. Jede Function ist entweder eine ein- oder eine vielförmige Function, je nachdem diese für jeden Werth der veränderlichen Gröſse nur einen, oder mehrere Werthe erhält; je nach der Anzahl dieser Werthe heiſst die Function 2, 3 ... nförmig. So ist z. B. y in

$$y = 2 - 3x + 4x^3$$

eine einförmige, dagegen in

$$y^2 - 3ayx^3 + bx^2 + c = 0$$

eine zweiförmige (ungesonderte) Function von x, weil y im letzten Falle für jeden Werth von x zwei Werthe erhält, welche sogleich durch die Auflösung dieser Gleichung nach y, wodurch man

$$y = \frac{3ax^3 \pm \sqrt{9a^2x^6 - 4bx^2 - 4c}}{2}$$

(also eine gesonderte Function) erhält, ersichtlich werden. In beiden angeführten Beispielen ist hingegen x eine dreiförmige Function von y.

Wie wir in der Folge sehen werden, gehören die höheren Gleichungen zu den vielförmigen Functionen.

9. Eine Function zweier oder mehrerer veränderlichen Gröſsen wird symmetrisch genannt, wenn man die Variablen darin beliebig mit einander verwechseln oder vertauschen kann, ohne daſs dadurch der Werth der Function verändert wird. So sind z. B.

$$x^2 - 2xy + y^2, \quad x^3 + y^3 + z^3 - \frac{xy}{z} - \frac{xz}{y} - \frac{yz}{x}$$

symmetrische Functionen.

10. Aendert sich eine Function, indem die veränderliche Gröſse, von welcher sie abhängt, allmählich oder continuirlich zu- oder abnimmt, d. h. indem die Variable nicht von einem Werthe zu einem andern übergeht, ohne dabei alle Zwischenwerthe nach und nach anzunehmen, auch allmählich und nicht sprungweise; so heiſst die Function continuirlich; im Gegentheile wird sie discontinuirlich genannt. So sind z. B. $a + bx$ und x^n continuirliche Functionen von x, während jene $\frac{a}{x}$ und x^{-n} nur für Werthe von $x >$ oder $<$ als Null continuirlich, dagegen für $x = 0$ discontinuirlich sind. Diese Beispiele zeigen zugleich die Möglichkeit, daſs es Functionen geben könne, welche nur innerhalb bestimmter Grenzen oder Werthe der Variablen continuirlich sind.

§. 2.

Lehrsatz.

Ist eine Function von der Form

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots,$$

wobei A, B, C, D... endliche, von x unabhängige Coefficienten seyn sollen, für jeden Werth der veränderlichen Gröſse gleich Null; so ist auch jeder dieser Coefficienten, für sich genommen, gleich Null.

Denn setzt man in der Gleichung

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots = 0,$$

welche, der Voraussetzung gemäſs, für jeden Werth von x bestehen soll, $x = 0$, so erhält man, wegen

$$Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots = 0 \text{ *)}:$$

$$A = 0.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen gibt, wenn durch x dividirt wird:

$$B + Cx + Dx^2 + \ldots = 0;$$

setzt man in dieser Gleichung abermals $x = 0$, so folgt eben so, wegen $Cx + Dx^2 + \ldots = 0$:

$$B = 0;$$

und so erhält man durch das wiederholte Verfahren ebenfalls nach und nach

$$C = 0, \quad D = 0 \quad \text{u. s. f.}$$

Folgerung. Sind zwei Functionen von einerlei Form (Erkl. 7) für jeden Werth der veränderlichen Gröſsen einander gleich, so sind auch die gleichnamigen, d. i. jene Coefficienten einander gleich, welche beiderseits zu den nämlichen Potenzen, oder, wenn mehrere veränderliche Gröſsen vorkommen, zu denselben Verbindungen der Variablen gehören **).

Denn ist z. B.

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots = a + bx + cx^2 + \ldots,$$

so ist auch

$$(A - a) + (B - b)x + (C - c)x^2 + \ldots = 0,$$

also nach dem eben erwiesenen Satze:

$$A - a = 0, \quad B - b = 0, \quad C - c = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

und daraus

$$A = a, \quad B = b, \quad C = c \quad \text{u. s. f.}$$

*) Weil nämlich die Coefficienten $B, C, D \ldots$ der Voraussetzung zufolge endliche Gröſsen sind. Wäre diese Bedingung nicht vorhanden, so müſste man, um vollkommen sicher zu gehen, überzeugt seyn, daſs so kleine Werthe für x möglich sind, für welche die obige Reihe convergirt (Cap. VII.).

**) Auch hier gilt die vorige Bemerkung.

Eben so beweist man, dafs der Gleichung

$$A_1 x + A_2 x^2 y + A_3 x y^2 + \ldots = a_1 x + a_2 x^2 y + a_3 x y^2 + \ldots,$$

wenn A_1, $A_2 \ldots$, a_1, $a_2 \ldots$ von x und y unabhängig sind, die Bedingungen zum Grunde liegen:

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = a_2, \quad A_3 = a_3 \quad \text{u. s. w.}$$

Anmerk. Dieser Satz, welcher unter dem Namen des Satzes oder der Methode der unbestimmten Coefficienten bekannt, und von *Descartes (Cartesius,* geb. zu *la Haye* in *Touraine* 1596; gest. in Stockholm 1650) um die Mitte des siebenzehnten Jahrhunderts zuerst aufgestellt wurde, ist für die gesammte höhere Analysis von der gröfsten Wichtigkeit, und sofort ein Fundamentalsatz.

§. 3.

Lehrsatz.

Werden zwei oder mehrere Functionen von *derselben,* in Erkl. 5, 1) angeführten, Form und der nämlichen Variablen, *a*) zusammenaddirt oder von einander subtrahirt, *b*) mit einander multiplicirt, *c*) durch einander dividirt, oder wird eine solche Functionsreihe *d*) zu was immer für einer Potenz erhoben, wobei der Exponent ganz oder gebrochen, positiv oder negativ seyn kann; so ist das Ergebnifs oder Resultat wieder eine Functionsreihe von der *nämlichen* Form.

a) Denn es geben offenbar die beiden Functionen:

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots$$

$$a + bx + cx^2 + \ldots \text{ wenn man add. und subtrah.}$$

$$(A \pm a) + (B \pm b)\, x + (C \pm c)\, x^2 + \ldots$$

ein Resultat von der Form $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$, welche mit jener der beiden Functionen einerlei ist.

b) Die beiden vorigen Functionsreihen zusammenmultiplicirt, geben:

$$Aa + (Ba + Ab)\, x + (Ca + Bb + Ac)\, x^2 + \ldots,$$

also eine Functionsreihe, welche wieder von der Form $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$ der gegebenen ist.

Es ist übrigens leicht zu sehen, dafs sich der Beweis in beiden Fällen, auf jede beliebige Anzahl von Functionsreihen von derselben Form, ausdehnen läfst.

Anmerk. Man findet leicht, dafs auch das Product von Functionsreihen, von der Form $A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \ldots$ die nämliche Form $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 + \ldots$ besitzt.

c) Die Einheit durch die Functionsreihe

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

dividirt, gibt, wie man sich leicht überzeugt, nach der Natur der Division, einen Quotienten von der Form

$$p + qx + rx^2 + sx^3 + \ldots.$$

Es ist aber

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots}{a + bx + cx^2 + \ldots} = (A + Bx + Cx^2 + \ldots)\left(\frac{1}{a + bx + cx^2 + \ldots}\right)$$

$$= (A + Bx + Cx^2 + \ldots)(p + qx + rx^2 + \ldots)$$

(nämlich der gemachten Bemerkung wegen)

$$= \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots \quad \text{(nach } b\text{))}.$$

d) Für einen ganzen positiven Exponenten n, folgt die Richtigkeit der Gleichung:

1) $(A + Bx + Cx^2 + \ldots)^n = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$

unmittelbar aus *b*), weil im Grunde hier nur n gleiche Functionsreihen mit einander multiplicirt werden.

Für einen negativen Exponenten hat man:

$$(A + Bx + Cx^2 + \ldots)^{-n} = \frac{1}{(A + Bx + Cx^2 + \ldots)^n}$$

$$= \frac{1}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots} \quad \text{(nach der vorigen Gl.)}$$

$$= p + qx + rx^2 + \ldots \quad \text{(nach } c\text{))}.$$

Aus der obigen Gleichung 1) folgt endlich, wenn man beiderseits die n^{te} Wurzel auszieht:

$$\sqrt[n]{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots} = A + Bx + Cx^2 + \ldots,$$

und daraus wieder, wenn man sie zur m^{ten} Potenz erhebt, wobei m positiv oder negativ seyn kann:

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots)^{\frac{m}{n}} = (A + Bx + Cx^2 + \ldots)^m = a + bx + cx^2 + \ldots$$

also das Resultat von der nämlichen Form, es mag $\frac{m}{n}$ positiv oder negativ seyn.

Erstes Capitel.

Allgemeine Gesetze für die Multiplication der Functionsreihen. Polynomischer und binomischer Lehrsatz.

Multiplication der Functionsreihen.

§. 4.

Um sogleich eine bequeme und vortheilhafte Bezeichnung einzuführen, wollen wir die Coefficienten der in §. 1. Erkl. 5 angeführten Functionsreihe 1), der Reihe nach mit A_1, A_2, A_3, A_4 ... A_n u. s. w., also die Functionsreihe selbst durch

$$A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots + A_n x^{n-1} + A_{n+1} x^n + \ldots$$

bezeichnen. Die dabei gewählten, dem Buchstaben A angehängten, Zeiger, gewähren nebst vielen andern Vortheilen auch jenen, daſs sie zugleich als Ordnungszahlen der Coefficienten dienen, und die Stelle anzeigen, welche jeder derselben in der Reihe einnimmt.

Dieſs vorausgesetzt, erhält man durch die Multiplication der beiden Functionsreihen

$$A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots + A_n x^{n-1} + \ldots \quad \text{und}$$
$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1} + \ldots$$

ganz einfach das Product:

$$A_1 a_1 + \left.\begin{matrix} A_2 a_1 \\ A_1 a_2 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} A_3 a_1 \\ A_2 a_2 \\ A_1 a_3 \end{matrix}\right\} x^2 + \ldots + \left.\begin{matrix} A_n a_1 \\ A_{n-1} a_2 \\ A_{n-2} a_3 \\ \ldots \\ A_2 a_{n-1} \\ A_1 a_n \end{matrix}\right\} x^{n-1} + \ldots$$

in welchem die Bildung der einzelnen Coefficienten von selbst in die Augen springt, und die wir bloſs um des Zusammenhanges mit dem Folgenden willen, kurz erwähnen wollen.

1. Die Summe der Zeiger der zusammenmultiplicirten Coefficienten ist im ersten Gliede gleich 2, gleich der Anzahl der mit einander multiplicirten Functionsreihen.

2. Diese Summe nimmt in jedem folgenden Gliede um eine Einheit zu, und bleibt in allen Partialproducten, welche zusammen einen Coefficienten des Productes bilden, die nämliche, so, dafs diese Summe im zweiten Gliede durchaus 3, im dritten Gliede durchaus 4 u. s. w., im n^{ten} Gliede durchaus $n + 1 = n + 2 - 1$ beträgt.

3. Jede dieser Summen erscheint so oft als möglich in zwei Theile zerlegt, wobei die entstehenden verschiedenen Combinationen auch noch gehörig permutirt sind, d. h. es bilden diese Zeiger, wie sie in den einzelnen Coefficienten des Productes erscheinen, die zweite Classe der Variationen zu bestimmten Summen.

4. Die Anzahl der Theile oder Partialproducte, aus welchen die Coefficienten der Reihe nach bestehen, werden durch die auf einander folgenden Glieder der Reihe 1, 2, 3, 4... ausgedrückt, indem der erste Coefficient aus einem, der zweite aus zwei, der dritte aus drei Theilen u. s. w. besteht.

Es läfst sich also leicht jedes Glied des Productes aufser der Reihe bilden; denn soll z. B. das fünfte Glied in dem obigen Producte bestimmt werden, so wird man die zweite Classe der Variationen zur Summe 6 bilden, welches sofort gibt:

5 1
4 2
3 3
2 4
1 5.

Läfst man jetzt die Zahlen der ersten verticalen Columne für die Zeiger von A, jene der zweiten Columne für jene von a gelten (was man offenbar auch umkehren kann); so hat man den Coefficienten des fünften Gliedes, welcher nur noch, dem in Bezug auf die Exponenten von x oben ausgesprochenen Gesetze gemäfs, mit x^4 multiplicirt wer-

den darf, um sofort das verlangte Glied zu erhalten; dieses ist nämlich:

$$(A_5 a_1 + A_4 a_2 + A_3 a_3 + A_2 a_4 + A_1 a_5)\, x^4.$$

Anmerk. Bei der wirklichen Bildung der einzelnen Coefficienten des Productes, wird man natürlich bei der Zerlegung der betreffenden Summen, die einzelnen Zahlen sogleich als Zeiger mit A und a verbinden.

§. 5.

Werden die drei Functionsreihen von derselben Form

$$A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \dots, \quad a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots$$

mit einander multiplicirt, indem man das im vorigen Paragraphe gefundene Product der beiden ersten Functionen noch mit der dritten Functionsreihe multiplicirt; so erhält man ganz einfach, nach dem nämlichen Gesetze, das Product:

$$A_1a_1\alpha_1+\left.\begin{array}{l|l}A_2a_1 & \\ A_1a_2 & \alpha_1\\ \hline A_1a_1 & \alpha_2\end{array}\right\}x+\left.\begin{array}{l|l}A_3a_1&\\A_2a_2&\alpha_1\\A_1a_3&\\\hline A_2a_1&\\A_1a_2&\alpha_2\\\hline A_1a_1&\alpha_3\end{array}\right\}x^2+\dots+\left.\begin{array}{l|l}A_na_1&\\A_{n-1}a_2&\\A_{n-2}a_3&\alpha_1\\\dots&\\A_1a_n&\\\hline A_{n-1}a_1&\\A_{n-2}a_2&\alpha_2\\\dots&\\A_1a_{n-1}&\\\hline \dots&\\\dots&\\\hline A_2a_1&\alpha_{n-1}\\A_1a_2&\\\hline A_1a_1&\alpha_n\end{array}\right\}x^{n-1}+\dots$$

unter welcher Form dasselbe nicht nur am schnellsten und einfachsten zu bilden ist, indem es eine bloſse Wiederholung der im vorigen Paragraphe angedeuteten Gesetze fordert, sondern auch für den Gebrauch, wenn die Coefficienten numerische Werthe erhalten, am bequemsten wird, und die einfachste Reduction gestattet.

Denkt man sich die mit den verschiedenen Coefficienten angedeuteten Multiplicationen verrichtet, so ergeben sich für die Coefficienten des Productes der drei Functionsreihen, analog mit denen des vorigen Paragraphes, folgende, leicht zu übersehende Gesetze:

1. Die Summe der Zeiger der zusammenmultiplicirten einzelnen Coefficienten ist im ersten Gliede gleich 3, nämlich gleich der Anzahl der mit einander multiplicirten Functionsreihen.

2. Diese Summe nimmt in jedem folgenden Gliede um eine Einheit zu und ist für alle Theile oder Partialproducte des zweiten Gliedes 4, im dritten Gliede durchaus 5 u. s. w., im n^{ten} Gliede durchaus $n + 2 = n + 3 - 1$; oder es beträgt diese Summe in jedem Gliede um 2 mehr, als der betreffende Zeiger oder Index des Gliedes Einheiten hat.

3. Jede der einzelnen Summen erscheint so oft als möglich in drei Theile zerlegt, oder es bilden, da auch die Permutationen wieder vorkommen, die Zeiger der einzelnen Coefficienten die dritte Classe der Variationen zu bestimmten Summen.

4. Die Anzahl der Theile oder Partialproducte, aus welchen die auf einander folgenden Coefficienten bestehen, wird, welches wir hier nur nebenher anführen wollen, durch die Glieder der Reihe 1, 3, 6, 10, 15 . . . ausgedrückt. Diese Reihe, welche wir weiter unten genauer werden kennen lernen, entsteht aus der im vorigen Paragraphe unter 4 angegebenen 1, 2, 3, 4 .., wenn man in dieser nach und nach die Summe des ersten, jene des ersten und zweiten, jene des ersten, zweiten und dritten Gliedes u. s. w. nimmt; sie kann bei der Bildung der einzelnen Coefficienten des obigen Productes mit Nutzen berücksichtiget werden, und zur Verification der Zerlegungen dienen.

Es läfst sich daher auch, mit Hilfe dieser Gesetze, wieder leicht jedes beliebige Glied des Productes aufser der Reihe bilden.

§. 6.

Multiplicirt man das Product der drei Functionsreihen des vorigen Paragraphes noch mit der vierten

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 x + \mathfrak{A}_3 x^2 + \mathfrak{A}_4 x^3 + \ldots,$$

so sieht man genau wieder die obigen Gesetze in den Coefficienten des Productes zum Vorscheine kommen, indem

1. die Summe der Zeiger im ersten Gliede gleich 4, d. i. gleich der Anzahl der Functionsreihen;

2. diese Summe in jedem folgenden Gliede um eine Einheit gröſser ist, und daher im zweiten Gliede in allen Theilen 5, im dritten Gliede 6 u. s. w., im n^{ten} Gliede

$$n + 3 = n + 4 - 1$$

beträgt; und

3. diese Summe so oft als möglich in vier Theile zerlegt, und die entstehenden verschiedenen Combinationen wieder gehörig permutirt sind, also die Zeiger der einzelnen Coefficienten die vierte Classe der Variationen zu bestimmten Summen bilden. Auch ergibt sich wieder

4. daſs die Glieder der Reihe 1, 4, 10, 20, 35, 56... welche aus jener des nächst vorhergehenden Paragraphes genau so, wie diese letztere aus der vorhergehenden im §. 4. entsteht, die Zahl der Theile oder Partialproducte ausdrückt, aus welchen die einzelnen Coefficienten des Productes der Reihe nach bestehen (was hier nur als ein mechanisches Hilfsmittel angeführt wird).

Man erhält nämlich für das Product der erwähnten vier Functionsreihen, wenn man diesem sogleich wieder die Form gibt, unter welcher es am leichtesten zu bilden *), und am bequemsten anzuwenden ist:

*) Man kann nämlich selbst bei dieser Anzahl von vier Functionsreihen, ohne noch zu den Zerlegungen der einzelnen Zeigersummen Zuflucht nehmen zu müssen, die Coefficienten unmittelbar durch die wiederholte Anwendung der im §. 4. für das Product zweier Functionen erhaltenen Gesetze bilden und anschreiben; wie dieses auch die obige Darstellung zeigt.

$$A_1 a_1 \alpha_1 \mathfrak{A}_1 + \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A_2 a_1 \\ A_1 a_2 \end{array}\right| \alpha_1 \\ A_1 a_1 \,|\, \alpha_2 \end{array}\right| \mathfrak{A}_1 \\ A_1 a_1 \,|\, \alpha_1 \,|\, \mathfrak{A}_2 \end{array}\right\} x + \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A_3 a_1 \\ A_2 a_2 \\ A_1 a_3 \end{array}\right| \alpha_1 \\ \left.\begin{array}{l} A_2 a_1 \\ A_1 a_2 \end{array}\right| \alpha_2 \\ A_1 a_1 \,|\, \alpha_3 \end{array}\right| \mathfrak{A}_1 \\ \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A_2 a_1 \\ A_1 a_2 \end{array}\right| \alpha_1 \\ A_1 a_1 \,|\, \alpha_2 \end{array}\right| \mathfrak{A}_2 \\ A_1 a_1 \,|\, \alpha_1 \,|\, \mathfrak{A}_3 \end{array}\right\} x^2 + \dots$$

Es ist offenbar überflüssig, diese Multiplicationen weiter fortzusetzen und auf eine noch gröſsere Anzahl von Functionsreihen auszudehnen; indem die dabei Statt findenden Gesetze schon bis hieher hinreichend klar und deutlich ausgesprochen sind. Auch ist leicht zu sehen, daſs wenn man diese Gesetze für das Product von n Functionsreihen von der obigen Form, als bestehend oder richtig annimmt, diese ferner, vermöge §. 4., auch gelten, wenn man das genannte Product noch mit einer ($n+1^{ten}$) Functionsreihe von derselben Form multiplicirt; so, daſs also auch diese Gesetze für $n+1$ solcher Functionsreihen gelten, woraus sofort, da diese Gesetze für $n = 2, 3, 4$ bereits nachgewiesen sind, die allgemeine Giltigkeit für jede beliebige Anzahl von Functionsreihen erwiesen ist.

Man ist daher auch im Stande, aus dem Producte einer beliebigen Anzahl von Functionsreihen von einerlei Form, jedes Glied auſser der Reihe, oder unabhängig von den übrigen zu bilden; dazu kann man sich entweder wiederholt der Bildungsgesetze für das Product zweier Functionen (§. 4.), oder, wenn die Anzahl der Functionsreihen zu groſs wird, der Methode der Variationen zu bestimmten Summen bedienen. Soll nämlich aus dem Producte von n Functionsreihen das p^{te} Glied bestimmt werden, so kommt es im letztern Falle nur darauf an, die Summenzahl $n+p-1$ so oft es angeht in n Theile zu zerlegen, und aus den entstehenden verschiedenen Combinationen zu n, auch noch alle möglichen Permutationen herzuleiten, d. h. mit andern

Worten, die n^{te} Classe der Variationen zur Summe $n + p - 1$ zu bilden. Wir werden im folgenden Paragraphe jede der beiden erwähnten Methoden noch durch ein Beispiel erläutern.

§. 7.

Beispiel 1.

Von dem Producte der vier Functionsreihen

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots,$$
$$1 + x - x^2 - x^3 + x^4 + \ldots,$$
$$2 + 3x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \ldots \text{ und}$$
$$3 - x - 3x^2 - 2x^3 - 4x^4 - \ldots$$

das dritte Glied anzugeben.

Benützt man sogleich den im vorigen Paragraphe nach der ersten Methode gebildeten dritten Coefficienten aus dem Producte von vier Functionen, und läſst die A für die Coefficienten der ersten, die a für jene der zweiten, die α für jene der dritten, und endlich die $\mathfrak{A}$ für die Coefficienten der vierten gegebenen Function gelten, wodurch sofort

$$A_1 = 1, \quad A_2 = -2, \quad A_3 = 3 \ldots,$$
$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1 \ldots,$$
$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 3, \quad \alpha_3 = 1 \ldots \text{ und}$$
$$\mathfrak{A}_1 = 3, \quad \mathfrak{A}_2 = -1, \quad \mathfrak{A}_3 = -3 \ldots$$

wird; so hat man nach gehöriger Substitution und Reduction für das gesuchte dritte Glied: $-13x^2$.

Beispiel 2.

Es soll das vierte Glied aus dem Producte der fünf Functionsreihen

$$1 - 2x^2 + x^4 - 3x^6 + \ldots,$$
$$2 + x^2 + 2x^4 + 3x^6 - \ldots,$$
$$1 - 3x^2 - x^4 - 4x^6 - \ldots,$$
$$3 + 2x^2 + x^4 - 2x^6 + \ldots \text{ und}$$
$$5 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + \ldots$$

angegeben werden (die ungeraden Potenzen, welche hier durchaus fehlen, nicht mitgezählt).

Bildet man, um die zweite Methode anzuwenden, die fünfte Classe der Variationen zur Summe $4 + 5 - 1 = 8$, so erhält man

41111	21131
32111	12131
23111	11231
14111	11141
31211	31112
22211	22112
13211	13112
21311	21212
12311	12212
11411	11312
31121	21122
22121	12122
13121	11222
21221	11132
12221	21113
11321	12113
	11213
	11123
	11114.

Läſst man die Zahlen der ersten Verticalcolumne für die Coefficientenzeiger der ersten Function, die Zahlen der zweiten Columne für die Coefficientenzeiger der zweiten Function u. s. w., die Zahlen der letzten oder fünften Columne für die Coefficientenzeiger der fünften gegebenen Functionsreihe gelten; so erhält man nach gehöriger Substitution und Reduction für den vierten Coefficienten des Productes der fünf Functionsreihen: -345, mithin mit Berücksichtigung der Anmerkung im §. 3., für das verlangte vierte Glied:

$$-345x^6.$$

Anmerk. Wären die mit einander zu multiplicirenden Functionsreihen von der noch allgemeineren Form

$$A_1 x^n + A_2 x^{n+m} + A_3 x^{n+2m} + A_4 x^{n+3m} + \ldots,$$

so könnten diese durch eine schickliche Substitution einer neuen Variablen für x, immer wieder auf die in unsern Ent-

wicklungen zum Grunde gelegten Form zurückgebracht werden. Denn nimmt man in dieser Reihe x^n als Factor heraus und setzt $x^m = y$, wodurch $x^n = y^{\frac{n}{m}}$ wird; so hat man auch

$$y^{\frac{n}{m}} [A_1 + A_2 y + A_3 y^2 + A_4 y^3 + \ldots],$$

wobei also die in der Parenthese eingeschlossene Reihe wieder die allgemein zum Grunde gelegte Form besitzt.

Polynomischer Lehrsatz.

§. 8.

Setzt man, um auf die Potenzen der Functionsreihen überzugehen, in der Entwicklung des vierten Paragraphes, d. i. in dem Producte zweier Functionsreihen

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = a_2, \quad A_3 = a_3 \ldots A_n = a_n,$$

wodurch das Product in die zweite Potenz der allgemeinen Functionsreihe oder des Polynoms übergeht; so erhält man nach gehöriger, einfacher Reduction für die zweite Potenz eines Polynoms

$$(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots)^2 = a_1^2 + 2 a_1 a_2 x + (2 a_1 a_3 + a_2^2) x^2 + (2 a_1 a_4 + 2 a_2 a_3) x^3 + (2 a_1 a_5 + 2 a_2 a_4 + a_3^2) x^4 + \ldots$$

welche Entwicklung nach einem so einfachen Gesetze fortschreitet, daſs man diese unabhängig von jener des §. 4. beliebig fortsetzen, oder auch jedes Glied auſser der Reihe bilden kann. Dazu bedarf es nur der Zerlegung der betreffenden Summenzahl, welche ebenfalls, wie bei dem Producte (§. 4.), im n^{ten} Gliede $n + 1$ beträgt, so oft als möglich in zwei Theile, d. h. der Bildung der zweiten Classe der Combinationen zu bestimmten Summen, um die Zeiger von a, und der Bestimmung der Permutationszahlen dieser Combinationen, um die betreffenden Coefficienten zu erhalten. Soll z. B. das fünfte und achte Glied dieser zweiten Potenz gefunden werden, so hat man zur Bildung des fünften Coefficienten die Summe $5 + 1 = 6$ so oft wie möglich in zwei Theile zu zerlegen (die zweite Classe der Combinationen zur Summe 6 zu bilden), wodurch man erhält:

51, 42, 33;

da sich ferner jede der beiden ersten Combinationen oder Complexionen zwei Mal, die letzte nur ein Mal permutiren läfst, welche Zahlen sofort die betreffenden Coefficienten der einzelnen Partialproducte geben; so erhält man für den fünften Coefficienten, wie zuvor:

$$2a_1a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2 \; ^{*}),$$

welcher nur noch mit x^4 multiplicirt werden darf, um das verlangte fünfte Glied selbst zu erhalten.

Für die Bildung des achten Gliedes hat man eben so, da die Summe der Zeiger in diesem Gliede gleich $8+1=9$ ist:

81 mit 2 Perm., 72 „ 2 P., 63 „ 2 P., 54 „ 2 P.;

folglich ist das verlangte achte Glied:

$$(2a_1a_8 + 2a_2a_7 + 2a_3a_6 + 2a_4a_5)\, x^7.$$

Anmerk. Da die Summe der Theile oder Partialproducte, aus welchen die Coefficienten des Productes zweier Functionen bestehen (§. 4., 4), hier, bei der zweiten Potenz, in die Summe der genannten Permutationszahlen übergeht; so kann die angeführte Reihe 1, 2, 3, 4... hier ebenfalls zur Verification der richtigen Zerlegungen und Aussetzung der Permutationszahlen dienen. So beträgt in der That die Summe der einzelnen Zahlen-Coefficienten, im vorhin bestimmten fünften Gliede 5, jene des achten Gliedes, wie man sieht 8; welche Summen genau mit dem fünften und achten Gliede der angeführten Reihe übereinstimmen.

§. 9.

Setzt man eben so in dem Producte der drei Functionsreihen §. 5.

$$A_1 = \alpha_1 = a_1, \quad A_2 = \alpha_2 = a_2, \; \ldots \; A_n = \alpha_n = a_n,$$

wodurch der durch die Verschiedenheit der Alphabete begründete Unterschied aufhört; so erhält man nach gehöriger Reduction für die dritte Potenz eines Polynoms den Ausdruck:

*) Bei der Bildung der einzelnen Combinationen oder Zerlegung der Summenzahlen ist es bequemer, die gröfsern Elemente den kleinern vorausgehen zu lassen; welche Ordnung man aber bei dem Aufschreiben des gesuchten Coefficienten geradezu umkehrt, was sehr leicht ist.

$$(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots)^3 =$$

$$a_1^3 + 3a_1^2 a_2 x + \left.\begin{matrix} 3a_1^2 a_3 \\ 3a_1 a_2^2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 3a_1^2 a_4 \\ 6a_1 a_2 a_3 \\ a_2^3 \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots$$

und es läfst sich dieser ebenfalls unabhängig von der in §. 5. angeführten Entwicklung fortsetzen, oder daraus ein beliebiges Glied aufser der Reihe bilden, wenn man bemerkt, dafs die in jedem Gliede betreffende Summenzahl, welche (wie im §. 5.) im n^{ten} Gliede $= n + 2$ ist, so oft es angeht, in drei Theile zerlegt, die Zeiger von a, und die zugehörigen Permutationszahlen wieder die Zahlen-Coefficienten für die einzelnen Theile oder Partialproducte liefern, aus welchen der ganze Coefficient besteht oder zusammengesetzt ist.

Um also z. B. das folgende oder fünfte Glied dieser dritten Potenz zu bilden, für welche die Summe der Zeiger $= 5 + 3 - 1 = 7$ ist, hat man:

511 mit 3 Permut., 421 „ 6 Perm., 331 „ 3 P., 322 „ 3 P.

folglich für das gesuchte Glied:

$$(3a_1^2 a_5 + 6a_1 a_2 a_4 + 3a_1 a_3^2 + 3a_2^2 a_3)\, x^4;$$

die Summe der einzelnen Zahlen-Coefficienten, nämlich $3 + 6 + 3 + 3 = 15$ stimmt wieder mit dem betreffenden oder fünften Gliede der in §. 5. (4) angeführten Verificationsreihe 1, 3, 6, 10, 15... überein.

§. 10.

Man erhält auf dieselbe Weise durch die Gleichsetzung der gleichnamigen Coefficienten in dem Producte der vier Functionsreihen in §. 6., für die vierte Potenz, die Entwicklung:

$$(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots)^4 =$$

$$a_1^4 + 4a_1^3 a_2 x + \left.\begin{matrix} 4a_1^3 a_3 \\ 6a_1^2 a_2^2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 4a_1^3 a_4 \\ 12a_1^2 a_2 a_3 \\ 4a_1 a_2^3 \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots$$

bei welcher ebenfalls wieder die in den beiden vorhergehenden Paragraphen angedeuteten Gesetze ausgesprochen

sind, und zur Fortsetzung der Entwicklung, oder unabhängigen Bildung eines jeden beliebigen Gliedes benützt werden können. Es gibt nämlich wieder die jedem Gliede zukommende Summenzahl der Zeiger, die hier wie in §. 6. im n^{ten} Gliede $n + 3$ beträgt, so oft als möglich und ohne Wiederholung in vier Theile zerlegt, die nöthigen Zeiger für a, während die entsprechenden Permutationszahlen die den betreffenden Partialproducten zukommenden Zahlen-Coefficienten liefern. So wird z. B der sechste Coefficient dieser Potenz gebildet, indem man die Zahl

$$6 + 4 - 1 = 9,$$

so oft als es ohne Wiederholung möglich ist, in vier Theile zerlegt, wodurch man erhält:

6111, 5211, 4311, 4221, 3321, 3222,

zu jeder dieser Complexionen die entsprechenden Permutationszahlen sucht, welche der Reihe nach sind:

4, 12, 12, 12, 12, 4

(deren Summe 56, sofort mit dem sechsten Gliede der im §. 6. angeführten Verificationsreihe 1, 4, 10, 20, 35, 56.. gehörig übereinstimmt), und daher für diesen sechsten Coefficienten den Ausdruck hat:

$$4a_1^3 a_6 + 12 a_1^2 a_2 a_5 + 12 a_1^2 a_3 a_4 + 12 a_1 a_2^2 a_4 + 12 a_1 a_2 a_3^2 + 4 a_2^3 a_3.$$

Es kann nunmehr ohne Schwierigkeit jede folgende Potenz, sowohl der Reihe nach, als auch, was durchaus keinen Unterschied macht, ein beliebiges Glied davon a u ſ s e r der Reihe entwickelt werden. Um allgemein das p^{te} Glied der n^{ten} Potenz zu finden, wird man die Summenzahl $n + p - 1$ so oft es angeht und ohne Wiederholung in n Theile zerlegen, zu jeder der entstehenden Complexionen oder Combinationen die entsprechenden Permutationszahlen suchen, und endlich aus diesen gefundenen Elementen den p^{ten} Coefficienten so zusammensetzen, wie wir dieses bereits an mehreren Beispielen gezeigt haben und noch an einigen anderen erläutern werden.

Dafs übrigens diese ausgesprochenen Gesetze für jeden, auch noch so grofsen, Exponenten Giltigkeit haben, wird im nachstehenden Paragraphe gezeigt werden.

§. 11.

Bildet man nach den nämlichen, in den drei letzten Paragraphen aufgefundenen, Gesetzen allgemein die n^{te} Potenz des Polynoms oder der Functionsreihe, indem man nach und nach die Zahlen (als Summen der Zeiger) n, $n+1$, $n+2\ldots$ so oft als möglich in n Theile, ohne Wiederholung, zerlegt, bei jeder der entstehenden Complexionen die entsprechenden Permutationszahlen anzeigt, und aus diesen Elementen wie oben die Coefficienten zusammensetzt; so erhält man

$$I.\quad (A_1 + A_2x + A_3x^2 + \ldots)^n = A_1^n + nA_1^{n-1}A_2x$$
$$+ \left[nA_1^{n-1}A_3 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}A_1^{n-2}A_2^2\right]x^2$$
$$+ \left[nA_1^{n-1}A_4 + n(n-1)A_1^{n-2}A_2A_3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}A_1^{n-3}A_2^3\right]x^3$$
$$+ \left[nA_1^{n-1}A_5 + n(n-1)A_1^{n-2}A_2A_4 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}A_1^{n-2}A_3^2\right.$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}A_1^{n-3}A_2^2A_3$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}A_1^{n-4}A_2^4\right]x^4 + \ldots.$$

Um aber zu beweisen, dafs diese Entwicklung, α) für jeden ganzen positiven, β) für jeden ganzen negativen, und endlich γ) für jeden sowohl positiven als negativen gebrochenen Exponenten gelte und richtig sey; kann man auf folgende Art verfahren.

α) Multiplicirt man beide Theile der vorigen Gleichung I. noch mit dem Polynom $A_1 + A_2x + A_3x^2 + \ldots$, so erhält man, wenn im zweiten Theile wieder alles nach Potenzen von x geordnet und gehörig reducirt wird:

$$(A_1 + A_2x + A_3x^2 + \ldots)^{n+1} = A_1^{n+1} + (n+1)A_1^nA_2x$$
$$+ \left[(n+1)A_1^nA_3 + \frac{(n+1)n}{1\,.\,2}A_1^{n-1}A_2^2\right]x^2 + \ldots$$

nämlich genau dieselbe Entwicklung, welche aus jener *I.* hervorgeht, wenn man statt n, $n+1$ setzt: Gilt also das in *I.* ausgesprochene Gesetz für irgend eine ganze positive Zahl von n, so gilt dieses auch noch für die nächstfolgende Zahl $n+1$; nun ist dieses Gesetz für $n=2$, 3, erwiesen, d. i. es gilt für $n=3$, folglich auch für $n+1=4$, und da es für $n=4$ gilt, so muſs es also wieder für $n+1=5$, also kurz, für jeden ganzen positiven Exponenten n gelten.

β) Es ist

$$(A_1+A_2x+A_3x^2+\ldots)^{-n}$$

$$=\frac{1}{(A_1+A_2x+A_3x^2+\ldots)^n}=\frac{1}{B_1+B_2x+B_3x^2+\ldots}\ldots(p$$

wenn man nämlich, der Kürze wegen, die Coefficienten der Entwicklung *I.* mit B_1, B_2, $B_3\ldots$ bezeichnet, d. i.

$$A_1^n=B_1,\ nA_1^{n-1}A_2=B_2,\ nA_1^{n-1}A_3+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}A_1^{n-2}A_2^2=B_3$$

u. s. w. setzt.

Um den Quotienten des letzten Bruches in (p auf eine bequemere Weise, als durch die gewöhnliche Division zu erhalten, wollen wir (§. 3., (c))

$$q)\ \ldots\ \frac{1}{B_1+B_2x+B_3x^2\ldots}=\mathfrak{T}_1+\mathfrak{T}_2x+\mathfrak{T}_3x^2+\ldots$$

setzen, wobei $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3\ldots$ die noch unbestimmten und zu suchenden Coefficienten bezeichnen. Multiplicirt man diese Gleichung mit dem Nenner des Bruches, so entsteht (§. 4.)

$$1=\mathfrak{T}_1B_1+\left.\begin{matrix}\mathfrak{T}_2B_1\\ \mathfrak{T}_1B_2\end{matrix}\right\}x+\left.\begin{matrix}\mathfrak{T}_3B_1\\ \mathfrak{T}_2B_2\\ \mathfrak{T}_1B_3\end{matrix}\right\}x^2+\ldots$$

und da die Coefficienten $\mathfrak{T}_2B_1+\mathfrak{T}_1B_2$, $\mathfrak{T}_3B_1+\ldots$ von x gänzlich unabhängig sind, so hat man nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten (§. 2.):

$$\mathfrak{T}_1B_1=1,\ \mathfrak{T}_2B_1+\mathfrak{T}_1B_2=0,\ \mathfrak{T}_3B_1+\mathfrak{T}_2B_2+\mathfrak{T}_1B_3=0$$

u. s. w.

Es folgt aber aus diesen letztern Relationen, wenn man zugleich für B_1, B_2, $B_3\ldots$ die obigen Werthe setzt:

$$\mathfrak{T}_1 = \frac{1}{B_1} = \frac{1}{A_1^n} = A_1^{-n};$$

$$\mathfrak{T}_2 = -\frac{\mathfrak{T}_1 B_2}{B_1} = -\frac{A_1^{-n}\, n A_1^{n-1} A_2}{A_1^n} = -n A_1^{-n-1} A_2;$$

$$A_1^n \mathfrak{T}_3 = -\mathfrak{T}_2 B_2 - \mathfrak{T}_1 B_3$$

$$= n A_1^{-n-1} A_2 n A_1^{n-1} A_2 - A_1^{-n}\left(n A_1^{n-1} A_3 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} A_1^{n-2} A_2^2\right),$$

oder $\mathfrak{T}_3 = -n A_1^{-n-1} A_3 - \frac{n(-n-1)}{1\,.\,2} A_1^{-n-2} A_2^2$

u. s. w.

Man erhält also, wenn man diese für $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$... gefundenen Werthe in die obige Gleichung *q*) substituirt, und zugleich auf jene (*p* zurückgeht:

$$(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots)^{-n} = A_1^{-n} - n A_1^{-n-1} A_2 x$$
$$+ \left[-n A_1^{-n-1} A_3 - \frac{n(-n-1)}{1\,.\,2} A_1^{-n-2} A_2^2\right] x^2 + \ldots$$

eine Entwicklung, welche auch unmittelbar aus der ursprünglichen *I.* folgt, wenn man in diese statt n, $-n$ setzt: es gilt daher diese genannte Entwicklung *I.* auch für negative ganze Exponenten *).

γ) Man setze (§. 3., *d*))

$$(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots)^{\frac{n}{m}} = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 x + \mathfrak{T}_3 x^2 \ldots \text{(r}$$

wobei wieder $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ die zu bestimmenden Coefficienten sind; so erhält man, wenn beide Theile der Gleichung zur m^{ten} Potenz erhoben werden:

$$(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots)^n = (\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 x + \mathfrak{T}_3 x^2 + \ldots)^m.$$

und da n und m ganze (positive oder negative) Exponenten sind, auch (nach *I.*)

*) Wir machen hier darauf aufmerksam, daſs dieser Beweis rein auf die unveränderlichen Gesetze der Division gegründet ist, indem das erhaltene Resultat nichts anderes, als der Quotient aus der Einheit und der Entwicklung der $+ n^{ten}$ Potenz des Polynoms ist; nur um der Bequemlichkeit willen ist der Satz der unbestimmten Coefficienten dabei angewendet worden.

$$A_1^n + nA_1^{n-1}A_2x + \left.\begin{matrix} nA_1^{n-1}A_3 \\ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}A_1^{n-2}A_2^2 \end{matrix}\right\} x^2 + \ldots$$

$$= \mathfrak{T}_1^m + m\mathfrak{T}_1^{m-1}\mathfrak{T}_2x + \left.\begin{matrix} m\mathfrak{T}_1^{m-1}\mathfrak{T}_3 \\ \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\mathfrak{T}_1^{m-2}\mathfrak{T}_2^2 \end{matrix}\right\} x^2 + \ldots .$$

Diese Entwicklung oder Gleichung besteht aber für jeden Werth von x, mithin hat man wieder nach dem Satze in §. 2., da die Coefficienten von x unabhängig sind:

$$A_1^n = \mathfrak{T}_1^m, \quad \text{also} \quad \mathfrak{T}_1 = A_1^{\frac{n}{m}};$$

$$nA_1^{n-1}A_2 = m\mathfrak{T}_1^{m-1}\mathfrak{T}_2, \quad \text{daraus}$$

$$\mathfrak{T}_2 = \frac{n}{m}A_1^{n-1}A_2 : A_1^{n-\frac{n}{m}} = \frac{n}{m}A_1^{\frac{n}{m}-1}A_2;$$

$$nA_1^{n-1}A_3 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}A_1^{n-2}A_2^2 = m\mathfrak{T}_1^{m-1}\mathfrak{T}_3 + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\mathfrak{T}_1^{m-2}\mathfrak{T}_2^2,$$

daraus

$$mA_1^{n-\frac{n}{m}}\mathfrak{T}_3 = nA_1^{n-1}A_3 + \left[\frac{n(n-1)}{1\,.\,2} - \frac{n^2(m-1)}{1\,.\,2\,.\,m}\right]A_1^{n-2}A_2^2,$$

$$\text{oder} \quad \mathfrak{T}_3 = \frac{n}{m}A_1^{\frac{n}{m}-1}A_3 + \frac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)}{1\,.\,2}A_1^{\frac{n}{m}-2}A_2^2$$

u. s. w,

Diese Werthe, in die obige Gleichung r) substituirt, geben endlich:

$$(A_1 + A_2x + A_3x^2 + \ldots)^{\frac{n}{m}} = A_1^{\frac{n}{m}} + \frac{n}{m}A_1^{\frac{n}{m}-1}A_2x$$

$$+ \left[\frac{n}{m}A_1^{\frac{n}{m}-1}A_3 + \frac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)}{1\,.\,2}A_1^{\frac{n}{m}-2}A_2^2\right]x^2 + \ldots$$

offenbar dieselbe Entwicklung, welche man auch aus *I.* unmittelbar durch die Substitution von $\frac{n}{m}$ statt n erhalten würde. Da ferner der Gang dieser Entwicklung vermöge β) die Annahme gestattet, daſs n oder m negativ sey, so folgt, daſs die mehr erwähnte Entwicklung *I.* ebenfalls sowohl für positive, als auch für negative Bruchexponenten gelte.

Anmerk. 1. Nach der Methode, welche man anwendet, um zu zeigen, dafs alle für rationale Gröfsen abgeleiteten Rechnungsoperationen auch für irrationale Gröfsen gelten, kann man noch zeigen, dafs die Entwicklung *I.*, welche unter dem Namen des polynomischen Lehrsatzes bekannt ist, auch für irrationale Exponenten gelte.

Anmerk. 2. Ist die Anzahl der Glieder in dem Polynom $A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots$ begrenzt, und ist z. B. $A_m x^{m-1}$ das letzte Glied derselben; so besteht auch für einen ganzen positiven Exponenten n die Entwicklung *I.* aus einer endlichen Zahl von Gliedern, und schliefst, wie es aus der Natur der Zerlegungen nach bestimmten Summen hervorgeht, mit dem $nm - n + 1^{ten}$ Gliede, welchem die $nm - n = n(m-1)^{te}$ Potenz von x entspricht*), folglich mit dem Glied $A_m^n x^{nm-n}$ **).

Anmerk. 3. Die obige Entwicklung *I.* zeigt auch, dafs der Coefficient irgend eines Gliedes, z. B. des Gliedes welches x^m hat, aus allen Theilen oder Partialproducten besteht, die durch $K\, A_1^p A_2^q A_3^r A_4^s \ldots$ ausgedrückt werden können, wobei $p + q + r + s + \ldots = n$, ferner $q + 2r + 3s + \ldots = m$ ist, und endlich der Coefficient K den numerischen Werth

$$K = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p)\,(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots q)\,(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r) \ldots}$$

hat.

Anmerk. 4. Setzt man, um in der Entwicklung *I.* jeden folgenden Coefficienten durch seine vorhergehenden auszudrücken

$$(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots)^n = B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + B_4 x^3 + \ldots$$

so findet man ganz einfach:

$$B_1 = A_1^n; \quad B_2 = \frac{n A_2 B_1}{A_1}; \quad B_3 = \frac{(n-1) A_2 B_2 + 2n A_3 B_1}{2 A_1}$$

*) Es beträgt nämlich nach den obigen Gesetzen in der n^{ten} Potenz, die Summe der Zeiger im $nm - n + 1^{ten}$ Gliede $nm - n + 1 + n - 1 = nm$ Einheiten, welche Summe in n Theile zerlegt, die einzige hier brauchbare Complexion $mmm \ldots m$, d. i. n Mal m gibt, weil alle übrigen Elemente enthalten, die gröfser als m sind, welche sofort, da m der höchste vorkommende Zeiger ist, wegfallen. Für die folgenden Glieder aber kommt gar keine brauchbare Complexion mehr zum Vorscheine, folglich bricht die Reihe mit dem erwähnten $nm - n + 1^{ten}$ Gliede ab.

**) Um das Polynom $az^r + bz^{r+s} + cz^{r+2s} \ldots$ auf die n^{te} Potenz zu erheben, wird man dieses wieder zuerst, nach dem in §. 7. Anmerk. angegebenen Verfahren, auf die der Entwicklung *I.* zum Grunde liegenden Form bringen, und dann diese Entwicklung darauf anwenden.

$$B_4 = \frac{(n-2)A_2B_3 + (2n-1)A_3B_2 + 3nA_4B_1}{3A_1}$$

$$B_5 = \frac{(n-3)A_2B_4 + (2n-2)A_3B_3 + (3n-1)A_4B_2 + 4nA_5B_1}{4A_1}$$

und so nach diesem leicht zu übersehenden Gesetze weiter.

§. 12.

Wir wollen das Vorhergehende noch durch einige Beispiele erläutern.

Beispiel 1.

Die Function oder viertheilige Gröſse

$$1 - 3x + 2x^2 - 4x^3$$

zur fünften Potenz zu erheben.

Auflösung.

Setzt man in der allgemeinen Entwicklung *I.* des vorigen Paragraphes $A_1 = 1$, $A_2 = -3$, $A_3 = 2$, $A_4 = -4$, $A_5 = A_6 = \ldots = 0$ und $n = 5$, oder bestimmt man davon unabhängig nach den in den §§. 8. bis 10. angegebenen Gesetzen sogleich für die fünfte Potenz die einzelnen Glieder; so findet man nach gehöriger Substitution und Reduction:

$$(1 - 3x + 2x^2 - 4x^3)^5 = 1 - 15x + 100x^2 - 410x^3 + 1225x^4 - 2923x^5 + 5730x^6 - 9120x^7 + 13280x^8 - 15920x^9 + 16352x^{10} - 14400x^{11} + 10240x^{12} - 6400x^{13} + 2560x^{14} - 1024x^{15}.$$

Beispiel 2.

Von der Entwicklung $(1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + x^8)^4$ das siebente Glied zu bestimmen.

Auflösung.

Unabhängig von der allgemeinen Entwicklung *I.* (vorig. Parag.), hat man im siebenten Gliede der vierten Potenz zur Summe der Zeiger die Zahl $7 + 4 - 1 = 10$, welche sofort so oft als möglich und ohne Wiederholung in vier Theile zerlegt, und jede der entstehenden Complexionen noch mit der zugehörigen Permutationszahl versehen wer-

den mufs. Nimmt man bei dieser Zerlegung zugleich darauf Rücksicht, dafs 5 der höchste Zeiger, also A_6, A_7... in der gegebenen Functionsreihe nicht mehr vorkommen, und daher die Complexionen, welche Zahlenelemente gröfser als 5 enthalten, wegfallen; so erhält man, wenn die Bildung der Complexionen mit den kleinsten Elementen begonnen wird, um davon keine umsonst zu machen *):

10

2233 mit 6 Perm.
1333 „ „ 4
2224 „ „ 4
1234 „ „ 24
1144 „ „ 6
1225 „ „ 12
1135 „ „ 12.

Es ist demnach der Coefficient des siebenten Gliedes aus den Theilen

$$6 A_2^2 A_3^2, \quad 4 A_1 A_3^3, \quad 4 A_2^3 A_4, \ldots 12 A_1^2 A_3 A_5$$

zusammengesetzt. Substituirt man für A_1, A_2, A_3... die Werthe 1, —2, 3... aus der gegebenen Function, so erhält man nach gehöriger, einfacher Reduction, und mit Berücksichtigung des Gesetzes in den Exponenten von x, für das verlangte siebente Glied:

$$-1208 x^{12}.$$

Beispiel 3.

Es soll von der zehnten Potenz des Polynoms

$$(a + b + c + d + e)$$

der Coefficient angegeben werden, welcher der Complexion $a^4 b^2 c^3 d$ entspricht.

Auflösung.

Da der eingeführten Bezeichnung gemäfs $a = A_1$,

*) Ueber die bequemste und sicherste Methode bei den Combinationen zu bestimmten Summen nur jene Complexionen zu bilden, welche kein eine gegebene Zahl übersteigendes Element enthalten, beim mündlichen Vortrage.

$b = A_2$, $c = A_3$, $d = A_4$, $e = A_5$ und $x = 1$ ist; so wird eigentlich der zur Complexion $A_1^4\, A_2^2\, A_3^3\, A_4$ gehörige Coefficient gesucht. Die Zeiger dieser Complexion geben aber die Combination 1111223334, welche sich 12600 Mal permutiren läfst, und diese Permutationszahl ist sofort der gesuchte Coefficient; es kommt also in der Entwicklung der zehnten Potenz des gegebenen Polynoms das Glied vor:

$$12600\, a^4 b^2 c^3 d.$$

Binomischer Lehrsatz.

§. 13.

Aus der Entwicklung *I.*, §. 11. folgt, wenn man

$$A_3 = A_4 = A_5 = \ldots = 0$$

setzt, als ein besonderer und einfacherer Fall:

$$(A_1 + A_2 x)^n = A_1^n + n A_1^{n-1} A_2 x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A_1^{n-2} A_2^2 x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A_1^{n-3} A_2^3 x^3 + \ldots$$

oder, wenn man, der gröfseren Einfachheit wegen, $A_1 = a$, $A_2 x = b$ setzt, auch

$$II.\quad (a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m} a^{n-m} b^m + \ldots$$

wobei das allgemeine Glied, welches hier in der Reihe das $m + 1^{te}$ ist, nach dem deutlich ausgesprochenen und leicht zu übersehenden Gesetze gebildet ist.

In dieser Form ist diese Reihe oder Entwicklung *II.* schon in den Elementen unter der Benennung des Newtonschen oder binomischen Lehrsatzes bekannt. Auch werden dort schon die wichtigsten Eigenschaften derselben, als 1. dafs diese Reihe für einen ganzen positiven Exponenten n abbricht und aus $n + 1$ Glieder besteht; 2. dafs in diesem Falle je zwei von den beiden äufsern gleichweit abstehende Glieder gleiche Coefficienten besitzen und dabei

die Exponenten von a und b bloſs verwechselt sind; 3. daſs die Reihe für negative oder gebrochene Exponenten ohne Ende fortläuft und nicht abbricht, erwiesen.

Der Wichtigkeit wegen, welche diesen erwähnten Gesetzen zukommt, wollen wir sie in Kürze entwickeln.

§. 14.

Die Bildung der Binomialcoefficienten

$$n, \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \ldots$$

der vorigen Entwicklung *II.*, die wir, der Kürze wegen, in der Folge öfter, der Reihe nach, durch

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \binom{n}{4} \text{ u. s. w.}$$

bezeichnen werden, zeigt offenbar, daſs das Abbrechen der genannten Reihe bloſs von dem Nullwerden eines der Schluſsfactoren $(n-1)$, $(n-2) \ldots (n-m+1) \ldots$ abhängt. Setzt man demnach den Schluſsfactor des allgemeinen, oder $(m+1)^{ten}$ Gliedes gleich Null, wodurch dieses $m+1^{te}$ nebst allen folgenden Gliedern (was aus der Bildung der Coefficienten selbst folgt) verschwindet; so hat man als Bedingungsgleichung für das Abbrechen der Reihe:

$$n - m + 1 = 0$$

eine Gleichung, welche, da m der Natur der Sache nach weder negativ noch gebrochen seyn kann, nur für ganze positive Werthe von n besteht: es kann daher die mehr erwähnte Reihe oder Entwicklung *II.* nur für ganze positive Exponenten n abbrechen.

Für solche Werthe von n aber, folgt aus der vorigen Gleichung, da, wie wir bemerkt haben, das $m+1^{te}$ das erste verschwindende Glied ist:

$$m + 1 = n + 2;$$

woraus hervorgeht, daſs die Reihe mit dem $n+1^{ten}$ Gliede abbricht (vergl. §. 11., Anmerk. 2, wo $m=2$ zu setzen ist).

Um noch die zweite erwähnte Eigenschaft zu erweisen, wollen wir mit Hilfe des allgemeinen Gliedes zwei

Glieder bestimmen, von denen das eine das $p+1^{te}$ vom ersten, das andere das $p+1^{te}$ vom letzten herein gezählt seyn soll.

Das erstere dieser beiden Glieder erhält man unmittelbar aus dem allgemeinen (oder $m+1^{ten}$) Gliede des vorigen Paragraphes, wenn man $m=p$ setzt; dieses ist also:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots p}a^{n-p}b^{p}\ldots(\alpha$$

Um das zweite dieser beiden Glieder zu erhalten, welches vom letzten oder $(n+1)^{ten}$ Gliede nach vorne gezählt, das $p+1^{te}$ ist, bemerke man, dafs diesem Gliede, von vorne oder vom ersten Gliede der Reihe an gezählt, der Index $(n+1)-(p+1)+1=n-p+1$ zukommt, und dafs man daher in dem erwähnten allgemeinen oder $m+1^{ten}$ Gliede nur $m=n-p$ setzen darf, um dieses zu finden. Diese Substitution gibt:

$$\frac{n(n-1)\ldots\ldots(p+2)(p+1)}{1.2\ldots(n-p-1)(n-p)}a^{p}b^{n-p};$$

da aber immer $p<n$ ist, so kann der Coefficient dieses Gliedes auch unter der Form dargestellt werden:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\ldots(p+2)(p+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots p(p+1)(p+2)\ldots(n-p-1)(n-p)}$$

welcher sich endlich, wenn man die gleichen Factoren aufhebt, auf

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots p}$$

reducirt, und also mit jenem in α) identisch ist. Da dieser noch mit $a^{p}b^{n-p}$ verbunden ist, so erhellet die Richtigkeit der obigen Aussage (vorig. Parag. 2. Eigensch.).

Anmerk. Um auch die Reihe *II.*, was bei wirklichen Rechnungen bequem ist, so darzustellen, dafs immer das folgende Glied durch die vorhergehenden ausgedrückt erscheint; darf man nur, um das allgemeine Gesetz für diese Darstellung zu erhalten, zwei allgemeine auf einander folgende Glieder, z. B. A_m und A_{m+1} durcheinander dividiren. Man erhält aus dem angegebenen allgemeinen $(m+1)^{ten}$ Gliede ganz einfach

$$\frac{A_{m+1}}{A_m}=\frac{(n-m+1)}{m}\frac{b}{a},\ \text{also}\ A_{m+1}=\frac{(n-m+1)}{m}A_m\frac{b}{a}.$$

Die Reihe *II.* erhält daher auch die Form:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} A_1 \frac{b}{a} + \frac{(n-1)}{2} A_2 \frac{b}{a} + \frac{(n-2)}{3} A_3 \frac{b}{a} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(n-m+1)}{m} A_m \frac{b}{a} + \ldots,$$

wobei

$$a^n = A_1, \quad \frac{n}{1} A_1 \frac{b}{a} = A_2, \quad \frac{(n-1)}{2} A_2 \frac{b}{a} = A_3 \text{ u. s. w. ist.}$$

§. 15.

Da die verschiedenen Reihen, welche sich aus dem binomischen Lehrsatze für die Ausziehung der Wurzeln aus Zahlen herleiten lassen, schon in den Elementen entwickelt werden; so wollen wir hier nicht weiter darauf zurückkommen, dafür aber eine Entwicklung hersetzen, welche nicht blofs ein an und für sich merkwürdiges, sondern auch für die Folge ein höchst brauchbares Ergebnifs liefert.

Nach der im §. 13. erwähnten, und im §. 14. erwiesenen ersten Eigenschaft, hat man für einen ganzen positiven Exponenten n, der bei dieser Entwicklung vorausgesetzt wird:

1) $$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} a^{n-2} b^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} a^2 b^{n-2} + n a b^{n-1} + b^n,$$

oder, wenn die Glieder paarweise zusammengenommen werden, auch

2) $$(a+b)^n = (a^n + b^n) + nab(a^{n-2} + b^{n-2})$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} a^2 b^2 (a^{n-4} + b^{n-4})$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} a^3 b^3 (a^{n-6} + b^{n-6}) + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\ldots\ldots\ldots m} a^m b^m (a^{n-2m} + b^{n-2m}) + \ldots$$

Um das letzte Glied dieser Reihe 2) zu bestimmen, mufs man die beiden Fälle, in welchen n gerade oder ungerade ist, unterscheiden. Im ersten Falle ist die Anzahl der Glieder der Reihe 1) ungerade, und es hat das mittlere Glied derselben, welches das letzte der Reihe 2)

bildet, den Zeiger $\frac{n}{2}+1$; dieses wird demnach aus dem allgemeinen, oder $m+1^{ten}$ Gliede erhalten, wenn man darin

$$m+1=\frac{n}{2}+1, \quad \text{also} \quad m=\frac{n}{2}$$

setzt, und das entstehende Resultat noch halbirt, weil das mittlere Glied der Reihe 1) in dieser Reihe 2) mit sich selbst addirt erscheint. Man erhält demnach als letztes Glied, für n gerade:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots \frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}.$$

Im zweiten Falle enthält die Reihe 1) eine gerade Anzahl Glieder, von denen das mittlere Paar, aus welchem das letzte Glied der Reihe 2) besteht, den Zeiger $\frac{n+1}{2}$ hat; setzt man daher in das allgemeine oder $m+1^{te}$ Glied

$$m+1=\frac{n+1}{2} \quad \text{oder} \quad m=\frac{n-1}{2},$$

so erhält man als letztes Glied, für n ungerade:

$$\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)} a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} (a+b).$$

Diefs vorausgesetzt, wollen wir $a+b=y$ setzen, und in der Reihe 2) nach und nach die Binome

$$\ldots (a^{n-6}+b^{n-6}), \quad (a^{n-4}+b^{n-4}) \text{ u. s. w.}$$

durch y auszudrücken suchen, um endlich einen Ausdruck für a^n+b^n durch y zu erhalten. Dazu wird man in dieser Entwicklung bei irgend einem dieser Binome, z. B. um nur kurz den Gang zu zeigen, bei jenem $a^{n-6}+b^{n-6}$ stehen bleiben, und sofort diese genannten Binome von rückwärts angefangen bestimmen, indem man in der Reihe 2) nach und nach für n: $n-6$, $n-4$, $n-2$ setzt.

Für $n-6$ statt n, hat man

$$a) \quad y^{n-6}=(a^{n-6}+b^{n-6}),$$

nämlich nur das einzige Glied, indem das folgende schon mit dem Binome $(a^{n-8} + b^{n-8})$ verbunden ist, auf welches wir, der gemachten Bemerkung gemäfs, die Entwicklung nicht erstrecken wollen.

Statt n, $n-4$ gesetzt, gibt ferner

$$y^{n-4} = (a^{n-4} + b^{n-4}) + (n-4)\,ab\,(a^{n-6} + b^{n-6});$$

daraus folgt, wenn man den in α) gefundenen Werth sogleich substituirt:

$$\beta)\quad (a^{n-4} + b^{n-4}) = y^{n-4} - (n-4)\,ab\,y^{n-6}.$$

Die Substitution von $n-2$ statt n (in 2)) gibt:

$$y^{n-2} = (a^{n-2} + b^{n-2}) + (n-2)\,ab\,(a^{n-4} + b^{n-4}) + \frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}a^2 b^2 (a^{n-6} + b^{n-6}),$$

und daraus folgt, wenn man die Werthe aus α) und β) substituirt:

$$a^{n-2} + b^{n-2} = y^{n-2} - (n-2)\,ab\,[y^{n-4} - (n-4)\,ab\,y^{n-6}] - \frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}a^2 b^2 y^{n-6},$$

oder nach einer leichten Reduction:

$$\gamma)\quad (a^{n-2} + b^{n-2}) = y^{n-2} - (n-2)\,ab\,y^{n-4} + \frac{(n-2)(n-5)}{1\,.\,2}a^2 b^2 y^{n-6}.$$

(n-3)

Endlich hat man für n selbst, wenn man sogleich die bisher gefundenen Werthe für die Binome substituirt:

$$y^n = (a^n + b^n)$$
$$+ nab\left[y^{n-2} - (n-2)\,ab\,y^{n-4} + \frac{(n-2)(n-5)}{1\,.\,2}a^2 b^2 y^{n-6}\right]$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a^2 b^2 [y^{n-4} - (n-4)\,ab\,y^{n-6}]$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3 b^3 y^{n-6},$$

und daraus, nach einigen einfachen Reductionen:

$$a^n + b^n = y^n - nab\,y^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\,.\,2}a^2 b^2 y^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3 b^3 y^{n-6}$$

eine Entwicklung, welche bis zur $n-6^{ten}$ Potenz von y richtig ist, so, daſs die bisher erhaltenen vier Glieder nicht gestört oder verändert werden, wenn man die Rechnung auf eine gröſsere Zahl von Gliedern ausdehnt.

Da aus diesen wenigen Gliedern noch nicht mit Sicherheit auf das Gesetz der Coefficienten geschlossen werden kann, so ist es gut, bei der obigen Entwicklung anstatt bis $a^{n-6} + b^{n-6}$, bis zu dem Binome $a^{n-10} + b^{n-10}$ zu gehen. Man erhält dann genau auf dieselbe Weise *)

$$III.\quad a^n + b^n = y^n - n\,a\,b\,y^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\,.\,2}\,a^2 b^2 y^{n-4}$$
$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^3 b^3 y^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,a^4 b^4 y^{n-8}$$
$$- \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,a^5 b^5 y^{n-10} + \ldots$$

allgemeines Glied:

$$(-1)^m\,\frac{n(n-m-1)(n-m-2)\ldots(n-2m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots\ldots m}\,a^m b^m y^{n-2m}.$$

Aus diesem allgemeinen $(m+1^{ten})$ Gliede findet man auch leicht, wenn man die letzten Glieder der vorigen Reihe 2) dabei berücksichtiget, nach gehöriger Reduction der entstehenden Bruch-Coefficienten

das letzte Glied, wenn n gerade ist: $\pm\, 2a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$,

» » » » n ungerade ist: $\pm\, n a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} y$.

Dabei gilt in beiden Fällen von den doppelten Zeichen das obere oder untere, je nachdem im ersten Falle $\frac{n}{2}$, und im zweiten $\frac{n-1}{2}$ gerade oder ungerade ist.

Diese Reihe *III.*, in welcher sofort $y = a + b$ ist, darf daher nur für jeden gegebenen (ganzen, positiven) Werth von n so weit fortgesetzt werden, als es, ohne negative

*) Der fleiſsige Anfänger wird sehr gut thun, die Entwicklung auf diese Weise vorzunehmen, indem sie ihm zugleich eine gute Gelegenheit zu Reductionen darbietet, welche die Mühe hinlänglich lohnen.

Exponenten von y zu erhalten, möglich ist; dadurch ergibt sich das richtige Schlufsglied immer von selbst, wenn nicht etwa die Reihe, nach Beschaffenheit von n, schon früher ohnehin abbricht.

§. 16.

Die Herleitung des binomischen Lehrsatzes, als besonderer Fall, aus dem polynomischen, dessen Richtigkeit wir für jeden rationalen Exponenten erwiesen haben, führt offenbar zugleich seine allgemeine Giltigkeit, rücksichtlich rationaler Exponenten mit sich. Da wir indefs in der Folge den binomischen Satz auch für irrationale, ja selbst für imaginäre Exponenten anwenden werden; so ist es von Wichtigkeit, diesen Satz auf eine solche Weise zu entwickeln, dafs dabei nicht die geringste Beschränkung hinsichtlich der Natur und Beschaffenheit des Exponenten eintritt. Eine solche Entwicklung aber ist die folgende.

Da man jedes Binom immer auf die Form $1+x$ bringen kann, wo x eine veränderliche Gröfse bedeuten soll, so wollen wir, wenn auch y eine Variable bezeichnet, die sofort jeden Werth annehmen kann, die Gröfse $(1+x)^y$ in eine Reihe zu entwickeln suchen.

Setzt man

1) $(1+x)^y = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots$ *)

wobei A_1, A_2, $A_3 \ldots$ von x unabhängige Coefficienten bezeichnen sollen, und daher nur gewisse, noch unbestimmte Functionen vom Exponenten y seyn können.

Läfst man x um die ganz willkürliche Gröfse z zunehmen, so wird aus 1):

2) $(1+x+z)^y = 1 + A_1(x+z) + A_2(x+z)^2$
$+ A_3(x+z)^3 + \ldots + A_n(x+z)^n + \ldots$.

Die Substitution von $\frac{x}{z}$ statt x in der ersten Gleichung 1)

*) Die für ganze Werthe von y bereits bekannte Entwicklung führt zur Annahme dieser Reihe; ihre Zuläfsigkeit wird aber überhaupt aus dem Gange der weitern Entwicklung selbst hervorgehen.

gibt ferner:

$$\left(1 + \frac{x}{z}\right)^y \text{ oder}$$

$$\frac{(z+x)^y}{z^y} = 1 + A_1 \frac{x}{z} + A_2 \frac{x^2}{z^2} + A_3 \frac{x^3}{z^3} + \ldots + A_n \frac{x^n}{z^n} + \ldots$$

oder, wenn man mit z^y multiplicirt und dann noch z in $z+1$ übergehen läſst:

$$3)\ (1+z+x)^y = (1+z)^y + A_1(1+z)^{y-1}x + A_2(1+z)^{y-2}x^2 + A_3(1+z)^{y-3}x^3 + \ldots + A_n(1+z)^{y-n}x^n + \ldots.$$

Nun hat man aber nach der Gleichung 1), da A_1, $A_2 \ldots$ nur von y abhängen:

$$(1+z)^y = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots$$
$$(1+z)^{y-1} = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \ldots$$
$$(1+z)^{y-2} = 1 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(1+z)^{y-n} = 1 + N_1 z + N_2 z^2 + N_3 z^3 + \ldots.$$

Dabei erhält man offenbar B_1, B_2, $B_3 \ldots$ beziehungsweise aus A_1, A_2, $A_3 \ldots$, wenn man in diesen letztern Gröſsen (als Functionen von y) statt y, $y-1$ setzt. Eben so erhält man C_1, C_2, $C_3 \ldots$ aus A_1, A_2, $A_3 \ldots$, wenn man in diesen statt y, $y-2$ schreibt u. s. w.; allgemein werden aus diesen Gröſsen A_1, A_2, $A_3 \ldots$ dadurch, daſs man darin y in $y-n$ übergehen läſst, der Reihe nach die Coefficienten N_1, N_2, $N_3 \ldots$ erhalten.

Werden diese Werthe in die vorige Gleichung 3) substituirt, dann die beiden Gleichungen 2) und 3), welche offenbar identisch seyn müssen, einander gleich gesetzt, so entsteht, wenn man sogleich von den in der Gleichung 2) angezeigten ganzen Potenzen (die man als bekannt voraussetzen darf) der Binome die beiden ersten Glieder, welche hier hinreichend sind, entwickelt:

$$1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$
$$A_1 z + 2A_2 xz + 3A_3 x^2 z + \ldots + nA_n x^{n-1} z + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots$$
$$+ A_1 x(1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots)$$
$$+ A_2 x^2(1 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ A_{n-2} x^{n-2} (1 + L_1 z + L_2 z^2 \ldots)$$
$$+ A_{n-1} x^{n-1} (1 + M_1 z + M_2 z^2 \ldots).$$

Da nun die Coefficienten A_1, $A_2 \ldots$, B_1, $B_2 \ldots$, C_1, C_2 etc. von x und z unabhängig sind, so hat man nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten, wenn man nur jene Coefficienten vergleicht, welche zu gleichen Verbindungen von x und z gehören (da die übrigen zu identischen Gleichungen führen)

$2A_2 = A_1 B_1$, und daraus $A_2 = \frac{A_1 B_1}{1 \cdot 2}$

$3A_3 = A_2 C_1$, » » $A_3 = \frac{A_2 C_1}{3} = \frac{A_1 B_1 C_1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

.

$nA_n = A_{n-1} M_1$, » » $A_n = \frac{A_{n-1} M_1}{n}$.

Nimmt man daher an, daſs für A_{n-1} das Gesetz der beiden ersten Werthe A_2, A_3 gelte, also $A_{n-1} = \frac{A_1 B_1 C_1 \ldots L_1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}$ sey, so folgt $A_n = \frac{A_1 B_1 C_1 \ldots L_1 M_1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) n}$, welcher Coefficient nach dem nämlichen Gesetze gebildet ist, und daher die allgemeine Giltigkeit dieses Gesetzes beweist.

Es ist demnach, wenn diese für A_1, $A_2 \ldots A_n$ gefundenen Werthe in die obige Gleichung 1) substituirt werden:

$$4) \quad (1 + x)^y = 1 + A_1 x + \frac{A_1 B_1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{A_1 B_1 C_1}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{A_1 B_1 C_1 \ldots M_1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} x^n + \ldots$$

und diese Entwicklung würde, nach dem, was oben hinsichtlich der Coefficienten B_1, $C_1 \ldots M_1$ bemerkt wurde, vollständig bestimmt seyn, wenn A_1 bekannt wäre.

Um aber A_1 oder den zweiten Coefficienten dieser Entwicklung zu bestimmen, setze man (da A_1 irgend eine Function vom Exponenten y seyn muſs) $A_1 = \varphi(y)$; so ist

$$(1 + x)^y = 1 + x\varphi(y) + \ldots \quad \text{und eben so}$$
$$(1 + x)^z = 1 + x\varphi(z) + \ldots$$

so wie auch

$$(1 + x)^{y+z} = 1 + x\varphi(y + z).$$

Es ist aber auch

$$(1+x)^{y+z} = (1+x)^y (1+x)^z, \text{ folglich}$$

$$1 + x\varphi(y+z) = [1 + x\varphi(y) + \ldots][1 + x\varphi(z) + \ldots]$$
$$= 1 + x[\varphi(y) + \varphi(z)] + \ldots$$

und daher, da $\varphi(y)$, $\varphi(z)$ und $\varphi(y+z)$ von x unabhängig sind (§. 2.):

$$\varphi(y+z) = \varphi(y) + \varphi(z).$$

Aus dieser Gleichung folgt, wenn $z = y$ gesetzt wird:

$$\varphi(2y) = 2\varphi(y);$$

eben so wird für $z = 2y$

$$\varphi(3y) = 3\varphi(y),$$

und allgemein, für $z = (n-1)y$

$$\varphi(ny) = n\varphi(y),$$

oder auch, wenn man durch ny dividirt:

$$\frac{\varphi(y)}{y} = \frac{\varphi(ny)}{ny}.$$

Diese Gleichung zeigt nun, daſs $\varphi(y)$ eine solche Function von y ist, für welche der Quotient $\frac{\varphi(y)}{y}$ ungeändert bleibt, wenn man statt y irgend ein Vielfaches ny setzt: daſs also dieser Quotient irgend eine constante Gröſse seyn muſs. Man setze daher

$$\frac{\varphi(y)}{y} = A, \quad \text{d. i.} \quad \varphi(y) = Ay,$$

so hat man auch

$$(1+x)^y = 1 + Axy + \ldots.$$

Da endlich A von y unabhängig ist, so kann man zum Behufe der Bestimmung dieser constanten Gröſse, jeden Werth für y in die letzte Gleichung setzen; der einfachste Werth dazu ist $y = 1$, wofür man hat:

$$1 + x = 1 + Ax + \ldots,$$

woraus endlich, da auch A von x unabhängig ist, $A = 1$, daher $\varphi(y) = Ay = y$ folgt. Da also $A_1 = \varphi(y) = y$ wird, so hat man aus der Reihe 4, wenn man sich der Be-

schaffenheit der Coefficienten B_1, $C_1 \ldots N_1$ erinnert, für jeden Exponenten y, er mag rational oder irrational, reell oder imaginär seyn:

$$II'. \; (1+x)^y = 1 + yx + \frac{y(y-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots \text{*)}$$

welches Gesetz der Coefficienten, wie wir gesehen haben, allgemeine Giltigkeit hat. Diese Entwicklung stimmt, wie man sieht, genau mit der obigen *II.* (§. 13.) überein.

Anmerk. Mit Hilfe dieses nun für jeden Exponenten allgemein entwickelten binomischen Satzes, kann auch sehr leicht bewiesen werden, dafs die Entwicklung *I.*, §. 11., oder der polynomische Lehrsatz ebenfalls für jeden, sowohl reellen, wie auch selbst imaginären Exponenten, allgemeine Giltigkeit besitzt.

Denn bezeichnet man wieder einen solchen allgemeinen Exponenten durch y, und setzt Kürze halber

$$A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 + \ldots = B;$$

so ist nach der vorigen Reihe *II.*:

$$(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 + \ldots)^y = (A_1 + B)^y$$

$$= A_1^y + y A_1^{y-1} B + \frac{y(y-1)}{1 \cdot 2} A_1^{y-2} B^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A_1^{y-3} B^3 + \ldots$$

folglich wegen (§§. 8., 9., 10. etc., oder wenn man in der Entwicklung *I.*, §. 11., die man für ganze Exponenten als richtig voraussetzen darf, nach und nach $n = 2, 3, 4, \ldots$ setzt)

$$B = A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 + A_5 x^4 + \ldots$$
$$B^2 = A_2^2 x^2 + 2 A_2 A_3 x^3 + (2 A_2 A_4 + A_3^2) x^4 + \ldots$$
$$B^3 = A_2^3 x^3 + 3 A_2^2 A_3 x^4 + \ldots$$
$$B^4 = A_2^4 x^4 + \ldots$$

u. s. w.

wenn man diese Werthe substituirt und nach x ordnet, auch:

$$(A_1 + B)^y =$$

$$A_1^y + \binom{y}{1} A_1^{y-1} A_2 \Big\} x + \left.\begin{matrix} \binom{y}{1} A_1^{y-1} A_3 \\ \binom{y}{2} A_1^{y-2} A_2^2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} \binom{y}{1} A_1^{y-1} A_4 \\ 2\binom{y}{2} A_1^{y-2} A_2 A_3 \\ \binom{y}{3} A_1^{y-3} A_2^3 \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots$$

*) Diese Entwicklung haben wir zuerst im sechzehnten Bande der Jahrbücher des k. k. polyt. Instituts bekannt gemacht. Der zweite Theil dieser Entwicklung, die Bestimmung des zweiten Coefficienten A_1 nämlich, rührt, wenn wir nicht irren, von *Poisson* her.

es ist also, wenn man reducirt, endlich:

$$(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 + \ldots)^y = A_1^y + y A_1^{y-1} A_2 x$$
$$+ \left[y A_1^{y-1} A_3 + \frac{y(y-1)}{1 \cdot 2} A_1^{y-2} A_2^2 \right] x^2$$
$$+ \left[y A_1^{y-1} A_4 + y(y-1) A_1^{y-2} A_2 A_3 + \frac{y(y-1)(y-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A_1^{y-3} A_2^3 \right] x^3 + \ldots$$

welche Entwicklung sofort vollkommen mit jener *I.*, §. 11. übereinstimmt, nun aber für j e d e n Exponenten y als richtig anerkannt werden muſs.

Zweites Capitel.

Von den Grenzen der Functionen; dem unendlich Grofsen und unendlich Kleinen.

§. 17.

Erklärungen.

1. Nähert sich bei der fortwährenden Zu- oder Abnahme des numerischen Werthes der veränderlichen Gröfse, die von ihr abhängige Function immer mehr und mehr einer bestimmten, unveränderlichen Gröfse, und kann sie diese höchstens erreichen, keinesweges aber überschreiten; so wird diese letztere Gröfse die Grenze der Function genannt *).

So ist z. B. wenn x fortwährend wächst, a die Grenze der Function $y = a \pm \frac{b}{x}$, weil dabei der Unterschied zwischen a und y, nämlich $\pm \frac{b}{x}$, immerwährend abnimmt, also die Function y sich immer mehr und mehr dem Werthe von a nähert, ohne dafs sie diesen jemals, für das obere Zeichen, bei ihrer fortwährenden Abnahme, und für das untere Zeichen, bei ihrer steten Zunahme, überschreiten kann.

Auf gleiche Art hat die Summe der ohne Ende fort-

*) In so ferne bei der gewöhnlichen Definition der Grenzen, als wesentlich angenommen wird, dafs die Function ihre Grenze niemals erreichen, sondern sich ihr nur, so weit man will, soll nähern können; weicht die hier gegebene Erklärung, da wir diesen Umstand nur als etwas Zufälliges, oder sogar Scheinbares ansehen, von der gewöhnlichen in etwas ab, und nähert sich dabei jener allgemeineren von *Lacroix* (*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, in 4., 2. *Edit Paris* 1810) gegebenen Definition, die uns auch dem Begriffe einer Grenze angemessener scheint; obgleich es am Ende gleichgiltig ist, ob man diese oder jene Erklärung dafür aufstellt, wenn man dann nur strenge dabei stehen bleibt.

laufenden Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$, d. i. $1 - \frac{1}{2^x}$ die Einheit zur Grenze.

Eben so haben die Perimeter und Flächen der einem Kreise ein- und umgeschriebenen regulären Polygone, diese als Functionen der immerfort wachsenden Seitenzahl angesehen, den Umfang und die Fläche dieses Kreises zur Grenze.

Anmerk. Diese angeführten Beispiele sind zugleich Beispiele von Functionen, welche ihre Grenzen für keinen endlichen Werth der Variablen je vollkommen erreichen; sie können sich diesen aber, so weit man nur immer will, nähern.

Ferner ist z B. bei der immerwährenden Abnahme von x, 1 die Grenze der Function $y = \frac{a}{a \pm x}$, indem sich auch hier der Werth von y, für das obere Zeichen, bei der fortwährenden Zunahme, und für das untere Zeichen, bei der immerwährenden Abnahme, dem Werthe von $\frac{a}{a} = 1$ immer mehr nähert, diesen selbst für $x = 0$ erreicht, aber keinesweges überschreiten kann, indem auch der absolute oder numerische Werth von x keiner weiteren Abnahme mehr fähig ist.

2. Von einer wachsenden Gröfse, deren numerischer Werth ins Unbestimmte, über alle Grenzen hinaus zunimmt, und also gröfser werden kann, als jede angebbare noch so grofse Zahl, sagt man, sie werde unendlich, oder ihre Grenze, die man dann durch ∞ bezeichnet, sey das unendlich Grofse *).

Um kurz anzuzeigen, dafs die Gröfse u bei ihrer fortwährenden Zunahme bereits jeden angebbaren, noch so

*) Diefs ist nur eine kurze Art zu reden; denn eine Grenze, welche unendlich weit liegt, ist offenbar keine oder nur eine fingirte Grenze. Und gerade darin liegt die Eigenschaft des Unendlichen, dafs es keine Grenzen hat; wir können daher auch nur eine, wenn man so sagen darf, negative Vorstellung vom Unendlichen haben.

grofsen, Werth überschritten hat, setzen wir $u = \infty$ und sagen, u sey unendlich grofs geworden *).

Soll z. B. in der ohne Ende fortlaufenden Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5... der Werth u eines der spätesten Glieder angegeben werden, so wird man offenbar dafür $u = \infty$ setzen müssen.

Anmerk. Eine Gröfse kann beständig zunehmen, und dennoch an eine bestimmte oder endliche Grenze gebunden seyn, d. h. ohne Ende zunehmen, ohne defshalb unendlich zu werden; so wächst im obigen Beispiele bei einer fortwährenden Zunahme von x die Function $y = a - \frac{b}{x}$ ohne Ende, und dennoch kann diese niemals gröfser, als die endliche Gröfse a werden, welches ihre Grenze ist. Man mufs daher ein Wachsen ohne Ende, von einem Wachsen bis ins Unendliche unterscheiden.

3. Von einer Gröfse, deren numerischer Werth ins Unbestimmte abnimmt, und kleiner werden kann, als jede noch so kleine angebbare Zahl, sagt man, sie werde unendlich klein, oder sie habe die Nulle zur Grenze.

Bezeichnet a irgend eine endliche, und u eine Gröfse welche unendlich wächst, so kann jede unendlich klein werdende Gröfse durch $w = \frac{a}{u}$ ausgedrückt werden. Durch diese Bezeichnung, in welcher man der Einfachheit wegen auch oft $a = 1$ setzt, wird die genannte Gröfse offenbar

*) Wenn man gewöhnlich annimmt, dafs eine zunehmende Gröfse nur unendlich werden, keineswegs aber unendlich seyn kann; so verhält es sich damit, unserer Ansicht nach, gerade eben so, wie mit einer abnehmenden Gröfse, welche streng genommen wohl Null werden, aber nicht Null seyn kann, weil sie in demselben Augenblicke, als sie verschwindet, zu seyn aufhört, und alle Eigenschaften einer Gröfse verloren hat. Nichtsdestoweniger ist es aber z. B. erlaubt zu sagen, die Cotangente eines Winkels $= \frac{\pi}{2}$ ist Null, und es fällt wohl Niemanden ein, in diesem Ausdrucke etwas Unrichtiges zu suchen, oder zu fürchten, dafs damit ein falscher Begriff verbunden werde. Eben so richtig scheint es uns nun zu seyn, wenn man sagt, die trigonometrische Tangente eines Winkels von der Gröfse $\frac{\pi}{2}$ ist Unendlich.

noch im Zustande des Abnehmens betrachtet; stellt man sich diese dagegen, als ihr Ziel oder ihre Grenze bereits erreicht vor, so wird man sie durch $\frac{a}{\infty} = 0$ bezeichnen müssen.

So sind z.B. in der unendlichen Reihe

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \ldots$$

die letzten oder spätesten Glieder unendlich klein, und von Null nicht mehr verschieden.

Anmerk. 1. Eine Gröfse kann ebenfalls ohne Ende abnehmen, ohne dafs sie defshalb unendlich klein wird, d. i. dabei doch an eine von der Nulle verschiedene Grenze gebunden seyn. So nimmt in dem oben in 1. angeführten Beispiele die Function $y = a + \frac{b}{x}$ bei der angenommenen unendlichen Zunahme von x, ohne Ende ab, ohne dabei jemals kleiner als ihre Grenze a werden zu können. Eben so nimmt der Umfang eines um einen Kreis beschriebenen regulären Polygons, wenn die Seitenzahl unendlich wächst, ohne Ende ab, diese kann aber offenbar niemals kleiner als die Kreisperipherie werden.

Anmerk. 2. Analog mit der hier für die unendlich klein werdenden Gröfsen w gewählten Bezeichnung, läfst sich offenbar eine unendlich grofs werdende Gröfse auch durch $u = \frac{a}{w}$ ausdrücken, wobei a wieder eine endliche Gröfse bezeichnet; so bald w ihre Grenze Null im Abnehmen erreicht hat, so hat auch die Gröfse u die ihrige im Zunehmen erreicht, und es ist $\infty = \frac{a}{0}$. Beide diese Gleichungen folgen auch nach den bekannten arithmetischen Regeln aus den beiden obigen $w = \frac{a}{u}$ und $0 = \frac{a}{\infty}$, wenn man u, w, ∞ und 0 wie gewöhnliche Gröfsen behandelt (wobei aber immer die gröfste Vorsicht nöthig ist).

Da bei der unendlichen Zunahme von u, nichts destoweniger das geometrische Verhältnifs $u : u^2$ ungeändert jenem von $1 : u$ gleich bleibt; so wird auch, wie u gegen 1, so u^2 gegen u unendlich grofs, und es ist für $u = \infty$, ∞^2 gegen ∞ selbst wieder unendlich. Man nennt defswegen ∞^2 das unendlich Grofse der zweiten Ordnung, wäh-

rend jenes erstere, d. i. ∞, das Unendliche der ersten Ordnung heifst. Aus demselben Grunde werden ∞^3, ∞^4 ... ∞^n unendlich Grofse der dritten, vierten ... n^{ten} Ordnung genannt.

Anmerk. Obschon daher bei der unendlichen Zunahme von u die Gröfsen u, u^n, a^u, $log. u$ u. s. w. ihrem absoluten Werthe nach sämmtlich Unendlich werden, so können sie gleichwohl von verschiedenen Ordnungen seyn, und selbst noch für $u = \infty$ eine Vergleichung unter einander gestatten.

5. Bezeichnet eben so w eine unendlich klein werdende Gröfse, so ist immerwährend $w : w^2 = 1 : w$; so wie also w gegen 1, so wird auch w^2 gegen w unendlich klein. Da dasselbe auch noch gilt, wenn w bereits unendlich klein geworden ist, so heifst w^2 das unendlich Kleine der zweiten Ordnung, während w selbst das der ersten Ordnung bezeichnet. Aus dem nämlichen Grunde werden w^3, w^4 ... w^n unendlich Kleine der dritten, vierten ... n^{ten} Ordnung genannt *).

*) Man erräth wohl bald, dafs diese verschiedenen Ordnungen des unendlich Grofsen und Kleinen nur um der gröfsern Einfachheit und Bequemlichkeit in den Rechnungen willen angenommen und aufgestellt werden; und man würde in der That auf sonderbare Widersprüche und Ungereimtheiten (an denen es auch wirklich nicht gefehlt hat) stofsen, wenn man diese verschiedenen Ordnungen nicht als etwas relatives, sondern absolutes ansehen, und etwa gar in der Natur aufsuchen wollte. Denn absolut genommen, kann das Unendliche, d. i. das Unbegrenzte, eben so wenig verschiedene Grade, als die Null oder das Nichts haben; und doch ist es von der andern Seite eben so richtig, dafs man vergleichungsweise z. B. in einer Fläche unendlich Mal mehr Puncte als in einer geraden Linie, die deren selbst schon unendlich viele hat, annehmen kann, indem sich darin unendlich viele solcher Linien denken lassen. Ist also an und für sich genommen die Anzahl der Puncte, welche man sich in einer Linie, Fläche oder einem Körper vorstellen kann, nichts weiter als schlechtweg unendlich grofs, d. h. unbegrenzt, so bilden diese dennoch bei der gegenseitigen Vergleichung respective Unendliche der ersten, zweiten und dritten Ordnung. Aehnliche Beispiele liefsen sich auch für das unendlich Kleine anführen.

Diese unendlich Grofsen und Kleinen von höhern Ordnungen können auch wirklich immer umgangen werden; dabei ist man aber genöthigt, die Schlüsse, die wir hier ein für alle Mal zu Ende bringen und auf die Eigenschaften der

§. 18.

Aus der gegebenen Erklärung des unendlich Grofsen, ergeben sich nun leicht folgende Lehrsätze.

1. Eine unendlich werdende, oder kürzer, eine unendliche Gröfse, bleibt ungeändert, wenn man eine endliche Gröfse dazu addirt, oder davon subtrahirt.

2. Ein unendlich Grofses einer *höhern* Ordnung wird durch das Hinzukommen, oder Hinwegnehmen eines unendlich Grofsen einer *niederigern* Ordnung weder vermehrt noch vermindert.

3. Unendlich werdende Gröfsen behalten das geometrische Verhältnifs, welches sie bei irgend einem (endlichen) Werthe gegeneinander besitzen, unverändert und selbst noch dann bei, wenn sie sich schon ihrer Grenze ∞, so weit man nur will, genähert haben.

Zu 1. Denn es ist, wenn u eine unendlich werdende Gröfse bezeichnet, offenbar $u + a = u$, indem schon in dem Begriffe des Unendlichwerdens jede denkbare Zunahme liegt, und daher $u + a$ nichts anders bezeichnet, als was schon durch u selbst ausgedrückt wird. Ist aber $u + a = u$, so ist auch, wenn man davon a abzieht, $u = u - a$, also

unendlich Grofsen und Kleinen der ersten Ordnung bauen werden, bei jedem einzelnen vorkommenden Falle beständig zu wiederholen, und dadurch die Entwicklung oder Rechnung aufzuhalten.

Da man bei gewissen Untersuchungen auch auf unendlich kleine Gröfsen kommen kann, deren Ordnungsexponent gebrochen oder selbst irrational ist; so hat *Cauchy* (*Exercices de Mathématiques*, 1. Bd. S. 145) von den verschiedenen Ordnungen der unendlich kleinen Gröfsen, folgende, allgemeinere Definition gegeben: Bezeichnet a eine constante, rationale oder irrationale, r eine veränderliche Zahl, und i eine unendlich kleine Gröfse; so ist im Systeme des unendlich Kleinen, in welchem i die Basis bildet, irgend eine Function von i, $f(i)$ eine unendlich kleine Gröfse von der Ordnung a, wenn die Grenze des Verhältnisses $\frac{f(i)}{i^r}$ für alle Werthe von $r < a$ Null, und für alle Werthe von $r > a$ Unendlich wird.

überhaupt $u \pm a = u$, oder, wenn man für u die Grenze ∞ selbst setzt, auch $\infty \pm a = \infty$. Noch allgemeiner ist, wenn $A = pu$, $B = pa$ gesetzt wird:

$$A \pm B = p(u \pm a) = pu = A.$$

Zu 2. Ferner ist, wenn man $A = au^n$, $B = bu^{n-m}$ und $n > n - m$, also A von einer höhern Ordnung, als B nimmt:

$$A \pm B = u^{n-m}(au^m \pm b) = u^{n-m}(au^m) = au^n = A;$$

weil nämlich, nach dem Vorigen, die endliche Gröſse $\pm b$ gegen die unendlich werdende au^m verschwindet. Auch hier kann man Kürze halber für u die Grenze ∞ selbst setzen, und schreiben:

$$a\infty^n \pm b\infty^{n-m} = a\infty^n.$$

Zu 3. Endlich ist noch, wenn man $A = nu$ und $B = mu$ setzt:

$$A : B = nu : mu = n : m,$$

welches Verhältniſs auch noch gilt, selbst wenn man für u die Grenze ∞ setzt, wodurch $A = n\infty$, $B = m\infty$ wird.

Wird dabei n gegen m selbst wieder unendlich, so wird es auch A gegen B, und man hat für $n = \infty$, $A = \infty^2$; daraus erklären sich die höhern Potenzen von ∞ und ihre Bedeutungen.

§ 19.

Aus der gegebenen Definition des unendlich Kleinen folgen ganz einfach die nachstehenden Sätze:

1. Eine endliche Gröſse kann von einer unendlich kleinen durch Addition oder Subtraction nicht geändert werden.

2. Ein unendlich Kleines von *niedrigerer* Ordnung wird von einer unendlich kleinen Gröſse von *höherer* Ordnung weder vermehrt noch vermindert.

3. Unendlich klein werdende Gröſsen behalten immer noch ein bestimmtes geometrisches Verhältniſs, und zwar jenes, welches sie bei irgend einer angebbaren Gröſse gegen-

einander besitzen, selbst dann noch bei, wenn man sie schon mit ihren Grenzen verwechseln darf.

Zu 1. Denn ist w eine unendlich klein werdende, oder kürzer eine unendlich kleine Gröſse, so ist (§. 17., Erkl. 3, Anmerk. 2), wenn u eine unendlich groſs werdende Gröſse bezeichnet, $w = \frac{a}{u}$, folglich:

$$b \pm w = b \pm \frac{a}{u} = \frac{bu \pm a}{u} = \frac{bu}{u} = b;$$

weil nämlich, nach dem vorigen Paragraphe, die endliche Gröſse a gegen die unendlich werdende bu in der Addition und Subtraction verschwindet *). Allgemeiner noch ist, wenn man $A = pa$ und $B = pw$ setzt:

$$A \pm B = p\,(a \pm w) = pa = A.$$

Zu 2. Ferner folgt, wenn $A = aw^{n-m}$, $B = bw^n$ und $n > n - m$ ist, also B eine unendlich kleine Gröſse von höherer Ordnung, als jene A bezeichnet:

*) Auch unabhängig von diesem angeführten Satze des vorigen Paragraphes, und zwar lediglich aus der oben gegebenen Erklärung einer unendlich kleinen, oder unendlich klein werdenden Gröſse, folgt die Richtigkeit der Gleichung $b \pm \frac{a}{u} = b$, d. h. die Eigenschaft, daſs sich die unendlich klein werdende Gröſse $\frac{a}{u}$ in der Addition und Subtraction gegen eine endliche Gröſse, genau wie ihre Grenze, d. i. die Nulle verhält. Denn setzt man $\frac{a}{u} = w$, woraus wieder $u = \frac{a}{w}$ folgt, so wird für jeden, auch noch so kleinen, von Null verschiedenen Werth von w, $\frac{a}{w}$ oder u eine bestimmte endliche Gröſse. Annehmen also, daſs w nicht bis Null abnehmen kann, heiſst auch, gegen die ausdrückliche Annahme der Unendlich werdenden Gröſse u, in ihrer Zunahme, eine bestimmte endliche Grenze setzen.

Oder noch kürzer und einfacher kann man so schlieſsen: Eine bestimmte Gröſse kann von einer unendlich abnehmenden nur dann um etwas Bleibendes oder Angebbares vermehrt oder vermindert werden, wenn diese letztere selbst bleibend geworden ist, und ihre Abnahme nicht weiter fortsetzt; was aber nur dann Statt findet, wenn sie Null geworden ist, d. h. ihre Grenze erreicht hat.

$A \pm B = w^{n-m}(a \pm b w^m) = w^{n-m}(a) = a w^{n-m} = A$; weil nach dem unmittelbar Vorhergehenden schon eine unendlich kleine Gröſse der ersten Ordnung gegen die endliche verschwindet, was bei jener $b w^m$, von höherer Ordnung, da kein »um so mehr« Statt finden kann, wenigstens eben so gut der Fall ist.

Zu 3. Setzt man endlich $A = n w$, $B = m w$, so findet, obschon A und B mit w unendlich klein werden, dennoch immerfort das Verhältniſs

$$A : B = n w : m w = n : m$$

Statt. Wird n gegen m selbst unendlich klein, so wird es auch A gegen B, und für $n = w$ wird $A = n w = w^2$, oder unendlich klein der zweiten Ordnung. Auch hieraus geht die Bedeutung der höhern Potenzen von w hervor.

Anmerk. 1. Die hier vorgetragene Theorie über die unendlich groſsen und kleinen Gröſsen, war von jeher Vielen ein Stein des Anstoſses, und eine reichhaltige Quelle unnützer und häufig grundloser Controversen. Diese Sätze scheinen uns jedoch, wenn sie mit Ausschlieſsung aller, durchaus nicht hieher gehörigen, metaphysischen Speculationen, im wahren Sinne genommen oder richtig interpretirt werden, dieselbe Schärfe, wie die meisten der Analysis zu besitzen; und die Rechnung des Unendlichen kann wenigstens hier, wo es sich bloſs um die Aufstellung der unmittelbar aus der für die unendlich groſsen und kleinen Gröſsen gegebenen Definition flieſsenden Sätze handelt, durchaus nichts Wunderbares oder Geheimniſsvolles enthalten.

Ein anderes ist die Frage: wo können in der Anwendung solche unendlich kleine Gröſsen, die sich in der Rechnung wie absolute Nullen (was sie nach unserer Ansicht auch wirklich sind) verhalten, und von der andern Seite mit diesen doch wieder nicht ganz identisch zu seyn scheinen, vorkommen? Wir hoffen, bei einer andern Gelegenheit klar und deutlich zeigen zu können, daſs diese unendlich kleinen Gröſsen in der Analysis zur Vereinfachung der Rechnung als unbestimmte Hilfsgröſsen, die am Ende wieder von selbst hinausfallen müssen, in der Geometrie und Mechanik aber, wo sie sich in vielen Fällen, trotz aller Bemühung ihrer Widersacher diese zu umgehen, zuletzt doch wieder, wenn auch nur versteckt, einschleichen, dazu dienen, das Gesetz der

Stetigkeit oder Continuität durch discrete Gröfsen auszudrücken.

Hier wollen wir noch nach *Cauchy's* allgemeineren Definition der unendlich kleinen Gröfsen verschiedener Ordnungen (s. die Note auf S. 48), zufolge welcher, wenn w eine unendlich kleine Gröfse bezeichnet, die Function $f(w)$ ein unendlich Kleines der a^{ten} Ordnung ist, wenn die Grenze des Quotienten $\frac{f(w)}{w^r}$ für $r < a$ Null und für $r > a$ Unendlich wird, einige Sätze die mit den obigen im Zusammenhange stehen oder eigentlich unmittelbar daraus folgen, aus dem Grunde hersetzen, um einen Begriff von dem Verfahren zu geben, welches man beobachten kann, wenn man Alles auf die Grenzenrechnung gründen will.

a) Ist w eine unendlich kleine Gröfse, so ist, wenn n eine ganze positive Zahl bezeichnet, w^n eine unendlich kleine Gröfse der n^{ten} Ordnung.

Denn hier ist $f(w) = w^n$ und $\frac{f(w)}{w^r} = \frac{w^n}{w^r} = w^{n-r}$; für Werthe von $r < n$ ist $n - r$ positiv, folglich nähert sich der Quotient $\frac{f(w)}{w^r} = w^{n-r}$ zugleich mit w der Grenze 0; für $r > n$ dagegen ist $n - r$ negativ oder $r - n$ positiv, wodurch sich also, während w bis Null abnimmt, der Quotient $\frac{f(w)}{w^r} = \frac{1}{w^{r-n}}$ ohne Ende der Grenze ∞ nähert.

b) Hat man in irgend einem Systeme von der Basis w zwei unendlich kleine Gröfsen $A = f(w)$ und $B = f'(w)$, die erste von der Ordnung a, die zweite von der Ordnung b, wobei $b > a$ ist; so wird, während sich diese ihrer Grenze Null nähern, die letztere B mit dem *höhern* Ordnungsexponenten, endlich einmal beständig den kleineren numerischen Werth besitzen.

Denn bei dieser Voraussetzung sind zufolge der hier zum Grunde liegenden Definition, für alle zwischen a und b liegenden Werthe von r, d. i. für $r > a$ und $< b$ die Grenzen der beiden Brüche $\frac{A}{w^r}$ und $\frac{B}{w^r}$ beziehungsweise ∞ und 0, folglich ist die Grenze des Quotienten $\frac{B}{w^r} : \frac{A}{w^r} = \frac{B}{A}$ Null, so dafs also der numerische Werth des Zählers weit schneller,

als der des Nenners abnimmt, und endlich einmal beständig kleiner als der Nenner seyn muſs. B verhält sich dabei im Allgemeinen gegen A, wie eine unendlich kleine, gegen eine endliche Gröſse.

c) Bilden a, b, c, ... die Ordnungszahlen der unendlich kleinen Gröſsen A, B, C, ... und ist dabei a kleiner als alle übrigen Zahlen b, c, ..; so ist die Summe $A+B+C+\dots$ eine unendlich kleine Gröſse der a^{ten} Ordnung.

Denn da nach b) die Grenze eines jeden der Brüche $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, .. Null ist, so hat der Bruch

$$\frac{A+B+C+\dots}{A} = 1 + \frac{B}{A} + \frac{C}{A} + \dots$$

die Einheit zur Grenze, so daſs also der Bruch

$$\frac{A+B+C+\dots}{w^r} = \frac{A}{w^r}\left(1+\frac{B}{A}+\frac{C}{A}+\dots\right)$$

mit jenem $\frac{A}{w^r}$ einerlei Grenze besitzt; da nun der Voraussetzung gemäſs A eine unendlich kleine Gröſse der a^{ten} Ordnung ist, folglich (nach der zum Grunde liegenden Definition) der zuletzt genannte Quotient $\frac{A}{w^r}$, je nachdem $r <$ oder $> a$ ist, die Grenze 0 oder ∞ hat, so ist die Summe $A+B+C+\dots$, weil nämlich bei den nämlichen Werthen von r, der Quotient $\frac{A+B+C+\dots}{w^r}$ dieselben Grenzen 0 und ∞ besitzt, (zufolge der Definition) eine unendlich kleine Gröſse der a^{ten} Ordnung.

d) Sind in irgend einem Systeme von der Basis w, A und B beziehungsweise unendlich kleine Gröſsen von der Ordnung a und b; so ist das Product AB eine unendlich kleine Gröſse der Ordnung $a+b$.

Denn da bei dieser Voraussetzung die Grenzen der Brüche $\frac{A}{w^r}$ und $\frac{B}{w^s}$ für $r<a$ und $s<b$ Null, dagegen für $r>a$ und $s>b$ Unendlich sind, so muſs bei denselben Werthen von r und s, für welche im ersten Falle $r+s<a+b$ im letztern $r+s>a+b$ wird, auch die Grenze des Productes $\frac{A}{w^r}\cdot\frac{B}{w^s}=\frac{AB}{w^{r+s}}$ für die erstern Werthe von r und s,

d. i. für $r+s<a+b$ Null, und für die letztern oder $r+s>a+b$ Unendlich seyn, woraus sofort (wieder nach der zum Grunde liegenden Definition) folgt, daſs AB eine unendlich kleine Gröſse der $(a+b)^{ten}$ Ordnung ist.

Man sieht leicht, daſs sich dieser Satz, durch wiederholte Anwendung derselben Schlüsse, auch auf das Product von jeder beliebigen Anzahl unendlich kleiner Factoren ausdehnen läſst; so, daſs also das Product $ABCD\ldots$ aus den unendlich kleinen Gröſsen $A, B, C, D, \ldots$, welche beziehungsweise die Ordnungsexponenten $a, b, c, d, \ldots$ besitzen, eine unendlich kleine Gröſse von der Ordnung $a+b+c+d+\ldots$ ist.

e) Bilden in dem Polynome $Aw^\alpha+Bw^\beta+Cw^\gamma+\ldots$ die (positiven) Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ eine *steigende* Reihe, so wird, während sich die unendlich kleine Gröſse w ihrer Grenze Null nähert, dieses Polynom endlich einmal mit seinem ersten Gliede Aw^α beständig *dasselbe* Zeichen besitzen.

Denn da *(c)* $Bw^\beta+Cw^\gamma+\ldots$ eine unendlich kleine Gröſse der β^{ten} Ordnung und $\beta>\alpha$ ist, so wird endlich einmal, bei der fortwährenden Abnahme von w, der Werth von $Bw^\beta+Cw^\gamma+\ldots$ *(b)*) beständig kleiner als jene Aw^α, folglich von da an, das Polynom $Aw^\alpha+Bw^\beta+Cw^\gamma$ beständig das Zeichen des ersten Gliedes Aw^α erhalten.

f) Aus diesen Sätzen folgt also auch, daſs für endliche Werthe der Coefficienten $A, A_1, A_2, \ldots$ bei der unendlichen Abnahme von x, endlich einmal dem numerischen Werthe nach, beständig $A>A_1x+A_2x^2+\ldots$, $A_1>A_2x+A_3x^2+\ldots$ und $A_n>A_{n+1}x+A_{n+2}x^2+\ldots$, folglich, wenn man von diesen beiden letzten Ungleichheiten, die erstere mit x, die letztere mit x^n multiplicirt, auch

$$A_1x>A_2x^2+A_3x^3+\ldots \text{ und allgemein}$$
$$A_nx^n>A_{n+1}x^{n+1}+A_{n+2}x^{n+2}+\ldots$$

seyn wird; es ist also bei der unendlichen Abnahme der Variablen x, einmal der numerische Werth eines jeden Gliedes der Functionsreihe $A+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n+\ldots$, diese mag abbrechen oder ohne Ende fortlaufen, gröſser, als die Summe aller folgenden Glieder.

Noch mehrere andere, mitunter sehr elegante Sätze dieser

Art, findet man in den oben (Note, S. 48) angezogenen Exercices von *Cauchy* (Bd. 1., S. 145—150).

Anmerk. 2. Bezeichnet wieder w eine unendlich klein werdende Gröſse, und ist a die Grenze der Variablen x; so kann auch, nach der im §. 17. aufgestellten Erklärung (1), die Gröſse x einfach und bequem so dargestellt werden:

$$x = a \pm w.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich auch sehr leicht, für die Grenzen, folgende Sätze ableiten.

1. Die Grenze einer Summe oder Differenz ist gleich der Summe oder Differenz der Grenzen der einzelnen Gröſsen (der erste Satz, auf eine unendliche Reihe angewendet, ist nicht immer wahr); oder $Gr.(x \pm y) = Gr.x \pm Gr.y$. Ist $y = x$, so ist auch $Gr.(x-y) = 0 = Gr.x - Gr.y$, also $Gr.x = Gr.y$.

2. Die Grenze eines Productes oder Quotienten ist gleich dem Producte oder Quotienten aus den Grenzen der Factoren im ersten, und jenen des Dividends und Divisors (im Allgemeinen) im zweiten Falle. Es ist nämlich

$$Gr.(xyz\ldots) = Gr.x \,.\, Gr.y \,.\, Gr.z \ldots;$$

und im Allgemeinen $Gr.\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{Gr.x}{Gr.y}$.

3. Die Grenze einer Potenz, wobei der Exponent eine beständige Gröſse ist, übrigens aber ganz oder gebrochen, positiv oder negativ seyn kann, ist gleich der Grenze der Wurzel auf die nämliche Potenz erhoben; oder $Gr.(x)^n = (Gr.x)^n$. Man findet zugleich noch

$$Gr.(a^x) = a^{Gr.x} \text{ und } Gr.(x^y) = (Gr.x)^{Gr.y}.$$

Wir begnügen uns hier mit der bloſsen Andeutung dieser Sätze.

Anmerk. 3. Es läſst sich nun auch für eine continuirliche Function $f(x)$ noch eine andere, als die im §. 1. (Erkl. 10) gegebene, Definition aufstellen, und für solche Functionen ein einfaches Kennzeichen angeben.

Bleibt nämlich die Function $f(x)$ für alle, innerhalb gegebener Grenzen liegenden, Werthe von x endlich, und läſst man die Variable x um die unendlich kleine Gröſse w zunehmen (oder auch abnehmen), wodurch die Function um die Gröſse $f(x+w) - f(x)$ geändert wird; so ist die Function $f(x)$ für alle jene Werthe von x continuirlich, für welche die Differenz $f(x+w) - f(x)$ ebenfalls unendlich klein wird; oder mit andern Worten: die Function $f(x)$ bleibt in

Bezug auf x innerhalb der gegebenen Grenzen continuirlich, wenn eine unendlich kleine Aenderung der Variablen x, auch eine unendlich kleine Zu- oder Abnahme in der Function $f(x)$ hervorbringt.

So ist z. B. wenn n eine ganze positive Zahl bezeichnet, die Function x^n für alle Werthe von x, welche innerhalb der Grenzen von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ liegen, eine continuirliche oder stetige Function; denn es ist

$$(x + w)^n = x^n + w\left[n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} w + \ldots\right]$$

$$\text{also} \quad (x + w)^n - x^n = Pw,$$

wenn man nämlich, Kürze halber, das in den Parenthesen eingeschlossene Polynom mit P bezeichnet.

Da nun hier offenbar P innerhalb der bezeichneten Grenzen von x nicht unendlich grofs werden kann, so ist die Zunahme der Function, oder Pw, zugleich mit w, unendlich klein *).

*) Könnte P Unendlich werden, so dürfte man keineswegs schliefsen, dafs Pw unendlich klein ist, weil es aufser diesem Falle nicht nur endlich, sondern sogar unendlich grofs seyn kann, wie wir in der Folge sehen werden.

Drittes Capitel.

Theorie der höhern Gleichungen.

I. Gleichungen mit *einer* Unbekannten.

§. 20.

Erklärungen.

1. Eine höhere (algebraische) Gleichung von einer Unbekannten heifst gut geordnet, oder schlechthin, geordnet, wenn alle Glieder derselben auf einer Seite des Gleichheitszeichens stehen, und nach fallenden Potenzen der Unbekannten, für welche man immer ganze, positive Exponenten voraussetzt, indem die etwa vorhandenen negativen oder gebrochenen, früher weggeschafft werden müssen, auf einander folgen. Dabei wird (gewöhnlich) noch gefordert, dafs der etwa im ersten Gliede vorhandene Coefficient der Unbekannten in der höchsten Potenz, deren Exponent zugleich den Grad der Gleichung bestimmt, durch Division weggebracht, und sofort auf $+1$ reducirt sey.

Es ist daher

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_m x^{n-m} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0 \quad \ldots (1$$

die allgemeine Form einer geordneten algebraischen Gleichung des n^{ten} Grades mit einer Unbekannten x. Dabei sind $A_1, A_2 \ldots A_n$ constante, reelle oder imaginäre Buchstaben- oder Zahlen-Coefficienten, welche wir indefs hier ein für alle Mal als reelle Gröfsen voraussetzen wollen, die übrigens ganz oder gebrochen, positiv oder negativ und zum Theil auch Null seyn können.

Diese Gleichung werden wir der Kürze wegen häufig durch $X = 0$ bezeichnen; dabei heifst X das Polynom der Gleichung, welches sofort eine rationale Function von x ist.

Anmerk. Wird der Coefficient des ersten Gliedes nicht durch Division weggebracht (was auch für gewisse Sätze nicht

unumgänglich nothwendig ist), so hat die Gleichung die Form:

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0 \ldots (2$$

2. Jeder reelle oder imaginäre Ausdruck, welcher für die Unbekannte gesetzt, der Gleichung Genüge leistet oder das Polynom derselben auf Null reducirt, heifst **Wurzel** oder **Auflösung** der Gleichung.

So ist z.B. sowohl 1, wie auch 2 eine Wurzel oder Auflösung der Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$, weil diese für jeden dieser beiden Werthe befriedigt wird, wenn man selbe statt x substituirt.

§. 21.

Lehrsatz.

In einer jeden höhern Gleichung $X = 0$ ist das Polynom X eine continuirliche Function von x, und zwar für alle endlichen Werthe dieser letztern Gröfse.

Denn läfst man x um die willkürliche Gröfse w zunehmen, oder in $x + w$ übergehen, wodurch X oder $f(x)$ in $f(x + w)$ übergeht; so erhält man aus (1 (§. 20)

$$f(x+w) = (x+w)^n + A_1(x+w)^{n-1} + A_2(x+w)^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + A_{n-1}(x+w) + A_n = 0,$$

oder, wenn man entwickelt: $f(x+w) =$

$$\begin{array}{l} x^n \\ A_1 x^{n-1} \\ A_2 x^{n-2} \\ \ldots\ldots \\ A_{n-1} x \\ A_n \end{array} + \left(\begin{array}{r} n x^{n-1} \\ (n-1) A_1 x^{n-2} \\ (n-2) A_2 x^{n-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n-1} \end{array}\right) w + \left(\begin{array}{r} \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \\ \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} A_1 x^{n-3} \\ \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} A_2 x^{n-4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n-2} \end{array}\right) w^2 + \ldots$$

$$\ldots + \left.\begin{array}{r} n x \\ A_1 \end{array}\right\} w^{n-1} + w^n = 0.$$

Es ist nämlich die Entwicklung von der Form:

$$f(x+w) = X + X_1 w + X_2 w^2 + X_3 w^3 + \ldots$$
$$\ldots + X_{n-1} w^{n-1} + X_n w^n = 0 \;.\; . (\alpha$$

wobei, wie leicht zu sehen, X, X_1, $X_2 \ldots$ folgende Werthe haben:

$$X = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

$$X_1 = \frac{n}{1} x^{n-1} + \frac{(n-1)}{1} A_1 x^{n-2} + \frac{(n-2)}{1} A_2 x^{n-3} + \ldots + A_{n-1}$$

$$X_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} A_1 x^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} A_2 x^{n-4} + \ldots + A_{n-2}$$

$$X_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A_1 x^{n-4} + \ldots + A_{n-3}$$

. .

$$X_{n-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} x + A_1 = nx + A_1$$

$$X_n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n} = 1.$$

Da nun X, wie man sieht, nichts anderes als das Polynom der Gleichung oder $f(x)$ ist, so folgt aus α):

$$f(x+w) - f(x) = w\left[X_1 + X_2 w + X_3 w^2 + \ldots + X_n w^{n-1}\right].$$

Läſst man daher w eine unendlich kleine Gröſse bedeuten, so wird diese entwickelte Differenz der Function, da für endliche Werthe von n und x das in den Parenthesen eingeschlossene Polynom nur endlich, und nicht unendlich werden kann, ebenfalls unendlich klein; wodurch sofort (§. 19., Anmerk. 3) der aufgestellte Satz erwiesen ist.

Anmerk. 1. Man sieht, daſs dieser Satz selbst dann noch gilt, wenn die Coefficienten $A_1, A_2 \ldots A_n$ der gegebenen Gleichung $X = 0$ zum Theil, oder sämmtlich imaginär sind.

Anmerk. 2. Die oben für $f(x+w)$ gefundene Entwicklung α) ist nicht nur des häufig in der Folge vorkommenden Gebrauches, sondern auch vorzüglich des besondern und leicht zu übersehenden Gesetzes wegen, nach welchem die Coefficienten X_1, $X_2 \ldots$ einer aus dem andern abgeleitet oder *derivirt* werden können, merkwürdig.

Wird nämlich in das Polynom X einer Gleichung statt x, $x+w$ gesetzt, wodurch die Entwicklung $f(x+w)$ nach steigenden Potenzen von w fortgeht; so ist das erste Glied, oder der Coefficient zu w^0, das ursprüngliche Polynom X der Gleichung selbst. Der nächste Coefficient X_1 wird aus diesem X abgeleitet oder derivirt, indem man durchaus den Exponen-

ten von x zum Coefficienten macht, und den alten Exponenten um eine Einheit vermindert. Genau eben so wird X_2 aus X_1, X_3 aus $X_2 \ldots X_n$ aus X_{n-1} abgeleitet, wobei nur noch zu merken ist, dafs bei der ersten Ableitung (bei der Bestimmung von X_1) jeder Coefficient durch 1, bei der zweiten Ableitung (bei X_2) jeder durch 2, bei der dritten Ableitung (bei X_3) jeder Coefficient durch 3 u. s. w. bei der n^{ten} Ableitung (Bildung von X_n) jeder durch n zu dividiren ist, wodurch endlich $X_n = 1$ oder $= A_0$ wird, je nachdem die ursprüngliche Gleichung, wie in 1) oder in 2) des vorigen Paragraphes, geordnet ist.

Die Polynome X_1, X_2, $X_3 \ldots$ werden dieser besondern Bildung wegen, beziehungsweise, das erste, zweite, dritte.. abgeleitete oder derivirte Polynom von X oder $f(x)$ genannt.

§. 22.

Lehrsatz.

Ist in der Gleichung

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = 0,$$

A_m der numerische (oder Absolut-) Werth des gröfsten vorkommenden Coefficienten; so wird für $x \overset{=}{>} A_m + 1$ das erste Glied x^n des Polynoms gröfser, als die Summe aller folgenden Glieder.

Denn es ist, wenn man indefs der Kürze wegen

$$A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = P$$

setzt, offenbar

$$A_m x^{n-1} + A_m x^{n-2} + \ldots + A_m x^2 + A_m x + A_m > P$$

oder $A_m(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1}) > P$,

oder auch, da die eingeschlossene Reihe eine geometrische ist, deren Summe man kennt:

$$A_m\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right) > P \ldots (1$$

Nimmt man nun $x \overset{=}{>} A_m + 1$, also $x - 1 \overset{=}{>} A_m$, oder $(x - 1)x^n \overset{=}{>} A_m x^n$; so wird, wenn man davon die Ungleichheit $0 < A_m$ abzieht, in beiden Fällen

$(x-1)x^n > A_m x^n - A_m$, also auch $x^n > A_m \frac{(x^n-1)}{x-1}$.
Es ist demnach, vermöge der Ungleichung 1), um so mehr $x^n > P$, was zu beweisen war *).

Anmerk. Hat das erste Glied x^n noch den Coefficienten A_0, und will man diesen nicht erst wegschaffen, so darf man nur

*) Mit Hilfe dieses Satzes findet man auch leicht, daſs, wenn A_m die vorige Bedeutung hat, für $x \overline{\overline{<}} \frac{A_p}{A_m + A_p}$ in dem Polynom $P = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_p x^{n-p}$, das niedrigste Glied $A_p x^{n-p}$ gröſser, als die Summe aller übrigen Glieder wird. Denn setzt man $x = \frac{1}{y}$, so wird

$$P = \frac{A_0}{y^n} + \frac{A_1}{y^{n-1}} + \frac{A_2}{y^{n-2}} + \ldots + \frac{A_p}{y^{n-p}} \text{ oder}$$

$$P = \frac{1}{y^n}(A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots + A_p y^p).$$

Nun wird aber, nach dem erwähnten Satze, für

$$y \overline{\overline{>}} \frac{A_m}{A_p} + 1:$$

$$A_p y^p > A_{p-1} y^{p-1} + \ldots + A_1 y + A_0,$$

wenn nämlich wieder A_m den gröſsten Coefficienten des Polynoms P bezeichnet; wird diese Ungleichheit mit $\frac{1}{y^n}$ multiplicirt, so erhält man

$$A_p \cdot \frac{1}{y^{n-p}} > \frac{1}{y^n}(A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots + A_{p-1} y^{p-1}),$$

oder, wenn man auf x zurückgeht, auch $\left(\text{wegen } y = \frac{1}{x}\right)$:

$$A_p x^{n-p} > A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_p x^{n-p+1},$$

und zwar für

$$x = \frac{1}{y} \overline{\overline{<}} \frac{1}{\frac{A_m}{A_p} + 1} \overline{\overline{<}} \frac{A_p}{A_m + A_p}.$$

Da dieser Satz, der sich auch leicht unmittelbar, d. i. unabhängig von dem vorigen, ableiten läſst, offenbar von der Anzahl der Glieder des Polynoms P ganz unabhängig ist; so lassen sich auch in jeder unendlichen Reihe wie $Ax^p + Bx^{p+1} + Cx^{p+2} + \ldots$ bis ins Unendliche, wobei die von x unabhängigen Coefficienten A, B, $C\ldots$ endliche Gröſsen sind, und p auch Null seyn kann, für x immer so kleine Werthe angeben, für welche das erste Glied der Reihe Ax^p gröſser als die Summe aller folgenden Glieder ausfällt (man vergl. f), S. 54).

$x \overline{\overline{>}} \frac{A_m}{A_0} + 1$ nehmen. Ist z. B. gegeben

$$2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 6x + 5 = 0,$$

so wird (wegen $A_m = 6$) für $x = \frac{6}{2} + 1 = 4$, $2x^4 = 512$, und

$$3x^3 + 5x^2 + 6x + 5 = 301,$$

also in der That für diesen Werth von x:

$$2x^4 > 3x^3 + 5x^2 + 6x + 5.$$

Noch ist zu bemerken, dafs man in den meisten Fällen diese Eigenschaft schon mit einer kleinern Zahl, als $A_m + 1$ herbeiführen kann; so ist in dem eben angeführten Beispiele schon für $x = 3$ das erste Glied gröfser, als die Summe aller übrigen. Noch mehr kann dieses der Fall seyn, wenn auch negative Coefficienten vorkommen.

§. 23.

Lehrsatz.

Setzt man in dem Polynome einer höhern Gleichung $X = 0$, für x nach und nach die beiden Werthe a und b, und erhält dadurch Resultate mit entgegengesetzten Zeichen; so liegt nothwendig zwischen a und b wenigstens eine Wurzel der Gleichung *).

Denn da X oder $f(x)$ eine continuirliche Function von x ist (§. 21.), so kann bei dem allmähligen Uebergange von $x = a$ bis $x = b$ auch $f(x)$ nur allmählig von dem Werthe $f(a)$ zu jenem $f(b)$ übergehen, und dabei durchaus keinen zwischenliegenden Werth überspringen (§. 1., Erklär. 10). Da aber, der Voraussetzung zufolge, $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Zeichen haben, so liegt nothwendig die Nulle dazwischen **), und es mufs sofort irgend einen Werth α

*) Diese Wurzel ist natürlich reell oder imaginär, je nachdem die sie einschliefsenden Gröfsen a und b selbst beide reell oder imaginär sind.

**) Wie wir in der Folge sehen werden, kann eine continuirliche Function in besondern Fällen auch ihr Zeichen ändern, indem sie durch ∞ geht (was z. B. schon mit einigen trigonometrischen Functionen geschieht). Dafs aber dieser Fall hier nicht eintreten kann, folgt aus der Form von X, in welcher n positiv ist und die Coefficienten A_1, $A_2 \ldots A_n$, so wie auch a und b endliche Gröfsen bezeichnen.

geben, welcher für x gesetzt, $f(x) = o$ macht; es ist also (§. 20., 2) $x = \alpha$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = o$.

Zusatz 1. Es ist leicht zu sehen, daſs bei der vorigen Voraussetzung zwischen a und b auch 3, 5... kurz jede ungerade Anzahl Wurzeln der Gleichung liegen können. Denn nimmt man z. B. an, daſs $f(x)$ für $x = a$ positiv wird, so kann $f(x)$ allmählig abnehmen, für $x = \alpha$ Null werden und ins Negative übergehen; sich dann dem Positiven wieder allmählig nähern, für $x = \beta$ Null werden und abermals ins Positive übergehen; endlich darin wieder abnehmen für $x = \gamma$ Null, und dann neuerdings für $x = b$ negativ werden, so, daſs in der That $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Zeichen haben. Dasselbe gilt, wenn man $f(a)$ negativ seyn läſst, wodurch dann $f(b)$ positiv ausfällt. Endlich gelten die nämlichen Schlüsse auch, wenn man anstatt der drei Nullmachenden Werthe α, β, γ, dafür überhaupt eine ungerade Anzahl nimmt.

Zusatz 2. Aus den eben geführten Schlüssen erhellet zugleich, daſs, wenn für die beiden Werthe von $x = a$ und $x = b$, $f(x)$ einerlei Zeichen behält: zwischen a und b entweder gar keine, oder 2, 4..., d. i. jede gerade Anzahl von Wurzeln der Gleichung $f(x) = o$ liegen ~~können.~~ kann. Auch gilt in beiden Fällen der umgekehrte Schluſs.

Anmerk. Aus den vorigen Schlüssen folgt offenbar auch, daſs das Polynom X einer Gleichung von gerader Ordnung, deren Wurzeln entweder sämmtlich imaginär, oder reell aber einander gleich sind, für alle reellen Werthe, die man statt x substituiren mag, immer dasselbe Zeichen behält.

§. 24.

Aus dem Lehrsatze des vorigen Paragraphes flieſsen unmittelbar die beiden folgenden:

Lehrsatz 1.

Jede Gleichung von einem *ungeraden* Grad hat wenigstens *eine* reelle Wurzel; ihr Zeichen ist das entgegengesetzte von jenem des letzten Gliedes.

Lehrsatz 2.

Jede Gleichung von einem *geraden* Grade, deren letztes Glied *negativ* ist, hat wenigstens *zwei* reelle Wurzeln; davon ist die eine *positiv*, die andere *negativ*.

Zu 1. Denn setzt man in einer Gleichung der ersten Art zuerst $x = 0$, so verschwinden alle Glieder des Polynoms, bis auf das letzte, welches allein stehen bleibt; es ist daher das Resultat dieser Substitution positiv oder negativ, je nachdem dieses letzte Glied positiv oder negativ ist. Setzt man ferner, wenn das letzte Glied positiv ist, $x = -(A_m + 1)$, und wenn dieses negativ ist, $x = +(A_m + 1)$, wo A_m den Absolutwerth des gröſsten vorkommenden Coefficienten des Polynoms X bezeichnet; so wird im ersten Falle das Resultat, dessen Zeichen, vermöge des Satzes im §. 22., von jenem des ersten Gliedes abhängt, negativ, und im zweiten Falle positiv. Da also in beiden Fällen die zwei auf einander folgenden Substitutionen Resultate mit entgegengesetzten Zeichen liefern, so liegt nach dem Satze des vorigen Paragraphes, im ersten Falle, wenn nämlich das letzte Glied positiv ist, zwischen 0 und $-(A_m + 1)$, und im zweiten Falle, in welchem das letzte Glied negativ ist, zwischen 0 und $+(A_m + 1)$ wenigstens eine Wurzel; diese ist aber, da wir A_m als eine reelle Gröſse (§. 20., Erkl. 1) voraussetzen, im ersten Falle reell und negativ, und im zweiten reell und positiv.

Zu 2. Setzt man in einer Gleichung der zweiten Art zuerst $x = 0$, so verschwinden ebenfalls wieder alle Glieder bis auf das letzte, und man hat sofort ein negatives Resultat. Setzt man ferner sowohl $x = +(A_m + 1)$, als auch $x = -(A_m + 1)$, so wird in beiden Fällen das erste Glied, folglich auch mit diesem das ganze Polynom positiv, und man hat sofort in beiden Fällen ein Resultat, welches vom vorigen das entgegengesetzte Zeichen besitzt: es liegt also sowohl zwischen 0 und $+(A_m + 1)$, als auch zwischen 0 und $-(A_m + 1)$ wenigstens eine Wurzel;

diese ist aber für die erstern Grenzen reell und positiv, für die letztern reell und negativ *).

Zusatz. Es folgt auch noch aus dieser Beweisart, daſs die Anzahl der reellen positiven Wurzeln einer Gleichung gerade (wozu auch die Null zu rechnen ist) oder ungerade seyn muſs, je nachdem das letzte Glied ihres Polynoms positiv oder negativ ist.

Anmerk. 1. Wäre das letzte Glied (A_n) des Polynoms gleich Null, so lieſse sich die Gleichung offenbar durch x abkürzen, oder, mit andern Worten, es wäre $x = 0$ selbst schon eine Wurzel der Gleichung.

Anmerk. 2. Für eine Gleichung hingegen, deren Ordnungsexponent gerade und letztes Glied positiv ist, läſst sich keineswegs die Existenz einer reellen Wurzel nachweisen; und es ist in der That möglich, daſs sie keine solche besitzt und nur imaginäre Wurzeln hat, wie solche Fälle schon bei den quadratischen Gleichungen vorkommen. So hat z. B. die Gleichung $x^2 + 2x + 4 = 0$ bloſs die beiden imaginären Wurzeln $x = -1 + \sqrt{-3}$ und $x = -1 - \sqrt{-3}$.

Es ist klar, daſs das Polynom einer Gleichung, welche gar keine reelle Wurzel besitzt, für keinen reellen Werth von x negativ ausfallen kann, weil sonst, wenn dieses z. B. für $x = a$ geschehen könnte, zwischen $x = A_m + 1$, für welchen Werth das Polynom positiv wird, und $x = a$ nothwendig eine reelle Wurzel liegen müſste.

Für Gleichungen dieser Art werden wir also nur nachzuweisen haben, daſs es wenigstens einen Ausdruck von der Form $p + q\sqrt{-1}$ geben müsse, welcher für x gesetzt, die Gleichung befriedige oder das Polynom X auf Null bringe; weil in diesem Ausdrucke nicht bloſs die imaginären, sondern auch die reellen Wurzeln begriffen sind, wenn für die letztern $q = 0$ gesetzt wird. Dieses soll sofort in dem folgenden Paragraphe geschehen.

§. 25.

Lehrsatz.

Jede Gleichung von einem *geraden* Grade,

*) Bequemer noch kann man für beide Beweise, in der zweiten Substitution, anstatt $x = \pm (A_m + 1)$: $x = \pm \infty$ setzen; dadurch verschwinden gegen das erste Glied alle folgenden (§. 18., 1 und 2), und das Resultat hat offenbar mit dem ersten Gliede einerlei Zeichen.

deren letztes Glied *positiv* ist, hat wenigstens *eine* Wurzel, die in dem Ausdrucke $p + q\sqrt{-1}$, wobei p und q reelle, positive oder negative Gröfsen bezeichnen, und von denen auch die eine oder andere Null seyn kann, begriffen ist.

Denn es sey

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0 \ldots (m$$

eine Gleichung von der genannten Beschaffenheit, also n gerade und A_n positiv. Setzt man $x = y\sqrt[n]{-1}$, so geht diese in die folgende über:

$$-y^n + A_1(\sqrt[n]{-1})^{n-1} y^{n-1} + A_2(\sqrt[n]{-1})^{n-2} y^{n-2} + \ldots + A_n = 0.$$

Da sich aber, wie schon aus den ersten Elementen folgt, bei dieser Beschaffenheit von n, $\sqrt[n]{-1}$ immer auf die Form von $a + b\sqrt{-1}$, wobei auch $a = 0$ seyn kann, bringen läfst *), und jede Potenz von $a + b\sqrt{-1}$ wieder

*) Es folgt aus der bekannten Formel

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\left[\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}\right]} \pm \sqrt{\left[\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}\right]}$$

ganz einfach:

$$\sqrt[4]{-1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-1},$$

$$\sqrt[8]{-1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} + [\tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}]\sqrt{-1}, \text{ u. s. w.}$$

Nimmt man nun für irgend einen Exponenten r von der Form $4n$ die in diesen beiden Ausdrücken vorhandene Form $\sqrt[r]{-1} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ als richtig an, so folgt nach der vorigen Formel auch

$$\sqrt[2r]{-1} = \sqrt{[\alpha + \beta\sqrt{-1}]} = \sqrt{\left[\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}\right]} + \sqrt{\left[\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}\right]} = \sqrt{\left[\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}\right]} + \sqrt{\left[\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}\right]}\sqrt{-1},$$

d. i. $\sqrt[2r]{-1} = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$,

wobei nicht nur α', sondern wegen $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > \alpha$ auch β'

von der nämlichen Form ist *); so nimmt diese letzte Gleichung, wenn man auch gleich die Zeichen durchaus ändert, die Form an:

$$Y = y^n - A_1(a_1 + b_1\sqrt{-1})y^{n-1} - A_2(a_2 + b_2\sqrt{-1})y^{n-2} - \ldots$$
$$\ldots - A_n = 0 \ldots (n$$

in welcher Gleichung von gerader Ordnung nun das letzte Glied wesentlich negativ ist.

Setzt man jetzt, als erste Substitution, in dieser Gleichung $y = u + v\sqrt{-1}$, wobei u und v reelle Gröſsen bezeichnen sollen, die wir auch noch der gröſsern Einfachheit wegen, und da dieſs zu unserm Zwecke hinreicht (aber wie man sehen wird, nicht unumgänglich nothwendig ist), als positiv voraussetzen wollen; so erhält das Polynom Y die Form:

$$u^n + B_1 u^{n-1} + B_2 u^{n-2} + \ldots + B_{n-1} u + B_n \; (= \alpha)$$
$$+ (C_1 u^{n-1} + C_2 u^{n-2} + \ldots + C_{n-1} u + C_n)\sqrt{-1} \; (= \beta\sqrt{-1}),$$

reell ist: es gilt also die nämliche Form sofort auch noch für den doppelten Exponenten $2r$. Da nun, wie man sieht, diese Form für $r = 4$ oder auch $r = 8$ gilt, so gilt sie auch für $2r = 16$; besteht sie aber für $r = 16$, so muſs diese auch für $2r = 32$ Giltigkeit haben u. s. w., also allgemein für jeden Exponenten r von der Form $4n$.

Was ferner die geraden Wurzelexponenten von der Form $2n$ betrifft (wobei n ungerade ist), so ist ganz einfach:

$$\sqrt[6]{-1} = \sqrt[3]{(\sqrt{-1})} = \sqrt{-1} = 0 + 1\sqrt{-1},$$
$$\sqrt[10]{-1} = \sqrt[5]{(\sqrt{-1})} = 0 + 1\sqrt{-1}, \text{ und überhaupt}$$
$$\sqrt[2n]{-1} = \sqrt[n]{(\sqrt{-1})} = 0 + 1\sqrt{-1}.$$

Es ist also allgemein für jeden geraden Exponenten n: $\sqrt[n]{-1} = a + b\sqrt{-1}$, wobei a und b reelle Gröſsen sind und auch $a = 0$ seyn kann.

*) Es ist nämlich

$$(a + b\sqrt{-1})^m = a^m + m a^{m-1} b\sqrt{-1} - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 \sqrt{-1} + \ldots,$$

oder wenn man sowohl die reellen, als auch die imaginären Glieder für sich zusammennimmt, die Summe der erstern durch A und die mit $\sqrt{-1}$ multiplicirte Reihe durch B bezeichnet, auch $(a + b\sqrt{-1})^m = A + B\sqrt{-1}$, wobei wieder A und B reelle Gröſsen sind.

wobei, wie man leicht findet, B_1, $B_2 \ldots B_n$, C_1, $C_2 \ldots C_n$ Functionen von den verschiedenen A, a und b, dann von n und v sind, die innerhalb jener Grenzen, innerhalb welcher diese letztern Gröfsen endlich sind, ebenfalls endlich bleiben, und von denen, da uns die Zusammensetzung der übrigen gleichgiltig seyn kann, $C_1 = nv \mp A_1 b_1$ ist, woraus sofort folgt, daſs man v immer so wählen kann, daſs C_1 (oder wenn man auch für u negative Werthe zulassen will, das Glied $C_1 u^{n-1}$) positiv ausfällt.

Da nun das erste Glied u^n der Reihe (α), und, wenn v hinreichend groſs angenommen wird, auch das erste Glied $C_1 u^{n-1}$ der zweiten Reihe (β) wesentlich positiv ist, und wenn man u groſs genug annimmt — indem man nämlich, wenn beziehungsweise B_m und C_m die numerischen Werthe der gröſsten, in den beiden Reihen (α und β) vorkommenden Coefficienten bezeichnen (§. 22.), nur $u \overline{\overline{>}} B_m + 1$ in der ersten, und $u \overline{\overline{>}} \frac{C_m}{C_1} + 1$ in der zweiten, also, wenn z. B. $B_m \overline{\overline{>}} \frac{C_m}{C_1}$ ist, bloſs $u \overline{\overline{>}} B_m + 1$ in beiden Reihen (α und β) setzen darf — wie groſs auch v immer seyn mag, diese ersten Glieder (u^n und $C_1 u^{n-1}$) in beiden Reihen (§. 22.) gröſser, als die Summe aller folgenden Glieder werden können; so folgt, daſs für u und v immer reelle Werthe möglich sind, für welche die beiden vorigen Reihen (α und β), also auch das aus diesen gebildete Polynom Y, welches die Form $U + V\sqrt{-1}$ hat, durch die Substitution von

$$y = u + v\sqrt{-1}$$

in der Gleichung n) positiv ausfällt.

Da ferner, wenn man, als zweite Substitution, in derselben Gleichung n) $y = 0$ setzt, dieses Polynom $Y = -A_n$, also negativ wird; so liegt, da (§. 21., Anmerk. 1) Y eine continuirliche Function von y ist, zwischen $y = 0$ und $y = u + v\sqrt{-1}$ wenigstens eine Wurzel der Gleichung n), die sofort die Form $y = u' + v'\sqrt{-1}$ besitzt, und wobei $u' < u$ und $v' < v$ ist.

Substituirt man endlich diesen letztern Werth von y in der obigen Relation

$$x = y\sqrt[n]{-1} = y(a + b\sqrt{-1});$$

so erhält man

$$x = (u' + v'\sqrt{-1})(a + b\sqrt{-1})$$
$$= (au' - bv') + (av' + bu')\sqrt{-1},$$

oder der Form nach $x = p + q\sqrt{-1}$, wobei p und q reelle positive oder negative Gröſsen sind, die auch in besondern Fällen Null werden können; und dieser Ausdruck bildet also eine Wurzel der ursprünglichen Gleichung m), die zum wenigsten vorhanden seyn muſs *).

§. 26.

Lehrsatz.

Ist $x = w$ eine Wurzel der Gleichung $X = 0$, so ist das Polynom X durch $x - w$ ohne Rest theilbar, oder es ist $x - w$ ein Factor von X.

Denn es ist, da w eine Wurzel seyn soll (§. 20., Erkl. 2)

$$w^n + A_1 w^{n-1} + A_2 w^{n-2} + \ldots + A_{n-1} w + A_n = 0;$$

bestimmt man daraus das letzte Glied A_n, und setzt dessen Werth in die gegebene oder ursprüngliche Gleichung

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0;$$

so erhält diese letztere die Form:

$$(x^n - w^n) + A_1(x^{n-1} - w^{n-1}) + A_2(x^{n-2} - w^{n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + A_{n-1}(x - w) = 0,$$

in welcher offenbar jedes Glied des Polynoms durch $x - w$ theilbar ist **).

*) Der Verfasser hat diesen Beweis zuerst im XVII. Bande der Jahrbücher des k. k. polytechn. Instituts bekannt gemacht.

**) Nach *D'Alembert* (geb. zu Paris 1717; gest. 1783) läſst sich dieser wichtige Satz auch noch auf folgende, scharfsinnige Art beweisen:

Theilt man das Polynom X durch $x - w$ und die Division geht nicht auf, so kann der Rest, nach der Natur der Division, wenigstens kein x mehr enthalten; bezeichnet daher X' den (von x abhängigen) Quotienten, und R den (von x freien oder unabhängigen) Rest, so ist

$$X = (x - w)X' + R,$$

Zusatz. Theilt man wirklich, was sehr einfach ist, indem sich die sämmtlichen Quotienten nach dem bekannten Gesetze:

$$(x^n - w^n) : (x - w) = x^{n-1} + x^{n-2}w + x^{n-3}w^2 + \ldots$$
$$\ldots + xw^{n-2} + w^{n-1}$$

unmittelbar hinschreiben lassen, und ordnet dann wieder nach fallenden Potenzen von x; so erhält man die Gleichung

$$\beta) \quad x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + B_2 x^{n-3} + \ldots + B_{n-2} x + B_{n-1} = 0,$$

wobei die Coefficienten die leicht zu übersehenden und zu behaltenden Werthe haben:

$$B_1 = A_1 + w; \quad B_2 = A_2 + A_1 w + w^2;$$
$$B_3 = A_3 + A_2 w + A_1 w^2 + w^3; \text{ u. s. w.}$$
$$B_{n-1} = A_{n-1} + A_{n-2} w + A_{n-3} w^2 + \ldots + A_1 w^{n-2} + w^{n-1}.$$

Es entsteht also, was wir des fernern Gebrauches wegen noch ein Mal bemerken, die Gleichung β) aus der Division der gegebenen

$$\alpha) \quad x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0 \; (X = 0)$$

mit dem Factor $x - w$, wobei w eine Wurzel dieser letzten Gleichung bezeichnet; oder es ist:

$$\gamma) \quad X = (x - w)(x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + B_2 x^{n-3} + \ldots + B_{n-1}) = 0.$$

§. 27.

Lehrsatz.

Jede Gleichung $X = 0$ des n^{ten} Grades hat n Wurzeln, und zwar weder mehr noch weniger.

Denn ist w_1 die Wurzel, welche diese Gleichung (§§. 24., 25.) nothwendig besitzen mufs, so ist nach dem vorigen Paragraphe (Gl. γ):

$$X = (x - w_1)(x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + B_2 x^{n-3} + \ldots + B_{n-1}) = 0 \ldots (1$$

Setzt man nun in dieser Gleichung $x = w$, so wird, da w der Voraussetzung gemäfs eine Wurzel der Gleichung $X = 0$ ist, (§. 20., Erkl. 2) $X = 0$, folglich ist $0 = 0 + R$, also $R = 0$. Da aber R von x unabhängig ist, so mufs der Rest R schon vor dieser Substitution von $x = w$ Null gewesen, also die Division ohne Rest aufgegangen seyn.

Dieser Gleichung kann aber auf eine zweifache Art Genüge geleistet werden: Einmal indem der erste Factor Null wird, was eben die eine Wurzel $x = w_1$ hervorbringt, und das andere Mal, wenn der zweite Factor Null, d. i. wenn

$$X' = x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + B_2 x^{n-3} + \ldots + B_{n-1} = 0 \ldots (2$$

wird.

Bezeichnet man die Wurzel, welche (nach denselben §§. 24. und 25.) dieser Gleichung zukommen muſs, mit w_2, so ist wieder (§. 26.)

$$X' = (x - w_2)(x^{n-2} + C_1 x^{n-3} + C_2 x^{n-4} + \ldots + C_{n-2}) = 0 \ldots (3$$

da aber auch diese Gleichung nicht bloſs für $x = w_2$, d. i. für $x - w_2 = 0$, sondern auch für

$$X'' = x^{n-2} + C_1 x^{n-3} + C_2 x^{n-4} + \ldots + C_{n-2} = 0 \ldots (4$$

befriedigt wird; so sey w_3 wieder die Wurzel, welche diese Gleichung 4) nothwendiger Weise haben muſs, so ist auch

$$X'' = (x - w_3)(x^{n-3} + D_1 x^{n-4} + \ldots + D_{n-3}) = 0 \ldots (5$$

Ohne nun diese, sich immer wiederholenden Schlüsse weiter fortzusetzen, sieht man leicht, daſs sich endlich auch der zweite Factor, oder das Polynom, auf ein Binom reduciren wird, und daſs man zuletzt auf eine Gleichung von der Form kommt:

$$X^{(n-2)'} = (x - w_{n-1})(x + K_1) = 0,$$

welcher ebenfalls, nicht nur für $x - w_{n-1} = 0$, sondern auch für $x + K_1 = 0$, d. i. für $x = -K_1 = w_n$ (wenn wir nämlich diese letzte Wurzel durch w_n bezeichnen) Genüge geleistet wird.

Es ist also endlich, wenn man die Werthe dieser Gleichungen 1, 2, 3... schrittweise zurücksubstituirt:

$$X = (x - w_1) X' = (x - w_1)(x - w_2) X''$$
$$= (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3) X''' = \ldots$$
$$= (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3) \ldots (x - w_{n-1})(x - w_n) = 0,$$

woraus sofort folgt, daſs jede der n Gröſsen w_1, w_2, w_3 .. w_n

eine Wurzel der Gleichung $X=0$ ist, weil jede derselben für x substituirt, das Polynom X auf Null bringet.

Es ist aber auch zugleich leicht zu sehen, daſs es aufser diesen n Gröſsen keine mehr geben könne, welche die nämliche Eigenschaft besitzt; weil diese sonst nothwendig mit einer der genannten n Gröſsen zusammenfallen oder identisch seyn müſste: die Gleichung $X=0$ hat also genau n Wurzeln, und wenn diese durch w_1, w_2, w_3, ... w_{n-1}, w_n bezeichnet werden, so ist auch

$$X=(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)\ldots(x-w_{n-1})(x-w_n)\ldots \text{I.}$$

Zusatz. Das Polynom X einer Gleichung des n^{ten} Grades läſst sich also in n einfache oder Binomial-Factoren von der Form $x-w$, oder, wenn man will, von jener $ax+b$ auflösen oder zerlegen. Man findet diese, wenn man die n Wurzeln $x=w_1$, $x=w_2$... der Gleichung $X=0$ bestimmt und jede von x abzieht.

Da das Product zweier einfachen Factoren einen quadratischen oder Trinomial-Factor von der Form ax^2+bx+c gibt; so läſst sich das Polynom X auch, wenn n gerade ist, in $\frac{n}{2}$ quadratische, und wenn n ungerade ist, in $\frac{n-1}{2}$ quadratische und einen einfachen Factor zerlegen. So hat z. B. die Gleichung

$$x^4+x^3-7x^2-x+6=0$$

die Wurzeln $x=+1$, -1, $+2$ und -3; daher ist auch das Polynom

$$x^4+x^3-7x^2-x+6=(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$$
$$=(x^2-1)(x^2+x-6).$$

Um das Polynom $12x^3+16x^2-3x-4$ in Factoren zu zerlegen, hat man für die Gleichung

$$12x^3+16x^2-3x-4=0, \text{ oder}$$
$$x^3+\tfrac{4}{3}x^2-\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{3}=0$$

die Wurzeln: $x=\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{4}{3}$; folglich ist, wenn man die Brüche wegbringt $2x=1$, $2x=-1$ und $3x=-4$.

Man hat also

$$12x^3 + 16x^2 - 3x - 4 = (2x-1)(2x+1)(3x+4).$$

Anmerk. Aus dieser Form I. des Polynoms X, erhellet nun ebenfalls wieder, und zwar sehr einfach, der im §. 23. aufgestellte Satz (sammt den beiden Zusätzen). Denn bringen die Substitutionen von $x=a$ und $x=b$ in X verschiedene Zeichen hervor, so muſs es in den beiden Producten

$$(a-w_1)(a-w_2)(a-w_3)\ldots(a-w_n) \quad \text{und}$$
$$(b-w_1)(b-w_2)(b-w_3)\ldots(b-w_n)$$

wenigstens zwei correspondirende Factoren, z. B. $a-w_3$ und $b-w_3$ von entgegengesetzten Zeichen geben, wodurch aber auch die betreffende Wurzel w_3 zwischen a und b zu liegen kommt.

Die Zeichenverschiedenheit der beiden genannten Producte wird aber auch herbeigeführt, wenn überhaupt eine ungerade Anzahl solcher correspondirender Factoren entgegengesetzte Zeichen besitzt; wodurch zwischen a und b eine ungerade Anzahl von Wurzeln fällt.

Endlich folgt auch, daſs wenn eine gerade Anzahl solcher correspondirender Factoren entgegengesetzte Zeichen hat, also zwischen a und b eine gerade Anzahl von den Wurzeln fällt (wozu auch die Null zu rechnen ist), dadurch in den beiden Producten (d. i. in X für $x=a$ und $x=b$) keine Verschiedenheit der Zeichen eintreten kann.

§. 28.

Lehrsatz.

Ist $p+q\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $X=0$, so muſs der sogenannte conjugirte Ausdruck $p-q\sqrt{-1}$ ebenfalls eine Wurzel dieser Gleichung seyn.

Denn setzt man in

$$X = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

$x=p+q\sqrt{-1}$, so erhält man, nachdem die reellen und imaginären Glieder, jede Gattung für sich, zusammengenommen worden, einen Ausdruck von der Form (m. s. die Note auf S. 67)

$$P + Q\sqrt{-1},$$

in welchem also P nur gerade und Q nur ungerade Potenzen von q enthält. Durch die Substitution von

$$x = p - q\sqrt{-1}$$

in das obige Polynom X, ändert daher, da man blofs statt $+q$, $-q$ setzen darf, nur Q sein Zeichen, und man erhält als Resultat den Ausdruck

$$P - Q\sqrt{-1}.$$

Da nun, der Voraussetzung zufolge, $p + q\sqrt{-1}$ eine Wurzel von $X = 0$ seyn soll, so mufs die erste Substitution das Polynom X auf Null reduciren, es mufs nämlich seyn:

$$P + Q\sqrt{-1} = 0,$$

aus welcher Gleichung unmittelbar die beiden folgenden hervorgehen:

$$P = 0 \text{ und } Q\sqrt{-1} = 0,$$

ohne welche die erstere nicht bestehen kann *).

Zieht man aber diese beiden letztern Gleichungen von einander ab, so entsteht

$$P - Q\sqrt{-1} = 0.$$

Da nun aber die zweite Substitution von $x = p - q\sqrt{-1}$, welche das Resultat $P - Q\sqrt{-1}$ gegeben hat, wie man sieht, das Polynom X auf Null reducirt; so ist auch dieser Werth $p - q\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $X = 0$.

Zusatz 1. Da also die imaginären Wurzeln einer Gleichung, folglich auch die daraus resultirenden einfachen Factoren, immer paarweise vorhanden, und zu einander conjugirt sind, ferner die letztern die Form

*) Ohne den Grundsatz zu Hilfe zu nehmen, dafs in einer auf Null reducirten Gleichung, welche reelle und imaginäre Gröfsen enthält, sowohl die reellen, wie auch die imaginären Gröfsen für sich genommen, sich aufheben oder Null seyn müssen; kann man die Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ aus jener $P + Q\sqrt{-1} = 0$ auch so ableiten:

Diese letzte Gleichung gibt $P = -Q\sqrt{-1}$, und wenn man quadrirt, $P^2 = -Q^2$ oder $P^2 + Q^2 = 0$, welche Gleichung offenbar fordert, dafs sowohl $P = 0$ wie auch $Q = 0$ (also auch $Q\sqrt{-1} = 0$) sey, weil die Summe zweier Quadrate auf keine andere Art Null seyn kann.

$$(x - p - q\sqrt{-1})\,(x - p + q\sqrt{-1})$$

haben, welche zusammenmultiplicirt den reellen quadratischen Factor

$$(x - p)^2 + q^2 = x^2 - 2px + p^2 + q^2$$

geben; so läſst sich das Polynom einer jeden höhern Gleichung $X = 0$, immer in reelle quadratische Factoren von der Form $x^2 + ax + b$ auflösen, wozu noch ein reeller einfacher Factor kommt, wenn die Gleichung von ungeradem Grade ist.

Zusatz 2. Da, wie man sieht, das Product

$$(x - p - q\sqrt{-1})\,(x - p + q\sqrt{-1}) = (x - p)^2 + q^2$$

zweier conjugirten imaginären Factoren nicht nur reell, sondern zugleich wesentlich positiv ist; so können die imaginären Wurzeln einer Gleichung auf das in dem Polynome X, durch irgend eine (reelle) Substitution für x entstehende Zeichen, keinen Einfluſs ausüben; es kann also auch, wie wir schon oben (§. 24., Anmerk. 2) gesehen haben, wenn die Gleichung $X = 0$ lauter imaginäre Wurzeln hat, das Polynom X für gar keinen reellen Werth von x negativ ausfallen.

Eigenschaften der Coefficienten.

§. 29.

Verrichtet man, um die Coefficienten des Polynoms X durch die Wurzeln w_1, w_2 ... auszudrücken, die in der Gleichung I., §. 27. angedeutete Multiplication der n Binomialfactoren, und ordnet nach fallenden Potenzen von x; so erhält man

$$X = x^n - C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} - C_3 x^{n-3} + \ldots \pm C_n \ldots \text{II.}$$

wobei $C_1 = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n$

$$C_2 = w_1 w_2 + w_1 w_3 + \ldots + w_1 w_n + w_2 w_3 + w_2 w_4 + \ldots$$
$$\ldots + w_2 w_n + \ldots + \ldots + w_{n-1} w_n$$

$$C_3 = w_1 w_2 w_3 + w_1 w_2 w_4 + \ldots + w_1 w_2 w_n + w_2 w_3 w_4 + \ldots$$
$$+ \ldots + w_{n-2} w_{n-1} w_n$$

. .

$C_n = w_1 w_2 w_3 \ldots w_{n-1} w_n$ ist.

Es besteht also der zweite Coefficient aus der Summe aller Wurzeln (der Combinationen derselben zu 1), diese mit entgegengesetzten Zeichen genommen; der dritte Coefficient aus der Summe der Combinationen der n Wurzeln zu 2, mit demselben Zeichen; der vierte Coefficient aus der Summe der Combinationen der Wurzeln zu 3, diese mit entgegengesetzten Zeichen genommen u. s. w.; endlich der letzte Coefficient aus der Combination der Wurzeln zu n, d. i. aus dem Producte aller Wurzeln, dieses mit demselben oder entgegengesetzten Zeichen genommen, je nachdem dieser Coefficient in einer ungeraden oder geraden Stelle steht, d. i. je nachdem der Ordnungsexponent der Gleichung gerade oder ungerade ist *).

Zusatz 1. Die Coefficienten sind also (§. 1., Erkl. 9) symmetrische Functionen von den Wurzeln der Gleichung.

Zusatz 2. Fehlt in einer Gleichung das zweite Glied, so muſs die Summe der positiven Wurzeln der Summe der negativen gleich seyn. Fehlt das letzte Glied, so muſs eine Wurzel gleich Null seyn.

Zusatz 3. Sind die Wurzeln w_1, w_2... sämmtlich negativ, also die Binomialfactoren durchgehends von der Form $(x + w)$; so kann in dem Producte I., §. 27., kein negatives Glied vorkommen, und es gehen daher die negativen Zeichen des zweiten, vierten, sechsten... Gliedes

*) Man könnte leicht versucht werden zu glauben, daſs in dieser angeführten Eigenschaft der Coefficienten, das Mittel zur Bestimmung der Wurzeln, d. i. zur Auflösung der Gleichungen liege, indem man dadurch eben so viele Gleichungen bilden kann, als zu bestimmende Wurzeln vorhanden sind. Allein, man überzeugt sich leicht, daſs die aus der Elimination resultirende Endgleichung, welche nur noch eine dieser unbekannten Wurzeln enthält, und die man sofort auflösen müſste, genau die ursprüngliche Gleichung ist.

der Gleichung II. in die positiven über, was nur ein besonderer Fall des folgenden Satzes ist.

§. 30.

Lehrsatz.

Aendert man in einer Gleichung $X=0$ die Zeichen des zweiten, vierten, sechsten... $2m^{ten}$ Gliedes, so verwandelt man dadurch die Wurzeln dieser Gleichung in die mit entgegengesetzten Zeichen.

Denn setzt man, um alle Wurzeln der Gleichung $X=0$ in jene mit entgegengesetzten Zeichen zu verwandeln, in dieser statt $+x$, $-x$; so erhält man für n gerade:

$$x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - A_3 x^{n-3} + \ldots - A_{n-1} x + A_n = 0,$$

und für n ungerade:

$$-x^n + A_1 x^{n-1} - A_2 x^{n-2} + \ldots - A_{n-1} x + A_n = 0,$$

oder, wenn man mit -1 multiplicirt, wieder

$$x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - A_3 x^{n-3} + \ldots + A_{n-1} x - A_n = 0,$$

wodurch sofort der ausgesprochene Satz erwiesen ist.

So hat z. B. von den beiden Gleichungen

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0 \quad \text{und}$$
$$x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$$

die erste die Wurzeln: $+2$, $+4$, -3, und die letzte jene mit entgegengesetzten Zeichen: -2, -4, $+3$.

§. 31.

Erklärung.

Haben zwei auf einander folgende Glieder des Polynoms X einer Gleichung, gleiche Zeichen, so sagt man, es finde eine Zeichenfolge (Permanenz) Statt; haben sie ungleiche Zeichen, so wird diefs ein Zeichenwechsel (Variation) genannt.

Es kommen also in einer jeden Gleichung, in welcher kein Glied fehlt, zusammengenommen eben so viele Zeichen Wechsel und Folgen vor, als der Grad der Gleichung (n) Einheiten hat. So gibt z. B. die Gleichung

$$x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 8x - 12 = 0$$

3 Zeichenwechsel und 2 Zeichenfolgen.

§. 32.

Lehrsatz.

Eine Gleichung $X = 0$, in welcher kein Glied fehlt, kann nicht mehr positive Wurzeln, als Zeichenwechsel, und nicht mehr negative Wurzeln haben, als Zeichenfolgen vorhanden sind.

Denn stellt man das Polynom X', welches einer Gleichung des m^{ten} Grades entsprechen soll, auf folgende Art dar:

$$X' = x^m + + \ldots - A_p x^p - - \ldots + A_q x^q + + \ldots \text{u. s. w.} \pm A_u x^u \pm \pm \ldots \pm A_m,$$

wobei $A_p x^p$ das erste vorkommende negative Glied, $A_q x^q$ das zuerst darauf folgende positive Glied u. s. w. endlich $A_u x^u$ jenes positive oder negative Glied bezeichnet, in welchem der letzte Zeichenwechsel Statt findet, und multiplicirt dieses mit dem einfachen Factor $x - w$, wo w positiv seyn soll; so erhält man:

$$X'(x-w) = x^{m+1} + + \ldots \left.\begin{matrix} - A_p \\ - - \ldots - \alpha w \end{matrix}\right\} x^{p+1} \left.\begin{matrix} - - \ldots + A_q \\ + + \ldots + \beta w \end{matrix}\right\} x^{q+1} \left.\begin{matrix} + + \ldots \text{u. s. w.} \pm A_u \\ - - \ldots\ldots\ldots \pm \varepsilon w \end{matrix}\right\} x^{u+1} \left.\begin{matrix} \pm \ldots \pm A_m \\ \mp \ldots \mp \nu w \end{matrix}\right\} x \mp \mu w$$

und es ist also das Product $X'(x - w)$ von der Form

$$x^{m+1} \ldots - A'_p x^{p+1} \ldots + A'_q x^{q+1} \ldots \text{u. s. w.} \pm A'_u x^{u+1} \ldots \mp \mu w.$$

Obschon nun in diesem Producte die Zeichen der Zwischenglieder unbekannt sind, so ist es doch entschieden, daſs vom ersten Gliede x^{m+1} bis zu jenem $A'_p x^{p+1}$ wenigstens ein, bis zum Gliede $A'_q x^{q+1}$ wenigstens zwei u. s. f., endlich bis zum Gliede $A'_u x^{u+1}$ wenigstens eben so viele Zeichenwechsel Statt finden, als ursprünglich in X' vom ersten Gliede x^m bis zu dem entsprechenden Gliede $A_u x^u$, in welchem wir den letzten Zeichenwechsel angenommen haben, deren vorkommen. Da nun das letzte Glied μw, welches das Zeichen geändert hat, auſserdem noch einen Zeichenwechsel begründet: so hat das Product $X'(x-w)$ wenigstens einen Zeichenwechsel mehr als das Polynom X'.

Stellt daher X' das Product aller einfachen Factoren dar, welche aus den negativen und imaginären Wurzeln der Gleichung $X=0$ entspringen, und bezeichnen w_1, w_2, w_3... die positiven Wurzeln dieser Gleichung; so hat man

$$X = X'(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)\ldots,$$

wobei $X'=1$ ist, wenn die genannte Gleichung weder negative noch imaginäre Wurzeln haben sollte. Es hat aber nach dem so eben Erwiesenen $X'(x-w_1)$ wenigstens einen, $X'(x-w_1)(x-w_2)$ wenigstens zwei u. s. w. Zeichenwechsel mehr, als X'; folglich sind, wenn auch X' gar keinen Zeichenwechsel enthält, im Polynome X wenigstens eben so viele Zeichenwechsel, als positive Wurzeln w_1, w_2... vorhanden.

Geht ferner die Gleichung $X=0$, wenn man die Zeichen des zweiten, vierten, . . . $2m^{ten}$ Gliedes ändert, in jene $\underline{X}=0$ über; so haben (§. 30.) die sämmtlichen Wurzeln dieser letzten Gleichung (bei einerlei numerischem Werth) das entgegengesetzte Zeichen von jenen der ursprünglichen Gleichung. Es hat also auch diese Gleichung $\underline{X}=0$ wenigstens eben so viele Zeichenwechsel, als die Gleichung $X=0$ negative Wurzeln besitzt, oder weil, wie man leicht findet, wenn in X kein Glied fehlt, in der ursprünglichen Gleichung $X=0$ eben so viele Zeichenfolgen,

als in jener $\underline{X}=o$ Zeichenwechsel sind; so hat die Gleichung $X=o$ unter dieser Bedingung wenigstens eben so viele Zeichenfolgen, als negative Wurzeln *).

Zusatz 1. Fehlen in der Gleichung $X=o$ ein oder mehrere Glieder, so ist es am einfachsten, diesen Satz so einzukleiden: die Gleichung $X=o$ kann nicht mehr positive Wurzeln haben, als es in X, und nicht mehr negative Wurzeln, als es in $\underline{X}$ Zeichenwechsel gibt.

Will man aber die Anzahl der negativen Wurzeln, welche die Gleichung $X=o$ höchstens haben kann, unmittelbar an den Coefficienten dieser Gleichung erkennen, so mufs man berücksichtigen, dafs jeder unmittelbare und jeder durch eine gerade Zahl unterbrochene Zeichenwechsel in $\underline{X}$, eine ähnliche Zeichenfolge in X veranlafst, während jeder durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochene Zeichenwechsel in $\underline{X}$ auch in X einen solchen Wechsel bildet.

Es kann also auch die Anzahl der negativen Wurzeln der Gleichung $X=o$ nicht gröfser seyn, als die Anzahl der unmittelbaren und durch eine gerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenfolgen, vermehrt um die Anzahl der durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenwechsel in X.

Zusatz 2. Eine Gleichung, in welcher kein Glied fehlt, und deren sämmtliche Wurzeln reell sind, hat also genau so viele positive Wurzeln als Zeichenwechsel, und so viele negative Wurzeln, als Zeichenfolgen. Denn mehr positive Wurzeln als Zeichenwechsel,

*) Dieser wichtige Lehrsatz wird der *Cartesische*, oder noch gewöhnlicher, der *Harriot*'sche (nach dem englischen Geometer *Harriot*, geb zu Oxford 1560; gest. zu London 1621) genannt. Der hier geführte Beweis ist im Wesentlichen der von *Gaufs* in *Crelle's* Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. III. S. 1 gegebene.

kann die Gleichung zufolge des eben erwiesenen Satzes, und weniger wieder deſshalb nicht haben, weil sonst, da die Anzahl aller Wurzeln dem Ordnungsexponenten (und sofort auch der Summe der Zeichenwechsel und Folgen) der Gleichung gleich seyn muſs, mehr negative Wurzeln als Zeichenfolgen vorhanden seyn müſsten; was gleichfalls gegen diesen Satz streitet. Das nämliche läſst sich von den negativen Wurzeln sagen.

So hat z. B. die im §. 30. angeführte Gleichung:

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0,$$

in welcher zwei Zeichenwechsel und eine Folge Statt finden: zwei positive und eine negative Wurzel.

Transformation der Gleichungen.

§. 33.

Aufgabe.

Eine gegebene Gleichung $X = 0$ in eine andere $Y = 0$ zu verwandeln, in welcher die sämmtlichen Wurzeln um a kleiner, als in der ursprünglichen Gleichung sind.

Auflösung.

Bezeichnet man die Unbekannte, oder das Symbol aller Wurzeln der transformirten Gleichung durch y; so soll, der Bedingung gemäſs, $y = x - a$, oder $x = a + y$ seyn. Dieser Werth für x in die gegebene Gleichung $X = 0$ substituirt, gibt für die transformirte Gleichung:

$$Y = y^n + \mathfrak{Z}_1 y^{n-1} + \mathfrak{Z}_2 y^{n-2} + \ldots + \mathfrak{Z}_{n-1} y + \mathfrak{Z}_n = 0 \ldots (\beta$$

wobei, wie man am einfachsten aus der Entwicklung α), §. 21. findet, wenn man dort $x = a$, $w = y$ setzt, und die Ordnung in den Potenzen von w umkehrt:

$$\mathfrak{Z}_n = a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \ldots + A_{n-1} a + A_n$$

$$\mathfrak{Z}_{n-1} = na^{n-1} + (n-1)A_1 a^{n-2} + (n-2)A_2 a^{n-3} + \ldots + A_{n-1}$$

$$\mathfrak{Z}_{n-2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} A_1 a^{n-3} + \ldots + A_{n-2}$$

. .

$$\mathfrak{Z}_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 + (n-1) A_1 a + A_2$$

$$\mathfrak{Z}_1 = na + A_1 \quad \text{ist.}$$

§. 34.

Aufgabe.

Eine Gleichung in eine andere zu verwandeln, in welcher das zweite Glied fehlt; oder mit andern Worten, aus einer gegebenen Gleichung das zweite Glied wegzuschaffen.

Auflösung.

Transformirt man nach dem vorigen Paragraphe die Gleichung $X = 0$ in jene $Y = 0$, so soll, der Bedingung der Aufgabe zufolge, darin $\mathfrak{T}_1$, oder wenn man dafür den vorhin gefundenen Werth setzt, $na + A_1 = 0$ seyn. Aus dieser Bedingungsgleichung hat man für die hier noch unbestimmte Gröſse a:

$a = -\frac{A_1}{n}$, also wegen $x = y + a$ auch $x = y - \frac{A_1}{n}$.

Um also aus der Gleichung

$$X = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0$$

das zweite Glied wegzuschaffen, wird man statt der Unbekannten x, eine neue y setzen, und davon den Quotienten aus dem höchsten Exponenten von x in den zweiten Coefficienten abziehen; oder auch nur statt x, $x - \frac{A_1}{n}$ setzen.

Beispiel.

Um aus der Gleichung

$$x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 6x - 5 = 0$$

das zweite Glied wegzuschaffen, muſs man

$$x = y - (-\tfrac{8}{4}) = y + 2$$

setzen. Anstatt diese Substitution und Entwicklung von vorne zu machen, wollen wir die Gesetze des vorigen Paragraphes benützen. Man erhält für die transformirte Gleichung, wegen $n = 4$ und $a = 2$:

$$y^4 + \mathfrak{T}_1 y^3 + \mathfrak{T}_2 y^2 + \mathfrak{T}_3 y + \mathfrak{T}_4 = 0,$$

wobei

$$\mathfrak{T}_4 = (2)^4 - 8(2)^3 + 2(2)^2 + 6(2) - 5 = -33$$
$$\mathfrak{T}_3 = 4(2)^3 - 24(2)^2 + 4(2) + 6 = -50$$
$$\mathfrak{T}_2 = 6(2)^2 - 24(2) + 2 = -22$$
$$\mathfrak{T}_1 = 4(2) - 8 = 0$$

ist, so, daſs man für die gesuchte Gleichung, in welcher nun das zweite Glied fehlt, hat:

$$y^4 - 22y^2 - 50y - 33 = 0.$$

Anmerk. 1. Daſs diese angezeigte Substitution von $x = y - \frac{A_1}{n}$ zum Ziele führt, läſst sich nun auch hinterher (*a posteriori*) so einsehen: Wegen $y = x + \frac{A_1}{n}$ sind die Wurzeln der transformirten Gleichung $Y = 0$:

$$w_1 + \frac{A_1}{n},\ w_2 + \frac{A_1}{n},\ \ldots\ w_n + \frac{A_1}{n},$$

folglich ist der zweite Coefficient dieser Gleichung, als Summe der Wurzeln (§. 29.), vom Zeichen abgesehen:

$$w_1 + w_2 + \ldots w_n + n.\frac{A_1}{n} = w_1 + w_2 + \ldots + w_n + A_1,$$

oder wegen

$$A_1 = -(w_1 + w_2 + \ldots + w_n)$$

gleich Null.

Anmerk. 2. Um eben so aus einer Gleichung das dritte, vierte Glied u. s. w. wegzuschaffen, müſste man in der transformirten Gleichung $Y = 0$: $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ etc. gleich Null setzen, und aus diesen Bedingungsgleichungen, welche, wie die Werthe von $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3 \ldots$ des vorigen Paragraphes zeigen, vom zweiten, dritten etc. Grade sind, *a* bestimmen.

§. 35.

Aufgabe.

Eine Gleichung in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln *m* Mal so groſs sind, als die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Auflösung.

Wird die gegebene Gleichung wieder durch $X = 0$, die transformirte durch $Y = 0$ bezeichnet; so soll der Bedingung

gemäſs, $y = mx$ oder $x = \frac{y}{m}$ seyn. Dieser Werth für x in der gegebenen Gleichung $X = 0$ substituirt, und diese dann noch zur Wegschaffung der Brüche mit $(m)^n$ durchaus multiplicirt, gibt für die transformirte Gleichung:

$$y^n + mA_1y^{n-1} + m^2A_2y^{n-2} + m^3A_3y^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + m^{n-1}A_{n-1}y + m^nA_n = 0:$$

man darf also nur, wenn die etwa fehlenden Glieder des Polynoms X mit den Coefficienten Null eingeführt werden, unter die auf einander folgenden Glieder von X, die geometrische Reihe $1, m, m^2, m^3 \ldots m^{n-1}, m^n$ setzen, je zwei über einander stehende Glieder multipliciren, und statt x durchaus y schreiben, um die gesuchte transformirte Gleichung zu erhalten.

Beispiel.

Es soll die Gleichung $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$, welche die Wurzeln 1, 2 und -4 besitzt, in eine andere transformirt werden, deren Wurzeln drei Mal so groſs sind. Nach dem angegebenen Verfahren hat man:

$$\begin{array}{cccc} x^3 + & x^2 - & 10x + & 8 = 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ \hline \end{array}$$

also: $y^3 + 3y^2 - 90y + 216 = 0$

für die gesuchte Gleichung, welche in der That die Wurzeln 3, 6 und -12 besitzt.

Anmerk. Diese Transformation, in welcher natürlich auch m ein Bruch seyn kann, dient, wie wir im folgenden Paragraphe sehen werden, vorzüglich dazu, aus einer Gleichung die vorhandenen Brüche so wegzuschaffen, daſs dabei der erste Coefficient ebenfalls wieder gleich der Einheit bleibt, wie es für eine gut geordnete Gleichung (§. 20.) verlangt wird.

§. 36.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Gleichung $X=0$, die vorhandenen Brüche wegzuschaffen.

Auflösung.

Sey z. B. um sogleich die Ideen zu fixiren, die gegebene Gleichung

$$x^4 + \frac{a}{p}x^3 + \frac{b}{q}x^2 + \frac{c}{r}x + \frac{d}{s} = 0.$$

Verwandelt man diese Gleichung, nach dem vorigen Paragraphe, in eine andere, deren Wurzeln m Mal so gross sind, so hat man

$$y^4 + \frac{ma}{p}y^3 + \frac{m^2 b}{q}y^2 + \frac{m^3 c}{r}y + \frac{m^4 d}{s} = 0;$$

ist daher M das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller vorkommenden Nenner p, q, r..., so erhält man in jedem Falle in dieser letzten Gleichung ganze Coefficienten, wenn man $m = M$ nimmt: um also aus einer Gleichung die vorhandenen Brüche so wegzuschaffen, dass dadurch der erste Coefficient ungeändert gleich Eins bleibt, setzte man, wenn M das kleinste Vielfache aller Nenner bezeichnet, die Unbekannte $x = \frac{y}{M}$, d. i. man transformire die gegebene Gleichung $X = 0$ nach dem vorigen Paragraphe in eine andere, deren Wurzeln M Mal so gross sind, so ist diese Gleichung, nach gehöriger Reduction, die gesuchte, von den Brüchen befreite Gleichung.

Anmerk. In vielen Fällen findet man für m auch Werthe, welche kleiner als M, und dabei doch so beschaffen sind, dass $\frac{m}{p}$, $\frac{m^2}{q}$, $\frac{m^3}{r}$ u. s. w. ganze Zahlen werden; mit diesen Werthen von m erhält die transformirte Gleichung kleinere Coefficienten, und wird sonach einfacher.

Beispiel.

Um aus der Gleichung $x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8} = 0$ die Brüche wegzuschaffen, wird man nach dieser allgemeinen Regel, da 8 der kleinste gemeinschaftliche Nenner, oder das kleinste Vielfache ist, $x = \frac{y}{8}$ setzen, oder nach

dem Verfahren des vorigen Paragraphes die Wurzeln acht Mal so grofs machen. Man erhält daher

$$\begin{array}{cccccccccc} x^4 & - & \frac{1}{2}x^3 & + & \frac{3}{4}x^2 & - & \frac{5}{4}x & + & \frac{3}{8} & = 0 \\ 1 & & 8 & & 8^2 & & 8^3 & & 8^4 & \\ \hline \end{array}$$

also $y^4 - 4y^3 + 48y^2 - 640y + 1536 = 0$

für die von den Brüchen befreite Gleichung, deren Wurzeln sofort acht Mal so grofs als die der gegebenen sind.

Es ist indefs leicht zu sehen, dafs es hier hinreichend ist, $x = \frac{y}{2}$ zu setzen, d. i. die gegebene Gleichung in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln doppelt so grofs sind; denn man hat dafür

$$\begin{array}{cccccccccc} x^4 & - & \frac{1}{2}x^3 & + & \frac{3}{4}x^2 & - & \frac{5}{4}x & + & \frac{3}{8} & = 0 \\ 1 & & 2 & & 4 & & 8 & & 16 & \\ \hline \end{array}$$

$$y^4 - y^3 + 3y^2 - 10y + 6 = 0,$$

welche Gleichung viel einfacher als die vorige ist, und deren Wurzeln nur doppelt so grofs als die der gegebenen sind.

§. 37.

Aufgabe.

Eine Gleichung in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln die Differenzen aus je zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung sind; d. i. für eine gegebene Gleichung die sogenannte *Differenzen-Gleichung* zu finden.

Auflösung.

Sind w_1, w_2, w_3 ... w_n die Wurzeln der gegebenen Gleichung $X = 0$, welche sofort sämmtlich durch x dargestellt werden; ist ferner y die Unbekannte der gesuchten oder transformirten Gleichung $Y = 0$: so ist der Bedingung der Aufgabe zufolge, y der allgemeine Stellvertreter für die sämmtlichen Differenzen $w_1 - w_1$, $w_1 - w_2$, $w_1 - w_3$..., $w_2 - w_1$, $w_2 - w_2$, ... u. s. f., welche sich aus den Wurzeln der gegebenen Gleichung bilden lassen.

Da nun w_1 und w_2 Wurzeln der Gleichung $X = 0$ sind, so bestehen die Gleichungen:

$$w_1^n + A_1 w_1^{n-1} + A_2 w_1^{n-2} + \ldots + A_{n-1} w_1 + A_n = 0 \ldots (1$$
$$w_2^n + A_1 w_2^{n-1} + A_2 w_2^{n-2} + \ldots + A_{n-1} w_2 + A_n = 0 \ldots (2$$

Die Gleichung $w_2 - w_1 = y$ gibt $w_2 = w_1 + y$, und wenn dieser Werth für w_2 in die letzte Gleichung 2) substituirt wird, so erhält man nach §. 21. (Gl. α)), wenn man dort statt w, y setzt:

$$A + \tau_1 y + \tau_2 y^2 + \tau_3 y^3 + \ldots + \tau_{n-1} y^{n-1} + \tau_n y^n = 0,$$

wobei A, τ_1, $\tau_2 \ldots$ aus X, X_1, $X_2 \ldots$ erhalten werden, wenn man dort statt x, w_1 setzt, indem man hat:

$$A = w_1^n + A_1 w_1^{n-1} + \ldots + A_{n-1} w_1 + A_n$$
$$\tau_1 = n w_1^{n-1} + (n-1) A_1 w_1^{n-2} + \ldots + A_{n-1}$$
$$\tau_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} w_1^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} A_1 w_1^{n-3} + \ldots + A_{n-2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\tau_n = 1.$$

Da nun, zufolge der Gleichung 1), $A = 0$ ist, so hat man:

$$\tau_1 y + \tau_2 y^2 + \tau_3 y^3 + \ldots + \tau_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0,$$

oder, wenn man durch y abkürzt, d. i. die Wurzel $y = 0$ (die den Differenzen $w_1 - w_1$, $w_2 - w_2$ etc. entspricht) sogleich ausscheidet, auch

$$\tau_1 + \tau_2 y + \tau_3 y^2 + \ldots + \tau_{n-1} y^{n-2} + y^{n-1} = 0 \ldots (\gamma$$

in welcher Gleichung also τ_1, $\tau_2 \ldots \tau_{n-1}$ Functionen von w_1 sind. Eliminirt daher aus dieser und der Gleichung 1) die Gröfse w_1, so ist die daraus entstehende Gleichung in y, deren Coefficienten gewisse Functionen von den gegebenen A_1, $A_2 \ldots A_n$ seyn werden, die Gesuchte.

Da man aber offenbar statt der hier gewählten Differenz $w_2 - w_1 = y$, eben so gut jede der übrigen Differenzen $w_2 - w_3 = y$, $w_3 - w_2 = y$ u. s. f. auf die nämliche Art hätte in Rechnung bringen können; so kann man auch gleichzeitig in der Gleichung 1) und in den Gröfsen

$r_1, r_2, r_3 \ldots r_{n-1}$ (als Functionen von w_1) w_1 nach und nach mit den übrigen Wurzeln $w_2, w_3 \ldots w_n$ vertauschen, und man muſs immer noch durch die Elimination einer jeden derselben, aus den betreffenden Gleichungen 1) und γ) die nämliche Endgleichung wie vorhin erhalten. Da man also auch in der Gleichung 1) und in $r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$ anstatt nach und nach die Wurzeln $w_1, w_2 \ldots w_n$ zu schreiben, sogleich ihren allgemeinen Stellvertreter x setzen kann, wodurch die Gleichung 1) in die ursprüngliche $X = 0$, und die Coefficienten $r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$ der Gleichung γ), in $X_1, X_2 \ldots X_{n-1}$ (§. 21.), d. i. in die ersten, zweiten, dritten... $n - 1^{ten}$ abgeleiteten Polynome von X übergehen: so wird man zur Auffindung der der Gleichung $X = 0$ entsprechenden Differenzen-Gleichung $Y = 0$, aus den beiden Gleichungen $X = 0$ und

$$X_1 + X_2 y + X_3 y^2 + \ldots + X_{n-1} y^{n-2} + y^{n-1} = 0,$$

wo $X_1, X_2 \ldots$ die eben genannten Werthe haben, x eliminiren.

Anmerk. Es ist leicht zu sehen, daſs wenn unter den Wurzeln $w_1, w_2 \ldots w_n$ zwei oder mehrere einander gleich sind, in der Differenzen-Gleichung $Y = 0$ mehrere Wurzeln Null seyn müssen; jedes Paar gleicher Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $X = 0$, liefert für die Differenzen-Gleichung $Y = 0$ zwei Wurzeln, jede gleich Null.

Beispiele.

1. Um für die Gleichung $x^3 - 7x + 6 = 0$ die Differenzen-Gleichung zu finden, hat man

$$X = x^3 - 7x + 6, \quad X_1 = 3x^2 - 7, \quad X_2 = 3x;$$

es muſs daher aus den beiden Gleichungen

$$x^3 - 7x + 6 = 0 \quad \text{und} \quad 3x^2 - 7 + 3xy + y^2 = 0$$

x eliminirt werden. Das Resultat dieser Elimination ist, wie man ohne Mühe findet:

$$y^6 - 42y^4 + 441y^2 - 400 = 0,$$

welches sofort die gesuchte Differenzen-Gleichung ist. In der That sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung: 1,

2, — 3, während jene dieser letzten Gleichung

$\pm 1 = \pm (2 - 1)$, $\pm 4 = \pm (1 + 3)$ und

$\pm 5 = \pm (2 + 3)$ sind.

2. Auf die nämliche Art findet man

$$y^6 - 36y^4 + 324y^2 + 459 = 0,$$

als Differenzen-Gleichung für jene $x^3 - 6x - 7 = 0$.

§. 38.

Der Grad der Differenzen-Gleichung $Y = 0$, welche sofort aus der im vorigen Paragraphe erwähnten Elimination, als Endgleichung, hervorgeht, läſst sich im Voraus *(a priori)* angeben; und dieser ist immer gleich $n(n-1)$, weil sich aus den n Wurzeln $w_1, w_2 \ldots w_n$ der gegebenen Gleichung, wenn man jene Differenzen $w_1 - w_1$, $w_2 - w_2$, $w_3 - w_3$ u. s. w., wie es oben geschehen ist, ausschlieſst, eben so oft zu zwei verbinden lassen (sie bilden die zweite Variations-Classe), und dadurch also eben so viele Wurzeln y für die Gleichung $Y = 0$ geben. So ist im vorigen Beispiele $n = 3$, folglich die Differenzen-Gleichung vom $3 . 2 = 6^{ten}$ Grade.

Da ferner diese $n(n-1)$ Differenzen paarweise so vorkommen, daſs jedes Paar denselben numerischen Werth, aber entgegengesetzte Zeichen besitzt, indem man hat $w_1 - w_2$ und $w_2 - w_1 = -(w_1 - w_2)$, $w_2 - w_3$ und $w_3 - w_2 = -(w_2 - w_3)$ u. s. w.: so muſs, wenn α eine Wurzel der Differenzen-Gleichung $Y = 0$ ist, auch $-\alpha$ eine solche seyn, wenn β eine Wurzel ist, auch $-\beta$ eine Wurzel seyn u. s. f., so, daſs das Polynom Y (§. 27. Zus.) aus den Factoren

$$Y = (y+\alpha)(y-\alpha)(y+\beta)(y-\beta)\ldots = (y^2-\alpha^2)(y^2-\beta^2)\ldots,$$

nämlich aus $n(n-1)$ einfachen, oder $\frac{n(n-1)}{2}$ quadratischen Factoren von der letztern Form besteht. Da nun aber die Differenzen-Gleichung die Form hat:

$$(y^2 - \alpha^2)(y^2 - \beta^2)(y^2 - \gamma^2)\ldots = 0,$$

und das Product dieser quadratischen Factoren offenbar nur gerade Potenzen von y enthalten kann; so wird,

wenn man der Kürze wegen (die Anzahl dieser letztern Factoren) $\frac{n(n-1)}{2} = m$ setzt, die Differenzen-Gleichung auch von der Form seyn:

$$y^{2m} + \delta_1 y^{2m-2} + \delta_2 y^{2m-4} + \ldots + \delta_{m-1} y^2 + \delta_m = 0.$$

Setzt man endlich in dieser Gleichung $y^2 = z$, so erhält man

$$z^m + \delta_1 z^{m-1} + \delta_2 z^{m-2} + \ldots + \delta_{m-1} z + \delta_m = 0 \ldots (\varepsilon$$

eine Gleichung, deren Ordnungsexponent nur halb so grofs, als der der Differenzen-Gleichung ist, und deren Wurzeln (y^2) sofort die Quadrate der Differenzen der ursprünglichen Gleichung $X = 0$ sind. Aus diesem Grunde heifst auch diese Gleichung ε) die Gleichung der quadrirten Differenzen für die gegebene Gleichung $X = 0$.

So ist für die im vorigen Paragraphe als Beispiel gewählte Gleichung $x^3 - 7x + 6 = 0$:

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 400 = 0,$$

die Gleichung der quadrirten Differenzen, welche man aus der oben gefundenen Differenzen-Gleichung findet, wenn man darin $y^2 = z$ setzt. Die drei Wurzeln dieser letzten Gleichung sind 1, 16 und 25.

Anmerk. Da die Differenzen der Wurzeln $w_1, w_2 \ldots w_n$ nicht geändert werden, wenn man die sämmtlichen Wurzeln um dieselbe Gröfse a z. B. vermehrt oder vermindert; so kann man auch zur Vereinfachung der Rechnung, aus der gegebenen Gleichung $X = 0$, zuvor das zweite Glied wegschaffen (§. 34.), und dann erst die Differenzen-Gleichung $Y = 0$, oder die der quadrirten Differenzen $Z = 0$, welche also dadurch nicht geändert wird, bestimmen.

So findet man z. B. für die Gleichung $x^3 - x^2 + 2 = 0$, wenn man zuvor das zweite Glied, und dann durch Verdreifachung der Wurzeln, die entstehenden Brüche wegschafft *), als Gleichung der quadrirten Differenzen:

$$z^3 - 18z^2 + 81z + 72900 = 0.$$

*) Man kann bei der Wegschaffung des zweiten Gliedes, wenn (§. 34.) $\frac{A_1}{n}$ keine ganze Zahl wird, zur Vermeidung der Brüche,

Da man aber hier die ursprünglichen Wurzeln x drei Mal, folglich jene z neun Mal so groſs gemacht hat; so ist es in diesem Falle einfacher, das zweite Glied nicht wegzuschaffen, wodurch man die mit neun Mal kleinern Wurzeln versehene Gleichung: $z^3 - 2z^2 + z + 100 = 0$ erhält.

Die gleichen Wurzeln.

§. 39.

Bezeichnet man in der Gleichung $X = 0$, deren Wurzeln wieder $w_1, w_2 \ldots w_n$ seyn sollen, Kürze halber, die Binome $x - w_1$, $x - w_2$, $x - w_3 \ldots x - w_n$, beziehungsweise durch b_1, b_2, $b_3 \ldots b_n$; so hat man (Gl. I. §. 27.):

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1} b_n \quad (1$$

Setzt man nun in dieser Gleichung statt x, $x + \alpha$, wo α eine ganz willkürliche Gröſse bezeichnet, so geht der erste Theil derselben über in (§. 21.):

$$X + X_1 \alpha + X_2 \alpha^2 + \ldots + X_{n-1} \alpha^{n-1} + \alpha^n,$$

wobei X_1, $X_2 \ldots$ die bekannten, durch die auf einander folgenden Ableitungen aus X entstehenden, Werthe (§. 21.) haben. Der zweite Theil dieser Gleichung aber verwandelt sich in

$$(b_1 + \alpha)(b_2 + \alpha)(b_3 + \alpha) \ldots (b_n + \alpha)$$
$$= C_n + C_{n-1} \alpha + C_{n-2} \alpha^2 + \ldots + C_1 \alpha^{n-1} + \alpha^n,$$

wobei (§. 29.) C_n die Summe der Combinationen der n Gröſsen b_1, $b_2 \ldots b_n$ zu n, d. i. ihr Product, C_{n-1} die Summe der Combinationen zu $n - 1$, C_{n-2} die Summe der Combinationen zu $n - 2$, u. s. f., C_1 die Summe der Combinationen zu 1, d. i. die Summe dieser Gröſsen bezeichnet. Man hat also

$$X + X_1 \alpha + X_2 \alpha^2 + \ldots + X_{n-1} \alpha^{n-1} + \alpha^n$$
$$= C_n + C_{n-1} \alpha + C_{n-2} \alpha^2 + \ldots + C_1 \alpha^{n-1} + \alpha^n,$$

und durch die Vergleichung der gleichnamigen Coefficien-

die Wurzeln gleich im Voraus m Mal so groſs machen (§. 35.), wenn m die kleinste Zahl ist, für welche $\frac{m A_1}{n}$ eine ganze Zahl wird; also im obigen Beispiele gleich anfangs die Wurzeln verdreifachen.

ten, da sowohl X, $X_1 \ldots X_n$, als auch C_n, $C_{n-1} \ldots C_1$ von a unabhängig sind:

$X = C_n$ (welches die obige Gleichung 1) ist), $X_1 = C_{n-1}$,

$$X_2 = C_{n-2}, \ldots\ldots X_{n-1} = C_1;$$

es ist nämlich nach der Bedeutung von C_n, C_{n-1}, $C_{n-2} \ldots$:

$$X = b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1} b_n$$

$$X_1 = b_2 b_3 \ldots b_n + b_1 b_3 \ldots b_n + b_1 b_2 b_4 \ldots b_n \ldots + b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$$

$$= \frac{X}{b_1} + \frac{X}{b_2} + \frac{X}{b_3} + \ldots + \frac{X}{b_n}$$

$$X_2 = b_3 b_4 \ldots b_n + b_2 b_4 \ldots b_n + \ldots + b_1 b_4 \ldots b_n + \ldots b_1 b_2 \ldots b_{n-2}$$

$$= \frac{X}{b_1 b_2} + \frac{X}{b_1 b_3} + \ldots + \frac{X}{b_1 b_n} + \frac{X}{b_2 b_3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{X}{b_2 b_n} + \ldots + \ldots + \frac{X}{b_{n-1} b_n}$$

u. s. w.

Nehmen wir nun an, die gegebene Gleichung $X = 0$ enthalte mehrere Gruppen gleicher Wurzeln, und setzen, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, die Wurzel a komme p Mal, jene b, q Mal, und endlich eine dritte c, r Mal vor, so daſs die noch übrigen $n - (p + q + r)$ Wurzeln sämmtlich ungleich sind.

Nehmen wir ferner gleich die ersten p Wurzeln w_1, $w_2 \ldots$ für jene a, die q darauf folgenden für jene b, und endlich die nächstfolgenden r Wurzeln, für die gleichen Wurzeln c, setzen nämlich

$$w_1 = w_2 = \ldots = w_p = a, \quad w_{p+1} = w_{p+2} = \ldots = w_{p+q} = b$$

und $w_{p+q+1} = w_{p+q+2} = \ldots = w_{p+q+r} = c$;

so wird auch, wenn man der gröſsern Einfachheit wegen $p + q = l$, $p + q + r = m$ setzt:

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_p, \; b_{p+1} = b_{p+2} = \ldots = b_l, \; b_{l+1} = b_{l+2} = \ldots = b_m.$$

Es erhalten demnach, wenn man diese Gleichungen berücksichtiget, die obigen Polynome X, X_1 etc folgende Werthe:

$$X = b_1^p \, b_{p+1}^q \, b_{l+1}^r \, b_{m+1} \, b_{m+2} \ldots b_n$$

$$X_1 = p\frac{X}{b_1} + q\frac{X}{b_{p+1}} + r\frac{X}{b_{l+1}} + \frac{X}{b_{m+1}} + \frac{X}{b_{m+2}} + \ldots + \frac{X}{b_n}$$

u. s. w.

wobei, wie leicht zu sehen, das Polynom X_1 durchaus den gemeinschaftlichen Factor $b_1^{p-1}\, b_{p+1}^{q-1}\, b_{l+1}^{r-1}$, aber auch nur diesen besitzt; die beiden Polynome X und X_1 haben demnach als gröſstes gemeinschaftliches Maſs das Product $b_1^{p-1}\, b_{p+1}^{q-1}\, b_{l+1}^{r-1}$, d. i. $(x-a)^{p-1}\,(x-b)^{q-1}\,(x-c)^{r-1}$: um also zu untersuchen, ob die Gleichung $X=0$ *gleiche* Wurzeln besitzt, leitet man aus X nach dem bekannten Verfahren (§. 21. Anmerk.) das erste Polynom X_1 ab, und sucht zu X und X_1 das gröſste gemeinschaftliche Maſs; findet man dafür, nachdem dasselbe in einfache Factoren zerlegt worden ist, z. B.

$$(x-\alpha)\,(x-\beta)^m\,(x-\gamma)^p,$$

so kommt in der gegebenen Gleichung die Wurzel α zwei Mal, jene β $(m+1)$ Mal, und endlich jene γ $(p+1)$ Mal vor; alle übrigen Wurzeln aber sind ungleich *).

Anmerk. Berücksichtiget man auch noch die folgenden abgeleiteten Polynome X_2, X_3..., so findet man leicht, daſs X_2 den gemeinschaftlichen Factor $b_1^{p-2}\, b_{p+1}^{q-2}\, b_{l+1}^{r-2}$, X_3 den gemeinschaftlichen Factor $b_1^{p-3}\, b_{p+1}^{q-3}\, b_{l+1}^{r-3}$ u. s. w. besitzt, so, daſs das erstere Product das gröſste gemeinschaftliche Maſs für X und X_2, das letztere Product das gröſste gemeinschaftliche Maſs zwischen X und X_3 ist u. s. w.

Beispiel.

Um zu untersuchen, ob die Gleichung

$$x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8 = 0$$

gleiche Wurzeln enthält, hat man

*) Theilt man also die ursprüngliche Gleichung durch das Product $(x-\alpha)\,(x-\beta)^m\,(x-\gamma)^p$, nämlich durch das für X und X_1 gefundene gröſste gemeinschaftliche Maſs; so enthält die als Quotient entstehende Gleichung offenbar nur ungleiche Wurzeln, und zwar die ursprünglich ungleichen und dann noch von jeder Gruppe gleicher Wurzeln eine, d. i. $x=\alpha$, $x=\beta$ und $x=\gamma$.

$$X = x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8$$
$$X_1 = 5x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 20x - 4.$$

Sucht man nun nach der bekannten Methode zu X und X_1 das gröfste gemeinschaftliche Mafs, so findet man ganz einfach dafür:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2;$$

es enthält also die gegebene Gleichung zwei Mal die Wurzel -1, und drei Mal die Wurzel $+2$, so, dafs demnach, da sie aufser diesen fünf Wurzeln keine mehr besitzen kann, die Wurzeln dieser Gleichung sind: $x=2$, $x=2$, $x=2$, $x=-1$ und $x=-1$, oder das Polynom dieser Gleichung aus den Factoren besteht:

$$(x+1)^2 (x-2)^3.$$

Die symmetrischen Functionen der Wurzeln.

§. 40.

Zufolge des §. 29. (Zus. 1) sind die Coefficienten einer Gleichung $X=0$ symmetrische Functionen von den Wurzeln dieser Gleichung, und zwar bestehen diese aus der Summe, aus der Summe der Combinationen zu zwei, aus der Summe der Combinationen zu drei u. s. w. dieser Wurzeln. Es läfst sich zeigen, dafs überhaupt alle rationalen symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten derselben ausgedrückt werden können; wir müssen uns hier auf das Wichtigste davon beschränken, und können sofort nur Einiges hierüber vortragen *).

§. 41.

Aufgabe.

Die Summe der zweiten, dritten, vierten... m^{ten} Potenzen der Wurzeln einer Gleichung $X=0$ zu finden, wenn diese Wurzeln selbst unbekannt sind.

*) Ein Mehreres hierüber findet man unter Anderem auch in *Meier Hirsch* Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. Berlin 1809.

Auflösung.

Durch die Substitution von $x+\alpha$ für x, kommt man, wie wir im vorigen Paragraphe gesehen haben, auf die Gleichung

$$X_1 = \frac{X}{b_1} + \frac{X}{b_2} + \ldots + \frac{X}{b_n},$$

oder, wenn man für b_1, b_2, ... die Werthe setzt, auch:

$$X_1 = \frac{X}{x-w_1} + \frac{X}{x-w_2} + \frac{X}{x-w_3} + \ldots + \frac{X}{x-w_n}.$$

Nun hat man (§. 26. Zus.) für diese Brüche, der Reihe nach die Quotienten:

$$\frac{X}{x-w_1} = x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + B_2 x^{n-3} + B_3 x^{n-4} + \ldots + B_{n-1}$$

$$\frac{X}{x-w_2} = x^{n-1} + B'_1 x^{n-2} + B'_2 x^{n-3} + B'_3 x^{n-4} + \ldots + B'_{n-1}$$

$$\frac{X}{x-w_3} = x^{n-1} + B''_1 x^{n-2} + B''_2 x^{n-3} + B''_3 x^{n-4} + \ldots + B''_{n-1}$$

. .

wobei

$$B_1 = A_1 + w_1$$
$$B_2 = A_2 + A_1 w_1 + w_1^2$$
$$B_3 = A_3 + A_2 w_1 + A_1 w_1^2 + w_1^3$$

.

$$B_{n-1} = A_{n-1} + A_{n-2} w_1 + \ldots + w_1^{n-1}$$

ist, und woraus die übrigen gleichnamigen Coefficienten mit einem, zwei u. s. w. Accent erhalten werden, indem man w_1 nach und nach mit w_2, w_3... vertauscht, so, daſs $B'_1 = A_1 + w_2$, $B''_1 = A_1 + w_3$, $B'_2 = A_2 + A_1 w_2 + w_2^2$ u. s. w. wird. Es ist daher auch, wenn man diese n Quotienten oder Reihen nach verticalen Columnen summirt, d. i. alles nach x ordnet:

$$\begin{aligned} X_1 = n x^{n-1} & + (B_1 + B'_1 + B''_1 + \ldots) x^{n-2} \\ & + (B_2 + B'_2 + B''_2 + \ldots) x^{n-3} \\ & + (B_3 + B'_3 + B''_3 + \ldots) x^{n-4} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (B_{n-1} + B'_{n-1} + B''_{n-1} + \ldots) \end{aligned}$$

oder, wenn man sowohl für X_1, als erstes abgeleitetes

Polynom von X, als auch für B_1, $B_2 \ldots$, B'_1, $B'_2 \ldots$ etc. die Werthe substituirt, und zugleich, der Kürze wegen:

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n = S_1,$$
$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + \ldots + w_n^2 = S_2, \quad \text{u. s. f.}$$

also allgemein die Summe der m^{ten} Potenzen der Wurzeln

$$w_1^m + w_2^m + \ldots + w_n^m = S_m \quad \text{setzt, auch:}$$

$$n x^{n-1} + (n-1) A_1 x^{n-2} + (n-2) A_2 x^{n-3} + \ldots + A_{n-1}$$
$$= n x^{n-1} + (n A_1 + S_1) x^{n-2} + (n A_2 + A_1 S_1 + S_2) x^{n-3} + \ldots$$

Die Vergleichung der gleichnamigen Coefficienten dieser identischen Gleichung gibt:

$$(n-1) A_1 = n A_1 + S_1$$
$$(n-2) A_2 = n A_2 + A_1 S_1 + S_2$$
$$(n-3) A_3 = n A_3 + A_2 S_1 + A_1 S_2 + S_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[n-(n-1)] A_{n-1} = A_{n-1}$$
$$= n A_{n-1} + A_{n-2} S_1 + A_{n-3} S_2 + \ldots + S_{n-1},$$

oder, nach den ganz einfachen Reductionen:

$$\left.\begin{array}{r} S_1 + A_1 = 0 \\ S_2 + A_1 S_1 + 2 A_2 = 0 \\ S_3 + A_1 S_2 + A_2 S_1 + 3 A_3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{n-1} + A_1 S_{n-2} + A_2 S_{n-3} + \ldots + A_{n-2} S_1 + (n-1) A_{n-1} = 0 \end{array}\right\} \ldots a)$$

Um diese Gesetze über S_{n-1} hinaus fortzusetzen, multiplicire man die gegebene Gleichung $X = 0$ mit x^m, wo m jede ganze positive oder negative Zahl bedeuten kann; so hat man:

$$x^{m+n} + A_1 x^{m+n-1} + A_2 x^{m+n-2} + \ldots + A_n x^m = 0.$$

Setzt man jetzt in diese Gleichung für x nach und nach jede der Wurzeln w_1, $w_2 \ldots w_n$, so wird:

$$w_1^{m+n} + A_1 w_1^{m+n-1} + A_2 w_1^{m+n-2} + \ldots + A_n w_1^m = 0$$
$$w_2^{m+n} + A_1 w_2^{m+n-1} + A_2 w_2^{m+n-2} + \ldots + A_n w_2^m = 0$$
$$w_3^{m+n} + A_1 w_3^{m+n-1} + A_2 w_3^{m+n-2} + \ldots + A_n w_3^m = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und wenn man diese Gleichungen summirt, und sich wieder

hinsichtlich der Summe der Potenzen, der oben eingeführten Bezeichnung bedient, auch:

$$S_{m+n} + A_1 S_{m+n-1} + A_2 S_{m+n-2} + \ldots + A_n S_m = 0 \,..\, b)$$

Diese ganz allgemeine Formel schliefst sich unmittelbar an die obige a) an, und gibt zugleich die Fortsetzung derselben, wenn man nach und nach $m = 0$, $m = 1$, $m = 2 \ldots$ setzt.

Um die Summe der negativen Potenzen der Wurzeln zu erhalten, darf man blofs in dieser Gleichung b) nach und nach $m = -1$, -2, -3 etc. setzen, und successive daraus S_{-1}, S_{-2} etc. bestimmen; dabei mufs man aber bemerken, dafs

$$S_0 = w_1^0 + w_2^0 + \ldots + w_n^0 = 1 + 1 + \ldots + 1 = n$$

ist.

Will man endlich S_1, S_2, S_3 u. s. f unmittelbar durch die gegebenen Coefficienten A_1, $A_2 \ldots A_n$ ausdrücken, so darf man nur nach und nach in a) den Werth von S_1 aus der ersten Gleichung in die zweite, diesen und den für S_2 erhaltenen Werth in die dritte Gleichung u. s. w. setzen. Man findet auf diese Art:

$$c) \,.. \begin{cases} S_1 = -A_1 \\ S_2 = A_1^2 - 2A_2 \\ S_3 = -A_1^3 + 3A_1A_2 - 3A_3 \\ S_4 = A_1^4 - 4A_1^2A_2 + 4A_1A_3 + 2A_2^2 - 4A_4 \\ S_5 = -A_1^5 + 5A_1^3A_2 - 5A_1A_2^2 - 5A_1^2A_3 + 5A_1A_4 \\ \qquad + 5A_2A_3 - 5A_5 \text{ *)} \end{cases}$$

u. s. w.

Beispiel.

Für die Gleichung $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ hat man $A_1 = 1$, $A_2 = -7$, $A_3 = -1$, $A_4 = 6$; folglich ist, wenn man in den Gleichungen a) (oder c)) gehörig substituirt und reducirt:

*) Diese Formeln c) sind unter dem Namen des *Newton*'schen Satzes bekannt, weil sie von *Newton* (*Isaac N.*, geb. zu Woolstrop (Woolsthorpe?) in der Grafschaft Lincolnshire 1642; gest. zu London 1727) zuerst angeführt wurden (*Arithmetica universalis*).

$S_1 = -1$; $S_2 = 1 + 14 = 15$; $S_3 = -15 - 7 + 3 = -19$; $S_4 = 19 + 105 - 1 - 24 = 99$; $S_5 = -99 - 133 + 15 + 6 = -211$
u. s. w.

Setzt man ferner in der Gleichung b), $m = -1$, $-2 \ldots$, so entsteht, wegen $n = 4$:

$$S_3 + S_2 - 7S_1 - S_0 + 6S_{-1} = 0$$

und daraus ist:

$$S_{-1} = \frac{19 - 15 - 7 + 4}{6} = \frac{1}{6}.$$

$$S_2 + S_1 - 7S_0 - S_{-1} + 6S_{-2} = 0$$

und daraus ist:

$$S_{-2} = \frac{-15 + 1 + 28 + \frac{1}{6}}{6} = \frac{85}{36}.$$

u. s. f.

Und in der That, es sind die Wurzeln dieser Gleichung (§. 27. Zus.) $+1$, -1, $+2$, -3; also ist

$$S_2 = 1 + 1 + 4 + 9 = 15,$$
$$S_3 = 1 - 1 + 8 - 27 = -19 \text{ u. s. f.}$$
$$S_{-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ etc.}$$

Zusatz. Sind die Summen der Potenzen der Wurzeln einer Gleichung gegeben, so können auch leicht umgekehrt aus den Gleichungen a) und b) die Coefficienten derselben gefunden werden.

§. 42.

Mit Hilfe der Werthe von S_1, S_2, $S_3 \ldots$, welches sofort symmetrische Functionen von den Wurzeln der Gleichung $X = 0$ sind, kann jedes aus den Wurzeln symmetrisch gebildete Polynom, wie z. B.

$$A\,(w_1^m w_2^p + w_2^m w_1^p + w_1^m w_3^p + \ldots) = A S_{m,p}$$
$$A\,(w_1^m w_2^p w_3^q + w_1^m w_3^p w_2^q + \ldots\ldots\ldots) = A S_{m,p,q}$$
u. s. w.

wobei die Bedeutung von $S_{m,p}$, $S_{m,p,q}$ u. s. f. von selbst klar ist, auf folgende Art berechnet werden.

Der oben eingeführten Bezeichnung zufolge ist:

$$S_m = w_1^m + w_2^m + w_3^m + \ldots + w_n^m$$
$$S_p = w_1^p + w_2^p + w_3^p + \ldots + w_n^p,$$ mithin auch:
$$S_m S_p = w_1^{m+p} + w_2^{m+p} + \ldots + w_1^m w_2^p + w_2^m w_1^p + w_1^m w_3^p + w_3^m w_1^p + \ldots (\alpha$$
nämlich:
$$S_m S_p = S_{m+p} + S_{m,p},$$
und daraus ist:
$$1)\quad S_{m,p} = S_m S_p - S_{m+p}.$$

Multiplicirt man eben so

$S_{m,p} = w_1^m w_2^p + w_2^m w_1^p + \ldots$ mit $S_q = w_1^q + w_2^q + \ldots$,
so findet man ganz einfach:
$$2)\quad S_{m,p,q} = S_q S_{m,p} - S_{m+q,p} - S_{p+q,m}.$$

Eben so erhält man durch die Multiplication von $S_{m,p,q}$ mit S_r wieder:
$$3)\quad S_{m,p,q,r} = S_r S_{m,p,q} - S_{m+r,p,q} - S_{p+r,m,q} - S_{q+r,m,p};$$
und so lassen sich diese Formeln, welche von dem englischen Geometer *Waring* (geb. Shrewsbury 1734; gest. 1798) herrühren, nach dem klar vor Augen liegenden Gesetze, nach Belieben fortsetzen.

Besondere Fälle. Es mufs jedoch bemerkt werden, dafs im Falle zwei oder mehrere der Gröfsen m, p, q... einander gleich sind, diese Formeln einige Modificationen erleiden.

1. Ist z.B. $p=m$, so geht die Formel 1) in die folgende über:
$$1')\quad S_{m,m} = \frac{S_m \cdot S_m - S_{2m}}{2} = \frac{(S_m)^2 - S_{2m}}{2}.$$

Denn da in diesem Falle die Glieder $w_1^m w_2^p$ und $w_2^m w_1^p$, $w_1^m w_3^p$ und $w_3^m w_1^p$ u. s. w. des obigen Productes α) einander gleich werden; so wird dieses Product:
$$S_m . S_m = S_{m+m} + 2 S_{m,m},$$
woraus sofort die vorige Formel 1') folgt.

2. Eben so erhält man:
$$2')\quad S_{m,m,q} = \frac{S_q \cdot S_{m,m} - 2 S_{m+q,m}}{2}$$

$$2'') \quad S_{m,m,m} = \frac{S_m \cdot S_{m,m} - 2\,S_{2m,m}}{2 \cdot 3} \quad \text{u. s. w.}$$

wobei $S_{m,m}$ aus 1'), aber ohne den Nenner 2 anzuwenden, welcher schon in diesen letzten Formeln 2'), 2'') selbst berücksichtigt ist, genommen wird.

§. 43.

Aufgabe.

Für eine gegebene Gleichung $X = o$, die Gleichung der *quadrirten Differenzen* $Z = o$ zu finden.

Auflösung.

Bezeichnet s_1, s_2, s_3 ... die Summe der ersten, zweiten, dritten... Potenzen der Wurzeln der gesuchten Gleichung $Z = o$, ist nämlich:

$$s_1 = (w_1 - w_2)^2 + (w_1 - w_3)^2 + \ldots + (w_2 - w_1)^2 + \text{etc.}$$
$$s_2 = (w_1 - w_2)^4 + (w_1 - w_3)^4 + \ldots + (w_2 - w_1)^4 + \text{etc.}$$
$$s_3 = (w_1 - w_2)^6 + (w_1 - w_3)^6 + \ldots + (w_2 - w_1)^6 + \text{etc.}$$

so hat man auch, wenn man entwickelt und S_1, S_2..., $S_{1,1}$, $S_{1,2}$ etc. die obige Bedeutung haben:

$$d)\ldots\begin{cases} s_1 = (n-1)\,S_2 - 2\,S_{1,1} \\ s_2 = (n-1)\,S_4 - 4\,S_{3,1} + 6\,S_{2,2} \\ s_3 = (n-1)\,S_6 - 6\,S_{5,1} + 15\,S_{4,2} - 20\,S_{3,3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Da man von diesen Gleichungen oder Summen s_1, s_2... so viele haben muſs, als in der Gleichung $Z = o$, oder (§. 38. Gl. ε)) $z^m + \delta_1 z^{m-1} + \delta_2 z^{m-2} + \ldots + \delta_m = o$ zu bestimmende Coefficienten δ_1, δ_2... vorkommen, also m, wobei $m = \frac{n(n-1)}{2}$ ist; so muſs man in der Entwicklung von S_1, S_2, S_3... bis $S_{2m} = S_{n(n-1)}$ gehen. Man wird also zuerst mit den gegebenen Coefficienten der Gleichung $X = o$ nach den Formeln a), b) des §. 41. S_1, S_2...$S_{n(n-1)}$, und mit diesen Werthen, nach 1), 2), 3)... und 1'), 2'), 2'')... des vorigen Paragraphes die vorkommenden Gröſsen $S_{1,1}$,

$S_{2,2}$, $S_{1,3}$ u. s. w., und endlich mit allen diesen Werthen, nach den vorigen Gleichungen d), s_1, s_2, $s_3 \ldots s_m$ berechnen und mit Hilfe dieser letztern Gröſsen (§. 41. Zus.) aus den Gleichungen a) §. 41. die Coefficienten δ_1, $\delta_2 \ldots \delta_m$ der gesuchten Gleichung $Z = o$ bestimmen.

Beispiel.

Um für die Gleichung $x^3 - 7x + 6 = o$ (§. 37.) jene der quadrirten Differenzen zu finden, hat man $A_1 = o$, $A_2 = -7$, $A_3 = 6$ und $n = 3$, also auch $m = \frac{n(n-1)}{2} = 3$. Es folgt demnach aus a) oder c), §. 41.:

$$S_1 = o,\quad S_2 = 14,\quad S_3 = -18,\quad S_4 = 98,$$
$$S_5 = -210 \text{ und } S_6 = S_{2m} = 794.$$

Ferner ist, nach §. 42.:

$$S_{1,1} = -\tfrac{14}{2} = -7,\quad S_{2,2} = \frac{196 - 98}{2} = 49,$$
$$S_{3,3} = \frac{324 - 794}{2} = -235,\quad S_{3,1} = -98,$$
$$S_{5,1} = -794,\quad S_{4,2} = 1372 - 794 = 578.$$

Folglich nach den Gleichungen d) des gegenwärtigen Paragraphes:

$$s_1 = 28 + 14 = 42,$$
$$s_2 = 196 + 392 + 294 = 882,$$
$$s_3 = 1588 + 4764 + 8670 + 4700 = 19722.$$

Endlich folgt aus den Gleichungen a) §. 41., da die dort vorkommenden Gröſsen S_1, $S_2 \ldots$, A_1, $A_2 \ldots$ dasselbe bedeuten, was hier s_1, $s_2 \ldots$, δ_1, $\delta_2 \ldots$ bezeichnen:

$$\delta_1 = -s_1 = -42,\quad \delta_2 = \frac{-s_2 - \delta_1 s_1}{2} = 441,$$
$$\delta_3 = \frac{-s_3 - \delta_1 s_2 - \delta_2 s_1}{3} = -400.$$

Es ist daher die gesuchte Gleichung der quadrirten Differenzen (übereinstimmend mit §. 38.):

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 400 = o.$$

Anmerk. Es lassen sich auf die nämliche Art noch viele andere hieher gehörige Aufgaben, als z. B. eine Gleichung zu

finden, deren Wurzeln aus der Summe je zweier Wurzeln der Gleichung $X=0$, d. i. aus w_1+w_2, $w_1+w_3\ldots$ besteht, oder deren Wurzeln aus den Combinationen von der Form $w_1+w_2+pw_1w_2$, $w_1+w_3+pw_1w_3\ldots$, wo p eine gegebene Gröſse ist, bestehen u. s. w. auflösen.

Allgemeine Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades.

Cubische Gleichungen.

§. 44.

Da sich aus einer jeden Gleichung das zweite Glied wegschaffen läſst (§. 34), so können wir, der gröſsern Einfachheit wegen, die aufzulösende cubische Gleichung ohne zweites Glied annehmen. Es sey daher

$$x^3+px+q=0\ldots 1)$$

die aufzulösende oder gegebene Gleichung. Um sie aufzulösen, setze man

$$x=y+z\ldots(2$$

wo y und z neue unbekannte Gröſsen bezeichnen; so verwandelt sich dieselbe in folgende:

$$y^3+z^3+(3yz+p)(y+z)+q=0,$$

oder, wenn man die unbestimmte Gröſse z so wählt, daſs $3yz+p=0$ wird, d. i.

$$z=-\frac{p}{3y}\ldots(3$$

setzt, auch in jene

$$y^3+z^3+q=0\ldots(4$$

und wenn man endlich für z den Werth aus 2) substituirt, in die Gleichung:

$$y^6+qy^3-\frac{p^3}{27}=0.$$

Da sich diese reducirte Gleichung wie eine quadratische behandeln läſst, so hat man daraus

$$y^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ und}$$

$$y = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)}.$$

Ferner folgt aus 4): $z^3 = -q - y^3$; es ist also, wenn man für y^3 substituirt:

$$z^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ und}$$

$$z = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)}.$$

Werden endlich diese Werthe von y und z, wobei man entweder bloſs die obern oder untern Zeichen beibehält, indem dadurch nur ein und dasselbe Resultat entsteht, in der Gleichung 2) substituirt; so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} x = \sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right]} \\ \quad + \sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right]} \end{array}\right\} \ldots (5$$

Diese Formel 5), welche sofort die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung 1) enthält, und zuerst von *Cardan* (geb. Pavia 1501; gest. Rom 1575 — 6) um die Mitte des XVI. Jahrhunderts bekannt gemacht wurde, wird, obschon einige ihre Erfindung dem *Scipio Ferreo* zu Bologna, andere dem *Tartaglia* (geb. zu Brescia zu Anfang des XVI. Jahrhunderts; gest. zu Venedig 1557) zuschreiben, die Cardanische Regel oder Formel genannt.

§ 45.

Um mit Klarheit zu übersehen, wie in dieser letzten Formel 5) die drei Wurzeln der Gleichung 1) enthalten sind, setze man der Kürze wegen

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = A \text{ und } -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = B \quad (6$$

so ist $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} \ldots (7$

Um nun die drei Werthe oder Wurzeln zu finden, welche durch die Ausziehung der Cubikwurzel aus irgend einer Zahl oder Gröfse a^3 entstehen, sey

$$\sqrt[3]{a^3} = u \quad \text{oder} \quad u^3 - a^3 = 0;$$

so ist $u = a$ eine Wurzel dieser letzten Gleichung, und zwar die gewöhnliche oder arithmetische Cubikwurzel von a^3. Wird daher diese Gleichung durch $u - a$ getheilt (§. 26.), so erhält man die quadratische Gleichung

$$u^2 + au + a^2 = 0,$$

welche noch die beiden übrigen Wurzeln enthält; diese aufgelöst, gibt dafür:

$$u = \frac{-a \pm \sqrt{-3a^2}}{2} = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right) a.$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$8) \quad \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \alpha, \quad \text{so ist} \quad \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \alpha^2,$$

und man hat also für $\sqrt[3]{a^3}$ die drei Wurzeln: a, αa und $\alpha^2 a$ *).

Da nun auf diese Weise in der Gleichung 7) sowohl $\sqrt[3]{A}$ als $\sqrt[3]{B}$ die drei Werthe $1\sqrt[3]{A}$, $\alpha\sqrt[3]{A}$, $\alpha^2\sqrt[3]{A}$ und $1\sqrt[3]{B}$, $\alpha\sqrt[3]{B}$, $\alpha^2\sqrt[3]{B}$ liefern, also durch die Verbindung dieser Werthe für x, neun Werthe erhalten werden; so

*) Es kann hier bemerkt werden, dafs α und α^2 zugleich die beiden imaginären Wurzeln von $\sqrt[3]{1}$ sind, weil, wie man sich leicht überzeugt, sowohl α, d. i. $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, als auch α^2 oder $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ auf die dritte Potenz erhoben, die Einheit gibt. Diefs vorausgesetzt, kann man auch die drei Cubikwurzeln aus irgend einer Gröfse A, auf folgende Art bestimmen. Es ist $A = 1 \cdot A$, also $\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{A}$, und da $\sqrt[3]{1}$ die Wurzeln 1, α, α^2 liefert, so hat man für $\sqrt[3]{A}$ die Wurzeln: $1\sqrt[3]{A}$, $\alpha\sqrt[3]{A}$, $\alpha^2\sqrt[3]{A}$, wo bei diesen letztern Ausdrücken, unter $\sqrt[3]{A}$ die gewöhnliche oder arithmetische Cubikwurzel aus A verstanden wird.

könnte es im ersten Augenblicke scheinen, als ob es für die Gleichung 1) eben so viele Wurzeln gäbe. Berücksichtiget man indefs die obige Gleichung 3), aus welcher

$$yz = -\frac{p}{3}$$

folgt, so sieht man sogleich, dafs (wegen $y = \sqrt[3]{A}$ und $z = \sqrt[3]{B}$) nur jene Werthe von $\sqrt[3]{A}$ und $\sqrt[3]{B}$ in (7 mit einander verbunden werden dürfen, welche zusammenmultiplicirt ein reelles Product $\left(\frac{-p}{3}\right)$ geben. Unter dieser Einschränkung aber findet man, wie wegen $\alpha^3 = 1$ leicht zu sehen ist, für x nur die drei Werthe:

$$9)\quad x_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B},\quad x_2 = \alpha\sqrt[3]{A} + \alpha^2\sqrt[3]{B}$$
$$\text{und}\quad x_3 = \alpha^2\sqrt[3]{A} + \alpha\sqrt[3]{B},$$

welches sofort die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung $x^3 + px + q = 0$ sind, und wobei A, B und α, α^2 die obigen Werthe 6) und 8) haben.

Nähere Erörterung (Discussion) der drei Wurzeln, und Berechnung derselben mittelst trigonometrischer Functionen.

§. 46.

Um zu sehen, unter welchen Bedingungen die im vorigen Paragraphe gefundenen Wurzeln (9) der Gleichung $x^3 + px + q = 0$, wobei die Coefficienten p und q sowohl positiv als negativ seyn können, reell oder imaginär ausfallen; müssen wir folgende drei Fälle unterscheiden: 1) wenn $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ positiv oder > 0, 2) wenn diese Summe $= 0$, und endlich 3) wenn sie negativ, d. i. < 0 ist.

1. Ist $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, so sind die Gröfsen A und B (6) reell, folglich ist die eine Wurzel x_1 (9) reell, während die beiden andern x_2, x_3, der unmöglichen Factoren α und α^2 wegen, imaginär sind. Das Zeichen dieser reellen Wurzel betreffend, so ist dieses, wie man ganz einfach aus

der Gleichung 7) findet, positiv oder negativ, je nachdem q negativ oder positiv ist (vergl. damit §. 24.).

2. Ist $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$, so wird $A=B=-\frac{q}{2}$, $x_1=-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ und $x_2=x_3=(\alpha+\alpha^2)\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}=+\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$; es sind also in diesem Falle alle drei Wurzeln reell, davon sind zwei einander gleich, und haben das entgegengesetzte Zeichen der dritten; ist nämlich q positiv, so hat die gegebene Gleichung eine negative und zwei positive Wurzeln; ist q negativ, so findet das Umgekehrte Statt.

3. Ist endlich $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ oder negativ, so werden A und B unmöglich, und es erscheinen sofort alle drei Wurzeln in einer imaginären Form, obschon sie in der That, wie wir gleich zeigen werden, sämmtlich reell sind.

Der hier angenommene Fall fordert offenbar, daſs p negativ, und zugleich, dem numerischen Werthe nach, $\frac{p^3}{27}>\frac{q^2}{4}\ldots(\gamma$ sey. Führt man dieses negative Zeichen von p gleich in die gegebene Gleichung ein, so wird diese jetzt:

$$x^3-px+q=0\ldots1');$$

es ist also auch, wenn man die reelle Wurzel dieser Gleichung (§. 24. Lehrs. 1) durch a bezeichnet:

$$a^3-ap+q=0 \quad \text{oder} \quad -q=a(a^2-p)\ldots(m$$

und daher, wenn die gegebene Gleichung durch $x-a$ dividirt wird (da der Rest $a^3-ap+q=0$ ist):

$$x^2+ax+a^2-p=0.$$

Diese Gleichung aufgelöst, gibt für die beiden andern Wurzeln der cubischen Gleichung 1'):

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{4p-3a^2}}{2},$$

und da, wie man sich leicht überzeugt, $4p>3a^2$, d. i. $a<2\sqrt{\frac{p}{3}}$ ist, indem diese Ungleichheit mit der Glei-

chung m) verbunden, sofort $-q < 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\left(\frac{4p}{3} - p\right)$, d. i. $-q < \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}$, oder $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$, nämlich die obige, diesem dritten Falle zukommende Bedingung γ) gibt: so sind auch diese beiden Wurzeln reell, so, dafs die gegebene Gleichung 1') bei dieser Voraussetzung lauter reelle Wurzeln besitzt.

Die Cardanische Formel gibt also in diesem Falle die drei Wurzeln der cubischen Gleichung unter einer unbrauchbaren, imaginären Gestalt; und da sich daran das Aufheben der imaginären Theile, die doch nothwendigerweise wegfallen müssen, ohne Zuziehung von unendlichen Reihen nicht erkennen läfst, so hat man diesen Fall den irreducibelen *(casus irreducibilis)* genannt*).

§. 47.

Da sich die reellen Wurzeln einer cubischen Gleichung,

*) Dafs sich in diesem Falle die in den drei Wurzeln vorkommenden imaginären Theile wirklich aufheben, erhellet aus Folgendem:

A und B erscheinen hier unter der Form

$$A = a + b\sqrt{-1},\quad B = a - b\sqrt{-1};$$

es erhält also (siehe die Note auf S. 67)

$$\sqrt[3]{A} = (a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} \text{ die Form } P + Q\sqrt{-1}, \text{ und}$$

$$\sqrt[3]{B} = (a - b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} \text{ jene } P - Q\sqrt{-1},$$

wo P und Q reelle Gröfsen sind, die in beiden Ausdrücken den nämlichen Werth haben. Es sind daher die drei Wurzeln (9, §. 45.):

$$x_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = 2P$$

$$x_2 = \alpha\sqrt[3]{A} + \alpha^2\sqrt[3]{B} = -P - Q\sqrt{3} \text{ und}$$

$$x_3 = \alpha^2\sqrt[3]{A} + \alpha\sqrt[3]{B} = -P + Q\sqrt{3}$$

offenbar reell. Sollen die Wurzeln unter dieser Form für die Rechnung brauchbar seyn, so müssen sich die Gröfsen P und Q selbst genau oder wenigstens näherungsweise berechnen lassen; da jedoch diese Gröfsen durch unendliche Reihen ausgedrückt erscheinen, die nur in besondern Fällen gut convergiren, so ist diese Darstellung von keinem weitern Nutzen.

von einigen besonderen Fällen abgesehen, am leichtesten und bequemsten mit Hilfe der trigonometrischen Functionen logarithmisch berechnen lassen; so wollen wir noch die im vorigen Paragraphe erörterten drei Fälle in dieser Beziehung betrachten.

1. Ist im ersten Falle $\left(\text{nämlich für } \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0\right)$ a), p positiv; so setze man, da die trigonometrische Tangente von 0 bis ∞ jeden Werth annehmen kann *):

$$d) \quad \frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}} = tang.\,\varphi \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{tang.\,\tfrac{1}{2}\varphi} = tang.\,\psi;$$

dadurch erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$A = \frac{q}{2}\left(\frac{1-cos.\,\varphi}{cos.\,\varphi}\right) = \sqrt{\frac{p^3}{27}}.\left(\frac{1-cos.\,\varphi}{sin.\,\varphi}\right) = \sqrt{\frac{p^3}{27}}.\,tang.\,\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$B = -\frac{q}{2}\left(\frac{1+cos\,\varphi}{cos.\,\varphi}\right) = -\sqrt{\frac{p^3}{27}}.\left(\frac{1+cos.\,\varphi}{sin.\,\varphi}\right) = -\sqrt{\frac{p^3}{27}}.\,cot.\,\tfrac{1}{2}\varphi,$$

folglich auch x_1, oder

$$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\sqrt[3]{tang.\,\tfrac{1}{2}\varphi} - \sqrt[3]{cot.\,\tfrac{1}{2}\varphi}\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{p}{3}}.(tang.\,\psi - cot.\,\psi) = -\,2\sqrt{\frac{p}{3}}.\,cot.\,2\psi\,^{**});$$

es ist nämlich die reelle Wurzel in diesem Falle

$$x_1 = -\,2\sqrt{\frac{p}{3}}.\,cot.\,2\psi \ldots (\alpha$$

Man wird daher zuerst aus den obigen Gleichungen d), welche einer logarithmischen Behandlung fähig sind, die Hilfswinkel φ und ψ bestimmen, und mit Hilfe des letztern aus der Gleichung α), ebenfalls logarithmisch, die Wurzel x_1 berechnen.

Ist dagegen b), p negativ, wodurch, wenn man p nur dem numerischen Werthe nach nimmt, die gegebene Gleichung in jene $x^3 - px + q = 0$, und die in A und B

*) Das Verfahren, durch welches man zu dieser Annahme im vorliegenden und zu jener in den folgenden Fällen geleitet wird, ist schon in der Trigonometrie (S. 96 und 97) auseinandergesetzt worden.

**) Trigonometrie S. 36, Form. 7 und 8, und S. 39 Form. 23.

vorkommende Wurzelgröfse in $\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$ übergeht; so setze man, da der Sinus von o bis 1 alle möglichen Werthe annimmt:

$$d') \quad \frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}} = \sin.\varphi \quad \text{und wieder} \quad \sqrt[3]{\tang.\tfrac{1}{2}\varphi} = \tang.\psi.$$

Dadurch wird, ebenfalls ganz einfach, wenn man noch bemerkt, dafs (aus d') $\frac{q}{2} = \frac{1}{\sin.\varphi}\sqrt{\frac{p^3}{27}}$ folgt:

$$A = -\frac{q}{2}(1-\cos.\varphi) = -\sqrt{\frac{p^3}{27}}.\left(\frac{1-\cos\varphi}{\sin.\varphi}\right) = -\sqrt{\frac{p^3}{27}}.tg.\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$B = -\frac{q}{2}(1+\cos.\varphi) = -\sqrt{\frac{p^3}{27}}\left(\frac{1+\cos\varphi}{\sin.\varphi}\right) = -\sqrt{\frac{p^3}{27}}.cot.\tfrac{1}{2}\varphi$$

mithin auch x_1, oder

$$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = -\sqrt{\frac{p}{3}}\{\sqrt[3]{\tang.\tfrac{1}{2}\varphi} + \sqrt[3]{\cot.\tfrac{1}{2}\varphi}\}$$

$$= -\sqrt{\frac{p}{3}}.(\tang.\psi + \cot.\psi),$$

oder endlich

$$x_1 = -\frac{2}{\sin.2\psi}\sqrt{\frac{p}{3}} \ldots (\alpha'$$

Man wird also wieder zuerst aus d') die Hilfswinkel φ und ψ, und mit diesem letztern aus α') die Wurzel x_1 berechnen.

2. Für den zweiten Fall $\left(\text{wenn } \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0\right)$ sind keine anderweitigen Hilfsgröfsen nöthig, indem sich die drei reellen Wurzeln (§. 46. 2) ohnehin unmittelbar mittelst Logarithmen berechnen lassen.

3. Für den dritten oder irreducibelen Fall $\left(\text{für } \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0\right)$, in welchem, wenn man unter p wieder nur den numerischen Werth versteht, die gegebene Gleichung von der Form $x^3 - px + q = 0$ ist; setze man

$$x = r\sin.\varphi \quad \text{oder} \quad \sin.\varphi = \frac{x}{r};$$

so wird, wegen

$$\sin.3\varphi = 3\sin.\varphi - 4\sin.^3\varphi \text{ (Trigonom. S. 40)}$$

oder

$$\sin.^3\varphi - \tfrac{3}{4}\sin.\varphi + \tfrac{1}{4}\sin.3\varphi = 0:$$

$$\frac{x^3}{r^3} - \frac{3x}{4r} + \tfrac{1}{4}\sin.3\varphi = 0, \text{ d i.}$$

$$x^3 - \frac{3r^2}{4}x + \frac{r^3}{4}\sin.3\varphi = 0 \ldots (e$$

Diese letzte Gleichung hat also die Wurzel $x = r\sin.\varphi$, wobei jedoch der Winkel φ alle jene unzähligen Werthe erhalten kann, für welche $\sin.3\varphi$ ungeändert bleibt; diese sind die dritten Theile der Winkel

$$3\varphi,\ 180 - 3\varphi,\ 3.180 - 3\varphi,\ 5.180 - 3\varphi, \ldots$$

und

$$360 + 3\varphi,\ 2.360 + 3\varphi,\ 3.360 + 3\varphi, \ldots$$

also die Werthe φ, $60-\varphi$, $180-\varphi$, $300-\varphi$, ...
und $120+\varphi$, $240+\varphi$, $360+\varphi$, u. s. w.

Man sieht aber leicht, dafs sich die sämmtlichen Sinusse dieser unzähligen Winkel auf die drei folgenden, als wirklich von einander verschieden, reduciren:

$$\sin.\varphi,\ \sin.(60-\varphi) \text{ und } -\sin.(60+\varphi),$$

so, dafs also $x = r\sin.\varphi$ nicht unzählig viele, sondern blofs die drei folgenden Werthe, als Wurzeln der vorigen Gleichung e) erhält:

$$\beta)\quad x_1 = r\sin.\varphi,\quad x_2 = r\sin.\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) \text{ und}$$

$$x_3 = -r\sin.\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right).$$

Vergleicht man nun die Gleichung e) mit der gegebenen, so ergeben sich die Relationen:

$$\gamma)\quad \tfrac{3}{4}r^2 = p \text{ und } \tfrac{1}{4}r^3\sin.3\varphi = q,$$

woraus sofort ganz einfach r und φ, und sodann mit diesen Gröfsen aus β), die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung berechnet werden können.

§. 48.

Um das im vorigen Paragraphe Vorgetragene mehr zu erläutern, wollen wir dasselbe auf einige Beispiele anwenden.

Beispiel 1.

Um die Gleichung $x^3 + 3x - 2 = 0$ aufzulösen, hat man $p = 3$, $q = -2$; folglich $\frac{p^3}{27} = 1$, $\frac{q^2}{4} = 1$, und daher $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 2 > 0$. Es hat also die Auflösung nach a) des ersten Falles zu geschehen.

Man findet aus d): $tang.\,\varphi = -1$, also ist der Hilfswinkel $\varphi = 180 - 45 = 135^0$ (oder auch $\varphi = -45^0$) und $\frac{1}{2}\varphi = 67^0\,30'$; daher weiters

$$log.\,tang.\,\psi = \tfrac{1}{3}\,log.\,tang.\,67^0\,30' = \cdot 1275919, \text{ also}$$
$$\psi = 53^0\,17'\,52{\cdot}7'' \text{ und } 2\psi = 106^0\,35'\,45{\cdot}4''.$$

Mit diesem Werthe nun folgt aus a):

$$log.\,x_1 = log.\,2 + log.\,cot.\,2\psi = \cdot 3010300$$
$$\cdot 4742685 - 1$$
$$\cdot 7752985 - 1$$

$$\text{also } x_1 = \cdot 5960717\ldots$$

und zwar ist diese Wurzel positiv, weil $cot.\,2\psi$ negativ wird.

Dividirt man, um auch die beiden andern, imaginären Wurzeln zu erhalten, die gegebene Gleichung durch $x - \cdot 5960717\ldots$, so findet man, ebenfalls nur näherungsweise:

$$x^2 + \cdot 5960717\,x + 3{\cdot}3553014 = 0,$$

und daraus für die gesuchten Wurzeln:

$$x = -\cdot 2980358 \pm \sqrt{-3{\cdot}2664762}$$
$$= -\cdot 2980358 \pm 1{\cdot}807339\sqrt{-1}.$$

Beispiel 2.

Für die Gleichung $x^3 - 2x + 4 = 0$, ist $p = -2$, $q = 4$, $\frac{p^3}{27} = -\frac{8}{27}$, $\frac{q^2}{4} = 4$, also $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 4 - \frac{8}{27} > 0$; es ist daher diese Gleichung nach b) des ersten Falles zu behandeln.

Es ist aus d'), wobei das negative Zeichen von p schon berücksichtigt ist, also für p nur mehr der numerische Werth 2 gesetzt werden darf:

$log. sin. \varphi = - log. 2 + \frac{1}{2}(log. 8 - log. 27) = \cdot 4348331 - 1,$

mithin

$$\varphi = 15^\circ 47' 35\cdot4'', \quad \tfrac{1}{2}\varphi = 7^\circ 53' 47\cdot7''.$$

Ferner ist

$$log. tang. \psi = \tfrac{1}{3} log. tang. \tfrac{1}{2}\varphi = \cdot 7140262 - 1,$$

und daraus

$$\psi = 27^\circ 22' 4\cdot1'', \quad 2\psi = 54^\circ 44' 8\cdot2''.$$

Endlich folgt aus α'), dem numerischen Werthe nach:

$log. x_1 = log. 2 + \frac{1}{2}(log. 2 - log. 3) - log. sin. 2\psi = \cdot 3010300;$

es ist daher mit Berücksichtigung des Zeichens dieser reellen Wurzel

$$x_1 = -2.$$

Für die beiden übrigen, oder imaginären Wurzeln findet man:

$$x_2 = +1 + \sqrt{-1}, \quad x_3 = +1 - \sqrt{-1}.$$

Beispiel 3.

Für die Gleichung $x^3 - 3x - 2 = 0$ hat man $p = -3$, $q = -2$, $\frac{p^3}{27} = -1$, $\frac{q^2}{4} = 1$; folglich $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, wefshalb diese unter den zweiten Fall gehört, in welchem alle drei Wurzeln reell sind.

Man findet sofort ganz einfach:

$$x_1 = +2 \text{ und } x_2 = x_3 = -1.$$

Beispiel 4.

Um die Gleichung $x^3 - 7x + 6 = 0$ aufzulösen, hat man wegen $p = -7$ und $q = 6$:

$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = -\tfrac{343}{27} + 9 < 0;$$

es gehört also dieser Fall zu dem dritten oder irreducibelen.

Es folgt nun aus γ), da jetzt wieder nur der numerische Werth 7 für p genommen werden darf:

$$log. r = \tfrac{1}{2}(log. 28 - log. 3) = \cdot 4850183,$$
$$log. sin. 3\varphi = log\ 24 - 3\, log. r = \cdot 9251561 - 1,$$

also $3\varphi = 57^0 19' 11{\cdot}4''$ und $\varphi = 19^0 6' 23{\cdot}8''$,
$60 - \varphi = 40^0 53' 36{\cdot}2''$, $60 + \varphi = 79^0 6' 23{\cdot}8''$.

Mit diesen letztern Werthen hat man endlich aus β):

$log. x_1 = log. r + log. sin. \varphi = {\cdot}0000000$, also $x_1 = 1$
$log. x_2 = log. r + log. sin. (60 - \varphi) = {\cdot}3010300$ » $x_2 = 2$
$log. x_3 = log. r + log. sin. (60 + \varphi) = {\cdot}4771213$ » $x_3 = -3$,

wenn man nämlich noch das negative Zeichen dieser letztern Wurzel berücksichtiget.

Gleichungen des vierten Grades.

§. 49.

Wir nehmen auch hier wieder an, dafs die Gleichung von ihrem zweiten Gliede befreit sey, und also die Form habe:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \ldots (1.$$

Man setze

$$x = u + y + z \ldots (2,$$

so wird

$$x^2 = u^2 + y^2 + z^2 + 2(uy + uz + yz),$$

und wenn man abermals quadrirt:

$$x^4 = (u^2 + y^2 + z^2)^2 + 4(u^2 + y^2 + z^2)(uy + uz + yz)$$
$$+ 4(u^2y^2 + u^2z^2 + y^2z^2) + 8uyz(u + y + z).$$

Substituirt man diese für x^4 und x^2 gefundenen Werthe in die gegebene Gleichung (1, und setzt im letzten Gliede von x^4 wieder x statt $u + y + z$; so erhält man:

$$(u^2 + y^2 + z^2)^2 + 4(u^2y^2 + u^2z^2 + y^2z^2) + p(u^2 + y^2 + z^2) + r$$
$$+ [4(u^2 + y^2 + z^2) + 2p](uy + uz + yz)$$
$$+ (8uyz + q)x = 0 \ldots (3.$$

Da die Gleichung (3 unbestimmt ist, und noch zwei Bedingungen gestattet, so nehme man

$$4(u^2 + y^2 + z^2) + 2p = 0 \ldots (4$$
$$\text{und} \quad 8uyz + q = 0 \ldots (5;$$

dadurch geht die Gleichung (3, wenn man auch noch für $u^2 + y^2 + z^2$ den aus (4 folgenden Werth: $-\frac{p}{2}$ substituirt, in die folgende, einfachere über:

$$\frac{p^2}{4} + 4(u^2y^2 + u^2z^2 + y^2z^2) - \frac{p^2}{2} + r = 0,$$

und daraus folgt:

$$u^2y^2 + u^2z^2 + y^2z^2 = \frac{p^2 - 4r}{16} \ldots (6,$$

so wie aus jener (5:

$$u^2y^2z^2 = \frac{q^2}{64} \ldots (7.$$

Da nun von den drei Gröſsen u^2, y^2, z^2 in (4 die Summe $\left(= -\frac{p}{2}\right)$, in (6 die Summe der Combinationen zu zwei, und in (7 das Product ausgedrückt ist; so können, nach dem was über die Gesetze der Coefficienten einer Gleichung angeführt wurde (§. 29.), diese als die Wurzeln der cubischen oder reducirten Gleichung

$$v^3 + \frac{p}{2}v^2 + \left(\frac{p^2 - 4r}{16}\right)v - \frac{q^2}{64} = 0 \ldots (8$$

angesehen werden.

Wird diese Gleichung nach den vorhergehenden Paragraphen aufgelöst, und sind v_1, v_2, v_3 die Wurzeln derselben; so hat man sofort

$$u = \pm\sqrt{v_1}, \quad y = \pm\sqrt{v_2}, \quad z = \pm\sqrt{v_3},$$

und vermöge der Gleichung (2:

$$x = \pm\sqrt{v_1} \pm \sqrt{v_2} \pm \sqrt{v_3}.$$

Macht man in dieser Summe hinsichtlich der doppelten Zeichen alle Verbindungen, so findet man in Allem nur acht von einander verschiedene Werthe. Von diesen acht Werthen von x sind aber nur vier als Wurzeln der gegebenen Gleichung brauchbar; man findet diese, wenn man berücksichtiget, daſs vermöge der Gleichung (5 das Product aus u, y, z, d. i. aus $\sqrt{v_1}$, $\sqrt{v_2}$, $\sqrt{v_3}$ das entgegengesetzte Zeichen von q erhalten muſs. Man hat also, wenn q positiv ist, nämlich für die Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \ldots (a$$

die Wurzeln:

$$x_1 = -\sqrt{v_1} - \sqrt{v_2} - \sqrt{v_3}, \quad x_3 = \sqrt{v_1} - \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3}$$

$$x_2 = -\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3}, \quad x_4 = \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} - \sqrt{v_3}$$

und wenn q negativ ist, nämlich für die Gleichung $x^4 + px^2 - qx + r = 0$...(b:

$$x_1 = \sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_3}, \quad x_3 = -\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_3}$$
$$x_2 = \sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_3}, \quad x_4 = -\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_3}\text{*)}.$$

§ 50.

Ob die Wurzeln der biquadratischen Gleichung (1 des vorigen Paragraphes reell oder imaginär ausfallen, hängt offenbar von der Beschaffenheit der Wurzeln ρ_1, ρ_2, ρ_3 der reducirten Gleichung (8 ab. Da aber das letzte Glied dieser Gleichung wesentlich negativ ist, so hat diese fürs Erste (§. 24.) eine positive reelle Wurzel; die beiden übrigen Wurzeln sind entweder zugleich reell oder imaginär, und diese können im erstern Falle (vermöge §. 29.) nur beide positiv, oder beide negativ seyn. Es hat also die genannte reducirte Gleichung entweder 1) drei reelle positive, 2) eine positive und zwei negative, und endlich 3) eine reelle positive und zwei imaginäre Wurzeln.

Im ersten Falle hat nun die gegebene Gleichung (1, wie man aus den obigen Werthen von x_1, x_2... leicht sieht, lauter reelle Wurzeln. Im zweiten Falle sind diese imaginär, ausgenommen wenn die beiden negativen Wurzeln der reducirten Gleichung einander gleich werden, wodurch dann zwei Wurzeln reell, und nur die beiden andern imaginär ausfallen. Im dritten Falle endlich sind wieder zwei Wurzeln reell und die beiden übrigen imaginär.

Die gegebene Gleichung (1 hat also entweder vier reelle, oder zwei reelle und zwei imaginäre, oder vier imaginäre Wurzeln; was alles vollkommen mit §. 28. (Zus 1) übereinstimmt.

*) Die erste Regel zur Auflösung der biquadratischen Gleichungen wurde gegen Ende des XVI. Jahrhunderts von *Bombelli* (ein berühmter italienischer Algebraist des XVI Jahrhunderts) bekannt gemacht; Erfinder derselben ist jedoch *Ludovico Ferrari* (geb. zu Bologna 1522; gest. ebendaselbst 1562). Von den verschiedenen Auflösungen, welche noch hinterher von *Descartes*, *Waring* u. m A. angegeben worden sind, haben wir hier im Wesentlichen die *Euler*'sche vorgetragen.

§. 51.

Beispiel 1.

Für die Gleichung $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$ hat man $p = -25$, $q = 60$, $r = -36$; es ist also die reducirte Gleichung (8):

$$v^3 - \tfrac{25}{2}v^2 + \tfrac{769}{16}v - \tfrac{225}{4} = 0.$$

Setzt man, um die Brüche derselben wegzuschaffen (§. 36.) $v = \frac{w}{4}$, so entsteht, wenn man auch gleich mit $4^3 = 64$ multiplicirt:

$$w^3 - 50w^2 + 769w - 3600 = 0;$$

die drei Wurzeln dieser Gleichung sind, wie man leicht findet: 9, 16, 25, mithin die der reducirten Gleichung $\left(\text{wegen } v = \frac{w}{4}\right)$:

$$v_1 = \tfrac{9}{4},\quad v_2 = 4,\quad v_3 = \tfrac{25}{4}.$$

Es sind also nach den obigen Ausdrücken für (*a* die Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$x_1 = -\tfrac{3}{2} - 2 - \tfrac{5}{2} = -6,$$
$$x_2 = -\tfrac{3}{2} + 2 + \tfrac{5}{2} = +3,$$
$$x_3 = \tfrac{3}{2} - 2 + \tfrac{5}{2} = +2 \text{ und}$$
$$x_4 = \tfrac{3}{2} + 2 - \tfrac{5}{2} = +1.$$

Beispiel 2.

Um die Gleichung $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0$ aufzulösen, wird man zuerst das zweite Glied wegbringen. Man findet sofort für $x = y + \frac{7}{4}$ (§. 34.):

$$y^4 - \tfrac{11}{8}y^2 - \tfrac{3}{8}y + \tfrac{45}{256} = 0,$$

oder, wenn man die Brüche wegschafft, also $y = \frac{y'}{4}$ setzt:

$$y'^4 - 22y'^2 - 24y' + 45 = 0.$$

Da nun für diese Gleichung $p = -22$, $q = -24$, $r = 45$ ist; so hat man für die reducirte oder cubische Gleichung:

$$v^3 - 11v^2 + 19v - 9 = 0,$$

deren Wurzeln sofort sind:

$$v_1 = 1,\quad v_2 = 1,\quad v_3 = 9.$$

Man hat also nach den Ausdrücken für (*b*:

$$y'_1 = 1 + 1 + 3 = 5,$$
$$y'_2 = 1 - 1 - 3 = -3,$$
$$y'_3 = -1 + 1 - 3 = -3 \text{ und}$$
$$y'_4 = -1 - 1 + 3 = 1;$$

mithin auch $\left(\text{wegen } y = \frac{y'}{4}\right)$:

$$y_1 = \tfrac{5}{4},\ y_2 = -\tfrac{3}{4},\ y_3 = -\tfrac{3}{4} \text{ und } y_4 = \tfrac{1}{4};$$

also endlich (wegen $x = y + \frac{7}{4}$):

$$x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1 \text{ und } x_4 = 2,$$

welches sofort die gesuchten Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Auflösung einiger Gleichungen, welche sich auf andere mit kleineren Ordnungs-Exponenten herabbringen lassen.

§. 52.

Da sich, trotz aller Bemühungen der Analysten, die allgemeine Auflösung der algebraischen Gleichungen dermalen noch nicht über den vierten Grad hinaus erstreckt; so kann man auch nur jene Gleichungen höherer Grade allgemein auflösen, welche sich durch irgend eine Transformation oder Substitution auf Gleichungen herabbringen lassen, die den vierten Grad nicht übersteigen. Wir wollen nun in den nächst folgenden Paragraphen einige Gattungen von solchen Gleichungen anführen.

Einer der einfachsten Fälle ist gleich der, wenn die gegebene Gleichung die Form hat:

$$x^{nm} + A_1 x^{(n-1)m} + A_2 x^{(n-2)m} + \ldots + A_{n-1} x^m + A_n = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$x^m = y \ldots (1,$$

so wird $x^{nm} = y^n$, $x^{(n-1)m} = y^{n-1}$ u. s. w.;

daher verwandelt sich die gegebene Gleichung in die folgende:

$$y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \ldots + A_{n-1} y + A_n = 0.$$

Ist nun in dieser letzten Gleichung n nicht gröſser als 4, so läſst sie sich nach dem Vorhergehenden immer auflösen; sind dadurch die Werthe von y gefunden, so kann man aus der Gleichung (1, wie groſs auch m seyn mag, die Werthe von x, d. i. die Wurzeln der gegebenen Gleichung bestimmen, oder wenigstens dafür einen geschlossenen Ausdruck angeben.

Beispiel.

Um die Gleichung

$$x^8 - 4x^6 - 13x^4 + 64x^2 - 48 = 0$$

aufzulösen, setze man $x^2 = y$, so folgt:

$$y^4 - 4y^3 - 13y^2 + 64y - 48 = 0.$$

Es sind aber die Wurzeln dieser Gleichung: $y = 1$, 3, 4 und -4, folglich die der gegebenen Gleichung (wegen $x = \pm\sqrt{y}$): $x = \pm 1$, $\pm\sqrt{3}$, ± 2 und $\pm 2\sqrt{-1}$.

Zu den merkwürdigsten Gleichungen, welche sich noch herabbringen lassen, gehören ferner die sogenannten reciproken und binomischen Gleichungen, die wir sofort noch kurz in den nächsten Paragraphen behandeln wollen.

Die reciproken Gleichungen.

§. 53.

Erklärung.

Ist eine Gleichung $X = 0$ so beschaffen, daſs wenn sie die Wurzel α besitzt, ihr nothwendig auch der reciproke Werth $\frac{1}{\alpha}$ als solche zukommt; so heiſst diese Gleichung eine reciproke*). Man erkennt sie ganz leicht daran, daſs je zwei von den beiden äuſsern Gliedern gleichweit

*) Man sieht, daſs streng genommen, bei reciproken Gleichungen von ungerader Ordnung, eine Wurzel mit ihrem reciproken Werth zusammenfallen muſs.

abstehende Coefficienten des Polynoms X, numerisch genommen, einander gleich sind, übrigens aber dasselbe oder entgegengesetzte Zeichen besitzen können; ihre allgemeine Form ist nämlich:

$$1)\quad x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots \pm A_2 x^2 \pm A_1 x \pm 1 = 0.$$

Denn nimmt man an, dafs α eine Wurzel dieser Gleichung ist, so hat man:

$$\alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + A_2 \alpha^{n-2} + \ldots \pm A_2 \alpha^2 \pm A_1 \alpha \pm 1 = 0,$$

oder auch, wenn man durchaus mit $\pm \alpha^n$ dividirt, und die Ordnung der Glieder umkehrt:

$$\frac{1}{\alpha^n} + A_1 \frac{1}{\alpha^{n-1}} + A_2 \frac{1}{\alpha^{n-2}} + \ldots \pm A_2 \frac{1}{\alpha^2} \pm A_1 \frac{1}{\alpha} \pm 1 = 0;$$

da nun aber auch die nämliche Gleichung erhalten wird, wenn man in jener 1), $x = \frac{1}{\alpha}$ setzt, so ist auch $\frac{1}{\alpha}$ eine Wurzel dieser Gleichung 1).

Diese Eigenschaft macht es möglich, eine reciproke Gleichung von gerader Ordnung auf eine Gleichung herabzubringen, deren Grad nur halb so grofs ist. Denn es sey, nur die obern Zeichen beibehaltend, indem sich, wie wir sehen werden, der andere Fall immer auf diesen bringen läfst,

$$2)\quad x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \ldots + A_n x^n + \ldots \\ \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + 1 = 0$$

eine solche Gleichung; so erhält man, wenn man diese durch x^n dividirt und die von den beiden äufsern gleichweit abstehenden Glieder paarweise zusammennimmt:

$$3)\quad \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + A_1\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) \\ + A_2\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \ldots + A_n = 0.$$

Wird ferner in dieser Gleichung

$$4)\quad x + \frac{1}{x} = y$$

gesetzt, so erhält man, nach der Entwicklung III. §. 15.,

wenn man in dieser $a = x$ und $b = \frac{1}{x}$ setzt, wodurch $ab = a^2 b^2 = \ldots = 1$ wird:

$$5) \quad x^n + \frac{1}{x^n} = y^n - n y^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} y^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^{n-6} + \ldots$$

welche Reihe nur so weit fortgesetzt werden darf, als es möglich ist, ohne dafs dabei y negative Exponenten erhält (dadurch werden die in §. 15. angegebenen letzten Glieder entbehrlich); auch werden ganz einfach aus dieser Reihe 5) die Werthe von $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$, $x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}$, ... erhalten, wenn man in dieser statt n, nach und nach $n - 1$, $n - 2$ u. s. w. setzt.

Substituirt man die auf diese Weise für die Binome $x^n + \frac{1}{x^n}$ etc. entstehenden Werthe in der vorigen Gleichung 3); so erhält man offenbar eine Gleichung in y vom n^{ten} Grade, während die ursprüngliche 1) vom doppelten oder $2n^{ten}$ Grade ist. Kann man diese entstehende Gleichung in y auflösen, was bis zum vierten Grade angeht, so erhält man die Wurzeln x der gegebenen Gleichung aus der Relation 4); denn es folgt daraus

$$6) \quad x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}, \text{ also ist } x = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

$$\text{und } x = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} = \frac{2}{y + \sqrt{y^2 - 4}}$$

so, dafs jedem Werthe von y, zwei reciproke Werthe für x entsprechen, wodurch die n Wurzeln der Gleichung in y $2n$ Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $X = 0$ liefern.

Anmerk. Es lassen sich also die reciproken Gleichungen von gerader Ordnung allgemein bis zum achten Grade auflösen.

Beispiel.

Es sey die reciproke Gleichung

$$x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 18x^3 + 14x^2 - 6x + 1 = 0$$

zur Auflösung gegeben. Dividirt man durchaus mit x^3, so entsteht, wenn man die Glieder sogleich paarweise zusammennimmt:

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+14\left(x+\frac{1}{x}\right)-18=0;$$

$x+\frac{1}{x}=y$ gesetzt, gibt ferner, nach der obigen Reihe 5)

$$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y,\quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2\ ^{*}),$$

und wenn man diese Werthe gehörig substituirt und reducirt:

$$y^3-6y^2+11y-6=0.$$

Da nun diese Gleichung die Wurzeln $y=1$, 2, 3 besitzt, so erhält man nach der Gleichung 6)

*) Um diese Binome in speciellen Fällen unabhängig von der obigen Reihe zu entwickeln oder durch y auszudrücken, kann man auf folgende Art verfahren.

Aus $x+\frac{1}{x}=y$ folgt $x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2$, also

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

Eben so gibt die erste Gleichung, wenn sie zum Cubus erhoben wird $x^3+3x+3.\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=y^3$, daraus ist:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=y^3-3y.$$

Auf die nämliche Art kann man auch der Reihe nach alle folgenden Binome erhalten.

Noch bequemer ist der folgende Weg. Es ist überhaupt

$$\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)y=\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}}+x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}},$$

folglich allgemein:

$$\left(x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}}\right)=y\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)-\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right).$$

So ist z. B.

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=y\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^0+\frac{1}{x^0}\right)=y^2-2;$$

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=y\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=y(y^2-2)-y=y^3-3y \text{ u. s. w.}$$

$$\text{für } y = 1:\ x_1 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \text{ und } x_2 = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} = \frac{2}{1 + \sqrt{-3}}$$

$$\text{für } y = 2:\ x_3 = \frac{2 + 0}{2} = 1 \text{ und } x_4 = \frac{2 - 0}{2} = 1 = \frac{1}{1}$$

$$\text{und für } y = 3:\ x_5 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ und } x_6 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{3 + \sqrt{5}}.$$

§. 54.

Um die Behandlungsweise der reciproken Gleichungen gerader Ordnung auch im zweiten Falle, in welchem nämlich die genannten correspondirenden Coefficienten entgegengesetzte Zeichen besitzen, zu zeigen, wollen wir, was zu diesem Zwecke hinreichend ist, die Gleichung voraussetzen:

$$x^6 + A_1 x^5 + A_2 x^4 - A_2 x^2 - A_1 x - 1 = 0$$

(weil nämlich bei solchen Gleichungen das mittlere Glied fehlen muſs).

Diese Gleichung läſst sich auch auf die Form bringen:

$$(x^6 - 1) + A_1 x (x^4 - 1) + A_2 x^2 (x^2 - 1) = 0,$$

unter welcher sogleich ihre Theilbarkeit durch $x^2 - 1$ erkannt wird, und was sofort anzeigt, daſs sie die Wurzeln $x = +1$ und $x = -1$ besitzt. Theilt man wirklich, so entsteht:

$$x^4 + A_1 x^3 + (1 + A_2) x^2 + A_1 x + 1 = 0,$$

eine reciproke Gleichung des ersten Falles, oder von der Form der Gleichung 2), welche sich also nach dem vorigen Paragraphe weiter behandeln läſst.

§. 55.

Ist die reciproke Gleichung von ungerader Ordnung, so hat diese, wie man sogleich sieht, allemal die Wurzel -1, wenn in der Gleichung 1) die obern, und die Wurzel $+1$, wenn in ihr die untern Zeichen gelten. Dividirt man daher diese Gleichung, nämlich

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n+1}{2}} \pm A_{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}} \pm \ldots$$

$$\ldots \pm A_2 x^2 \pm A_1 x \pm 1 = 0$$

durch $x \pm 1$; so entsteht, wie man ebenfalls leicht findet, wenn man sich noch zur Erleichterung der Entwicklung β) im §. 26. (Zus.) bedient, eine reciproke Gleichung von gerader Ordnung. Es reicht hin, diese Behauptung in einem Beispiele nachzuweisen.

Beispiele.

1. Es sey die Gleichung aufzulösen:

$$3x^5 - x^4 - 18x^3 - 18x^2 - x + 3 = 0.$$

Da $x = -1$ eine Wurzel dieser Gleichung ist, so theile man dieselbe durch $x + 1$; dadurch entsteht:

$$3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0$$

offenbar wieder eine reciproke Gleichung, welche nunmehr von gerader Ordnung ist. Diese, nach §. 53. weiter behandelt, gibt:

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0,$$

und für $x + \frac{1}{x} = y$, auch

$$3y^2 - 4y - 20 = 0;$$

da nun $y = -2$ und $y = \frac{10}{3}$ die Wurzeln dieser letzten Gleichung sind, so erhält man mit Einschlufs der schon gefundenen, für die gegebene Gleichung die Wurzeln:

$$x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = -1 = \frac{1}{-1},\ x_4 = 3 \text{ und } x_5 = \tfrac{1}{3}.$$

2. Auf die nämliche Art findet man auch für die Gleichung

$$x^5 - \tfrac{7}{3}x^4 - \tfrac{10}{3}x^3 + \tfrac{10}{3}x^2 + \tfrac{7}{3}x - 1 = 0$$

die Wurzeln:

$$1,\ -1,\ \frac{1}{-1},\ 3 \text{ und } \tfrac{1}{3}.$$

Anmerk. 1. Wie man sieht, lassen sich die reciproken Gleichungen allgemein bis zum neunten Grade auflösen.

Anmerk. 2. Gleichungen von der Form

$$x^n + A_1 a x^{n-1} + A_2 a^2 x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots \pm A_2 a^{n-2} x^2 \pm A_1 a^{n-1} x \pm a^n = 0$$

lassen sich ebenfalls auf Reciproke bringen, indem man durchaus mit a^n dividirt, und $\frac{x}{a} = x'$ setzt.

Die zweigliederigen oder binomischen Gleichungen.

§. 56.

In der nächsten Verbindung mit den reciproken Gleichungen, stehen die **binomischen** oder **zweigliederigen**, weil sich die letzteren immer auf solche reduciren lassen. Die allgemeine Form dieser binomischen Gleichungen ist $z^n - a = 0$, wobei a positiv oder negativ seyn kann; diese läſst sich aber sogleich auf jene einfachere $x^n - 1 = 0$ bringen. Denn setzt man

$$z^n = ax^n, \quad \text{also} \quad z = x\sqrt[n]{a} \ldots (1,$$

so verwandelt sich die erstere in

$$ax^n - a = 0, \quad \text{d. i. in} \quad x^n - 1 = 0 \ldots (2;$$

wir können daher unsere Untersuchung auf diese letztere und einfachere Gleichung 2) beschränken.

Da diese Gleichung 2) fürs Erste die Wurzel $x = 1$ besitzt, so theile man durch $x - 1$; dadurch entsteht nun die **reciproke** Gleichung:

$$x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0,$$

welche sofort nach den vorhergehenden Paragraphen weiter zu behandeln ist.

Beispiel 1.

Für die Gleichung $z^5 - 32 = 0$ hat man, wenn

$$z = x\sqrt[5]{32} = 2x \quad \text{gesetzt wird:}$$

$$32x^5 - 32 = 0, \quad \text{oder} \quad x^5 - 1 = 0.$$

Diese letzte Gleichung durch $x - 1$ getheilt, gibt noch die Gleichung

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0, \quad \text{oder}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0,$$

und wenn man $x + \frac{1}{x} = y$ setzt:

$$y^2 + y - 1 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; folglich hat man aus der vorigen Relation (oder nach Gl. 6) §. 53.), für x die Werthe:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4} \text{ und } \frac{-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

und es sind endlich (wegen $z = 2x$) die fünf Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$z = 2, \frac{-1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{2}.$$

Für die Gleichung $z^5 + 32 = 0$, wäre in (1 a negativ, d. i. $a = -32$; man müſste nämlich

$$z = x\sqrt[5]{-32} = -2x$$

setzen, wodurch die gegebene Gleichung in jene

$$-32x^5 + 32 = 0,$$

also wieder in die vorige

$$x^5 - 1 = 0$$

umgewandelt würde; es dürften daher, wegen $z = -2x$, die vorigen Wurzeln z nur mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden, um jene der Gleichung $z^5 + 32 = 0$ zu haben.

Beispiel 2.

Für die Gleichung $z^6 - 3 = 0$, setze man $z = x\sqrt[6]{3}$, so geht diese über in

$$3x^6 - 3 = 0, \text{ oder in } x^6 - 1 = 0,$$

welche sofort aufzulösen ist. Da $x = \pm 1$ Wurzeln dieser Gleichung sind, so entsteht, wenn man durch den quadratischen Factor $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ dividirt:

$$x^4 + x^2 + 1 = 0,$$

und daraus hat man auch, ohne erst das Verfahren der reciproken hierauf anzuwenden:

$$x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}, \text{ oder}$$

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)} = \pm \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3}).$$

Es hat also die Gleichung $x^6 - 1 = 0$ die Wurzeln:

$$+1,\ -1,\ \frac{1+\sqrt{-3}}{2},\ \frac{1-\sqrt{-3}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},$$

welche sofort der Reihe nach mit $\sqrt[6]{3}$ multiplicirt, in die der Gleichung $z^6 - 3 = 0$ übergehen.

Wären noch die Wurzeln der Gleichung $z^6 + 1 = 0$ zu finden, so dürfte man (Gl. (1) nur

$$z = x\sqrt[6]{-1} = x\sqrt[3]{(\sqrt{-1})} = x\sqrt{-1}$$

setzen, um wieder auf die vorige Gleichung $x^6 - 1 = 0$ zu kommen; folglich dürfen auch nur die vorigen Wurzeln der Gleichung $x^6 - 1 = 0$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt werden, um jene der Gleichung $x^6 + 1 = 0$ zu erhalten; diese sind nämlich:

$$+\sqrt{-1},\ -\sqrt{-1},\ \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{2},\ \frac{\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{2},\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{-1}}{2},$$

$$\text{und}\ \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{-1}}{2}\ *).$$

Anmerk. Diese binomischen Gleichungen lassen sich also mit Hilfe der reciproken bis zum zehnten Grade allgemein auflösen; und die wirkliche Auflösung aller Gleichungen von $x^2 \mp 1 = 0$, $x^3 \mp 1 = 0, \ldots$ bis $x^{10} \mp 1 = 0$, gewährt dem Anfänger eine gute und empfehlenswerthe Uebung.

Uebrigens müssen wir noch bemerken, daſs sich durch ein wiederholtes Verfahren auch alle binomischen Gleichungen

*) Wir werden weiter unten (im neunten Capitel) zeigen, wie man mit Hilfe der Kreisfunctionen alle zweigliederigen Gleichungen, sie mögen was immer für Exponenten besitzen, näherungsweise auflösen kann.

Hinsichtlich der allgemeinen Auflösung der Gleichung $x^n = 1$, so wie des merkwürdigen Satzes, daſs wenn der Exponent einer binomischen Gleichung eine Primzahl ist, alle Wurzeln dieser Gleichung von irgend einer derselben, welche nicht 1 ist, gewisse Potenzen sind, d. h. daſs wenn α irgend eine Wurzel, auſser jener 1, der Gleichung $x^n - 1 = 0$ bezeichnet, und n eine Primzahl ist, dann die Potenzen α^2, $\alpha^3 \ldots \alpha^n$ ebenfalls Wurzeln dieser Gleichung sind: kann man unter andern in *Lagrange's* Theorie der Gleichungen, den 13. und 14. Zusatz nachsehen.

auflösen lassen, deren Exponenten Producte von Primzahlen sind, davon keine 7 übersteigt. Ist z. B. die Gleichung $x^{15} - 1 = 0$ gegeben; so setze man, wegen $15 = 3 . 5$: $x^5 = z$, so wird $z^3 - 1 = 0$, und man kann sofort die Wurzeln z dieser Gleichung bestimmen, worauf man wieder aus $x^5 - z = 0$ die Wurzeln x der ursprünglichen Gleichung findet.

Ueber die Auflösung der numerischen Gleichungen.

§. 57.

Wir haben schon bemerkt (§. 52.), daſs alle Bemühungen der Analysten, eine allgemeine Auflösungsmethode für Gleichungen zu finden, welche den vierten Grad übersteigen, bisher fruchtlos gewesen sind; wir fügen hier hinzu, daſs sogar mehrere Beweise für die Unmöglichkeit einer solchen allgemeinen Auflösung bestehen *). Glücklicher Weise ist dieser Umstand für die Auflösung numerischer, d. i. solcher Gleichungen, in welchen die Coefficienten Zahlen sind, und auf welchen am Ende die Auflösung einer jeden bestimmten Aufgabe beruht, selbst nicht erheblich, indem schon die noch in unserer Macht liegende allgemeine Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades, auf so verwickelte und zum Theil unbrauchbare Formen führt, daſs man auch hier schon für die wirkliche Berechnung der Wurzeln lieber von jenen arithmetischen Methoden Gebrauch macht, welche von den Analysten für die Auflösung der numerischen Gleichungen überhaupt sind erfunden und aufgestellt worden **).

*) *Ruffini* (*Paul*, geb. zu Valentano 1765; gest. zu Modena 1822): »*Riflessioni intorno alla Soluzione delle Equazioni Algebraiche generali. Modena* 1813.« gr. 4. Parte I. Capo I. und Parte II. Capo III.

Abel: »Beweis der Unmöglichkeit algebraische Gleichungen von höhern Graden als dem vierten allgemein aufzulösen.« *Crelle's* Journal für die reine und angewandte Mathematik. Berlin 1826. I. Bd. S. 65.

**) Vorzüglich vieles haben wir darin den Bemühungen des berühmten *Lagrange* (geb. zu Turin 1736; gest. zu Paris 1813) zu verdanken.

Von diesen Methoden nun, welche zum Zwecke haben, die Wurzeln der numerischen Gleichungen von jedem Grade, entweder vollkommen genau, oder wenn diefs nicht möglich ist, mit jeder beliebigen Annäherung an den wahren Werth, zu berechnen, und welche sofort auf den bisher vorgetragenen Sätzen und Eigenschaften der Gleichungen mit allgemeinen Coefficienten beruhen: werden wir im Nachstehenden das Nöthigste in Kürze entwickeln.

Für die folgenden Untersuchungen setzen wir hier ein für alle Mal fest, dafs in der gut geordneten Gleichung $X = o$ die Coefficienten ganze, positive oder negative, rationale Zahlen seyn sollen. Da übrigens die Wurzeln einer Gleichung rational, irrational, oder auch imaginär seyn können; so werden wir bei der Behandlung der numerischen Gleichungen, auf diese verschiedene Beschaffenheit der Wurzeln Rücksicht nehmen Wir beginnen sofort mit der Aufsuchung der Grenzen der Wurzeln.

Grenzen der reellen Wurzeln.

§. 58.

Erklärung.

Zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit, dafs die eine gröfser als die gröfste, und die andere kleiner als die kleinste vorkommende positive Wurzel einer gegebenen Gleichung ist, heifsen Grenzen der positiven Wurzeln dieser Gleichung; und zwar wird die erste, die äufsere oder obere, und die letztere, die innere oder untere Grenze genannt. Dasselbe gilt auch für die negativen Wurzeln, wenn man dabei die numerischen Werthe nimmt, und vom Zeichen abstrahirt. Nimmt man, wie es zur gröfsern Einfachheit fast immer geschieht, die Nulle zur innern oder untern Grenze, so heifst auch jede Zahl, über welche hinaus keine der positiven Wurzeln liegen kann, Grenze der positiven, und eine Zahl, welche gröfser ist als der gröfste numerische Werth der negativen Wurzeln, Grenze der negativen Wurzeln.

Der gegebenen Erklärung zu Folge kann es für die

Wurzeln einer jeden Gleichung unzählige Grenzen geben; allein, wenn von der Bestimmung der Grenzen der Wurzeln einer gegebenen Gleichung die Rede ist, so versteht man darunter immer jene, welche die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung so nahe oder enge als möglich, und zwar der Regel nach in ganzen Zahlen einschliefsen. Da, wie wir sehen werden, nach demselben Verfahren, welches man anwendet um die obere Grenze der positiven Wurzeln einer Gleichung zu bestimmen, auch die untere Grenze g derselben, und die beiden Grenzen G' und g' der negativen Wurzeln gefunden werden; so wollen wir uns sofort mit der Auffindung von G beschäftigen.

§. 59.

1. Eine erste, jedoch in der Regel immer sehr weite, Grenze liefert der im §. 22. aufgestellte Lehrsatz. Ist nämlich A_m der gröfste Coefficient des Polynoms X, so ist offenbar $A_m + 1$ gröfser, als jede Wurzel der Gleichung $X = 0$. Auch ist diese Zahl $A_m + 1$ immer noch hinreichend grofs, wenn man für A_m die Absolutzahl des gröfsten negativen Coefficienten nimmt, wodurch diese Grenze, in vielen Fällen wenigstens, etwas kleiner ausfällt.

2. Es läfst sich ferner zeigen, dafs wenn x^{n-m} jene Potenz von x, welche dem ersten, in dem Polynom X vorkommenden negativen Gliede entspricht, und R der gröfste vorkommende negative Coefficient ist; in jedem Falle, selbst wenn alle auf das mit x^{n-m} folgenden Glieder negativ und mit diesem Coefficienten R behaftet wären (welcher nachtheiligste Fall am leichtesten zu beweisen ist), die Zahl $\sqrt[m]{R} + 1$ eine obere Grenze der positiven Wurzeln der Gleichung $X = 0$ bildet.

3. Die sicherste Methode jedoch, für die Grenze G die möglich kleinste Zahl zu finden, besteht darin, dafs man die gegebene Gleichung $X = 0$ durch Substitution von $x = y + \alpha$, in jene $Y = 0$ (§. 33) verwandelt, und sodann durch Probiren die kleinste ganze Zahl für α sucht, für welche die sämmtlichen Coefficienten $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_n$ dieser

Gleichung $Y = y^n + \mathfrak{T}_1 y^{n-1} + \ldots \mathfrak{T}_n = o$ (β), deren einfaches Ableitungsgesetz bekannt, und im genannten Paragraphe erwähnt ist, positiv ausfallen. Dadurch werden nämlich (§. 32. auch §. 29. Zus. 3.) die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $Y = o$ negativ, und da diese durch $y = x - \alpha$ ausgedrückt sind, so folgt daraus, dafs α gröfser als jede Wurzel x seyn mufs; folglich ist nicht nur α eine obere Grenze G der positiven Wurzeln x, sondern zugleich die kleinste Zahl, welche diese Eigenschaft besitzt *). Wird bei diesem Probiren der Zahlen für α in $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2 \ldots \mathfrak{T}_n$ für irgend eine Zahl $\mathfrak{T}_n = o$; so ist, wie man leicht aus dem Werthe von $\mathfrak{T}_n$ sieht, diese zugleich eine Wurzel der gegebenen Gleichung $X = o$.

4. Um die obere Grenze G' der negativen Wurzeln, d. i. die kleinste Zahl zu finden, über welche hinaus keine negative Wurzel ihrem numerischen Werthe nach liegen kann; verwandle man die gegebene Gleichung $X = o$ durch die Substitution von $x = -x$ (oder kürzer nach §. 30.) in die Gleichung $\underline{X} = o$ mit entgegengesetzten Wurzeln, und suche für diese nach dem Vorigen die obere Grenze der positiven Wurzeln, so ist diese offenbar zugleich die Grenze G' der negativen Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $X = o$.

5. Um endlich auch die beiden untern Grenzen g und g' der gegebenen Gleichung $X = o$ zu bestimmen, wenn diese nämlich sowohl positive als auch negative Wurzeln besitzt; so verwandle man diese durch die Substitution von $x = \frac{1}{y'}$ in die Gleichung $Y' = o$, und suche für diese letztere, nach den eben angegebenen Methoden, die obern Grenzen G und G', so sind $\frac{1}{G} = g$ und $\frac{1}{G'} = g'$ die untern Grenzen für die positiven und negativen Wurzeln der Gleichung $X = o$; nämlich die gröfsten Zahlen, unter welchen beziehungsweise die numerischen Werthe der positiven und negativen Wurzeln nicht liegen können.

*) Diese Methode rührt von *Newton* her.

Beispiel.

Um das in diesem Paragraphe Vorgetragene durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir die Grenzen der Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + x^3 - 81x^2 - 25x + 1400 = 0$$

aufsuchen.

Sucht man zuerst die Grenze G, so könnte man sogleich nach 1. dafür $81 + 1 = 82$ nehmen; was aber offenbar viel zu grofs wäre.

Nach der angedeuteten zweiten Methode wäre $n = 4$, $n - m = 2$, also $m = 2$ und $R = 81$, folglich

$$G = \sqrt{81} + 1 = 10,$$

welche schon bedeutend näher läge.

Um endlich nach der sichersten oder vollkommsten Methode (3) die obere Grenze G der positiven Wurzeln zu bestimmen, hat man für die Coefficienten $\mathfrak{X}_n$, $\mathfrak{X}_{n-1} \ldots \mathfrak{X}_1$ der transformirten Gleichung $Y = 0$, nach dem bekannten Gesetze (§. 33.):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}_4 &= \alpha^4 + \alpha^3 - 81\alpha^2 - 25\alpha + 1400 \\
\mathfrak{X}_3 &= 4\alpha^3 + 3\alpha^2 - 162\alpha - 25 \\
\mathfrak{X}_2 &= 6\alpha^2 + 3\alpha - 81 \\
\mathfrak{X}_1 &= 4\alpha + 1.
\end{aligned}$$

Versucht man nun in diesen Gleichungen für α nach und nach die Zahlen 1, 2, 3..., so findet man sehr bald, dafs $\alpha = 7$ die kleinste Zahl ist, welche die sämmtlichen Coefficienten $\mathfrak{X}_4$, $\mathfrak{X}_3 \ldots$ positiv macht; es ist daher $G = 7$ die obere Grenze der positiven Wurzeln der gegebenen Gleichung. Da übrigens noch für $\alpha = 7$: $\mathfrak{X}_4 = 0$ wird (welches die gegebene Gleichung ist, nur für x α gesetzt), so ist 7 zugleich eine Wurzel dieser Gleichung.

Für die Gleichung $\underline{X} = 0$ mit entgegengesetzten Wurzeln hat man (§. 30.):

$$x^4 - x^3 - 81x^2 + 25x + 1400 = 0,$$

und dafür wieder

$$\mathfrak{X}_4 = \alpha^4 - \alpha^3 - 81\alpha^2 + 25\alpha + 1400$$
$$\mathfrak{X}_3 = 4\alpha^3 - 3\alpha^2 - 162\alpha + 25$$
$$\mathfrak{X}_2 = 6\alpha^2 - 3\alpha - 81$$
$$\mathfrak{X}_1 = 4\alpha - 1.$$

Setzt man auch hier für α nach und nach die Zahlen 1, 2, 3..., so findet man, dafs $\alpha = 8$ die kleinste Zahl ist, welche diese sämmtlichen Coefficienten positiv macht; es ist also 8 die Grenze der positiven Wurzeln der Gleichung $\underline{X} = 0$, oder die Grenze G' der negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung. Auch ist hier 8 zugleich wieder eine Wurzel dieser Gleichung.

Da also über $+7$ und -8 hinaus keine reelle Wurzel der angenommenen Gleichung liegen kann, und diese äufsern oder obern Grenzen selbst nicht weit aus einander liegen; so ist es in diesem Falle nicht der Mühe werth, die innern oder untern Grenzen zu bestimmen *), und man kann recht gut 0 dafür gelten lassen, so, dafs also keine positive Wurzel über 0 und $+7$, und keine negative über 0 und -8 hinausfallen kann. Und in der That sind die Wurzeln dieser Gleichung:

$$+7, +5, -5, -8.$$

Das Aufsuchen der *rationalen* Wurzeln.

§. 60.

Lehrsatz.

Eine Gleichung $X = 0$, in welcher die sämmtlichen Coefficienten *ganze* Zahlen sind, kann keinen (rationalen) Bruch zur Wurzel haben.

Denn es sey $\frac{\alpha}{\beta}$ ein solcher Bruch, und wenn es möglich ist, $x = \frac{\alpha}{\beta}$ eine Wurzel der Gleichung $X = 0$; so erhält man durch die Substitution dieses Werthes von x in $X = 0$, wenn man zugleich durchaus mit β^{n-1} multiplicirt:

*) Ohnehin werden wir weiter unten (§. 67.) noch Gelegenheit haben, die untern Grenzen der Wurzeln einer Gleichung aufzusuchen.

$$\frac{\alpha^n}{\beta} + A_1 \alpha^{n-1} + A_2 \alpha^{n-2} \beta + \ldots + A_{n-1} \alpha \beta^{n-2} + A_n \beta^{n-1} = 0.$$

Dieser Gleichung zufolge könnte sich also ein Bruch mit einer Reihe von ganzen Zahlen (weil, der Voraussetzung gemäſs, A_1, $A_2 \ldots A_n$, α und β ganze Zahlen sind) aufheben, was ungereimt ist; es kann also auch nicht $x = \frac{\alpha}{\beta}$ seyn, wenn in $x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0$ die sämmtlichen Coefficienten ganze Zahlen sind.

§. 61.

Hat man nun die gegebene numerische Gleichung nach §. 20. geordnet, und die etwa vorhandenen Brüche nach §. 36. weggeschafft; so müssen die rationalen Wurzeln derselben (§. 60.) ganze Zahlen, und überdieſs (§. 29.) Divisoren des letzten Gliedes seyn. Zerlegt man daher das letzte Glied der Gleichung in die einfachen und zusammengesetzten Factoren, und setzt diese, wenn nämlich das Polynom der Gleichung, Zeichenwechsel und Folgen besitzt, sowohl positiv wie negativ, nach und nach für x; so sind diejenigen Factoren, welche das Polynom auf Null bringen, Wurzeln der Gleichung.

Um jedoch dieses Verfahren, welches sehr ermüdend werden kann, wenn das letzte Glied aus vielen Factoren besteht, abzukürzen und zu vereinfachen, dienet folgende Betrachtung.

Es sey, um die Ideen festzusetzen, α eine Wurzel der Gleichung

$$x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 = 0;$$

so ist auch

$$\alpha^4 + A_1 \alpha^3 + A_2 \alpha^2 + A_3 \alpha + A_4 = 0.$$

Daraus folgt, weil immer der zweite Theil der Gleichung ganze Zahlen liefert, daſs die auf einander folgenden Quotienten, wenn man nämlich Kürze halber

$$\frac{A_4}{\alpha} = A, \quad \frac{A + A_3}{\alpha} = B, \quad \frac{B + A_2}{\alpha} = C \quad \text{setzt:}$$

$$\frac{A_4}{\alpha} = -A_3 - A_2\alpha - A_1\alpha^2 - \alpha^3$$

$$\frac{A + A_3}{\alpha} = -A_2 - A_1\alpha - \alpha^2$$

$$\frac{B + A_2}{\alpha} = -A_1 - \alpha$$

$$\frac{C + A_1}{\alpha} = -1$$

ganze Zahlen sind, und dafs man endlich hat:

$$\frac{C + A_1}{\alpha} + 1 = 0.$$

Diese Schlüsse, welche offenbar auf jede Gleichung ausgedehnt werden können, führen sofort zu folgendem Verfahren.

Nachdem man in dem Polynome der gegebenen Gleichung, in welchem die fehlenden Glieder durch Nullen ergänzt worden sind, den Factor ± 1 (wenn nämlich die Gleichung sowohl positive als auch negative Glieder haben kann) auf gewöhnliche Art, durch Substitution, versucht hat, nehme man den nächstfolgenden Factor und theile damit das letzte Glied der Gleichung; zum entstehenden Quotienten addire man mit seinem Zeichen den nächst vorhergehenden oder vorletzten Coefficienten; diese Summe theile man wieder durch den zu prüfenden Factor und addire, wenn man einen ganzen Quotienten erhält, dazu abermals den nächst vorhergehenden Coefficienten mit Rücksicht auf sein Zeichen; und so fahre man fort, bis man zum letzten (ganzzahligen) Quotienten, den ersten Coefficienten (d. i. bei gut geordneten Gleichungen 1) addirt hat; ist nun diese Summe gleich Null, so ist der versuchte Factor eine Wurzel der Gleichung; wird diese Summe nicht Null, oder war schon früher irgend eine der entstehenden, genannten Summen, durch diesen Factor nicht theilbar, so ist dieser sogleich als unbrauchbar, d. i. als eine Zahl die keine Wurzel ist, zu beseitigen.

Beispiel.

Um die reellen, rationalen Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + 3x^3 - 31x^2 - 63x + 90 = 0$$

zu finden, hat man fürs Erste als Factoren des letzten Gliedes 90, die Zahlen:

1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90,

welche man der Reihe nach, sowohl positiv als auch negativ versuchen wird, indem die Gleichung sowohl positive, als auch negative Wurzeln vermuthen läſst.

Für $x = 1$ hat man

$$1 + 3 - 31 - 63 + 90,$$

welche Summe wirklich Null, daher 1 eine Wurzel ist.

Für $x = -1$ entsteht

$$1 - 3 - 31 + 63 + 90 = 120;$$

also ist -1 keine Wurzel.

Ferner ist, wenn man den Factor $+2$ versucht:

$$\frac{90}{2} = 45 - 63 = \frac{-18}{2} = -9 - 31 = \frac{-40}{2}$$
$$= -20 + 3 = \frac{-17}{2};$$

$+2$ ist keine Wurzel. Eben so folgt:

$$\frac{90}{-2} = -45 - 63 = \frac{-108}{-2} = 54 - 31 = \frac{23}{-2};$$

-2 ist keine Wurzel.

$$\frac{90}{3} = 30 - 63 = \frac{-33}{3} = -11 - 31 = \frac{-42}{3}$$
$$= -14 + 3 = \frac{-11}{3};$$ $+3$ ist keine Wurzel.

$$\frac{90}{-3} = -30 - 63 = \frac{-93}{-3} = 31 - 31 = \frac{0}{-3}$$
$$= 0 + 3 = \frac{3}{-3} = -1 + 1 = 0;$$ -3 ist eine Wurzel.

$$\frac{90}{5} = 18 - 63 = \frac{-45}{5} = -9 - 31 = \frac{-40}{5}$$
$$= -8 + 3 = \frac{-5}{5} = -1 + 1 = 0;$$ $+5$ ist eine Wurzel.

$$\frac{90}{-5} = -18 - 63 = \frac{-81}{-5};$$ -5 ist keine Wurzel.

$$\frac{90}{6} = 15 - 63 = \frac{-48}{6} = -8 - 31 = \frac{-39}{6};$$

$+6$ ist keine Wurzel.

$$\frac{90}{-6} = -15 - 63 = \frac{-78}{-6} = 13 - 31 = \frac{-18}{-6}$$
$$= 3 + 3 = \frac{6}{-6} = -1 + 1 = 0;$$

es ist also auch -6 eine Wurzel.

Da man nun eben so viele Wurzeln gefunden hat, als die gegebene Gleichung deren haben kann; so ist man mit dieser Untersuchung am Ende *).

*) Hat das letzte Glied eine bedeutende Anzahl von Factoren, so kann man oft viele derselben sogleich, ohne erst nach §. 59. 3, die Grenzen der Wurzeln zu bestimmen, durch die folgenden Betrachtungen ausschliefsen.

1. Setzt man in das Polynom X der Gleichung $X = 0$ $x = a$, so kann (§. 33.) das Resultat dieser Substitution als das letzte Glied Σ_n der transformirten Gleichung $Y = 0$ angesehen werden, in welcher die Wurzeln y durch $y = x - a$ ausgedrückt sind. Hat nun dieses Resultat (oder letztes Glied Σ_n) die Factoren p, q . . ., so können, wegen $x = y + a$, die rationalen Wurzeln der Gleichung $X = 0$ nur unter jenen Factoren des letzten Gliedes A_n enthalten seyn, welche die Form $\pm p + a$, $\pm q + a$, . . . haben; wodurch oft sogleich viele Factoren ausgeschlossen werden. So kann man z. B. dieses Verfahren auf die Gleichung:

$$x^5 - 25x^4 + 249x^3 - 1624x^2 + 7329x - 14670 = 0,$$

in welcher das letzte Glied $14670 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 163$ aus $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ einfachen und zusammengesetzten Factoren besteht, mit Vortheil anwenden.

2. Eine zweite Methode, viele Factoren des letzten Gliedes, welche keine Wurzeln der Gleichung seyn können, sogleich zu beseitigen, besteht in Folgendem: Man setze im Polynome der gegebenen Gleichung $x = +1$ und $x = -1$, und bezeichne die entstehenden Resultate beziehungsweise durch R und R' (wird R oder $R' = 0$, so kann sofort das Polynom durch $x - 1$ oder $x + 1$ getheilt werden); diejenigen Factoren des letzten Gliedes nun, welche positiv genommen um 1 vermindert nicht R, und zugleich um 1 vermehrt nicht R' theilen, können keine Wurzeln der Gleichung seyn. Eben so sind auch jene Factoren, welche negativ genommen um 1 vermindert nicht R' und um 1 vergröfsert nicht R theilen, sogleich als Nichtwurzeln wegzulassen.

Der Beweis findet sich ganz einfach von selbst, wenn man berücksichtiget, dafs für den Fall, für welchen a eine Wurzel der Gleichung $X = 0$ ist, die Gleichung besteht (§. 27. Gl. 1):

$$X = (x - a)(x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + B_2 x^{n-3} \ldots + B_{n-1}).$$

Als Beispiel kann die Gleichung

$$x^4 - 5x^3 - 27x^2 + 257x - 360 = 0$$

dienen, auf welche man diese erwähnte Eigenschaft oder Methode mit Vortheil anwenden kann.

§. 62.

Hat man auf die angezeigte Weise nicht **alle** Wurzeln der gegebenen Gleichung finden können, so ist es möglich, dafs sie **gleiche** Wurzeln besitzt; davon kann man sich nun entweder gleich im Anfange nach §. 39. überzeugen, oder man kann die Gleichung durch die aus den bereits gefundenen Wurzeln entstehenden einfachen Factoren, oder durch ihr Product dividiren, und die herauskommende Gleichung wieder neuerdings auf die nämliche Art weiter behandeln und untersuchen.

Beispiel.

Für die schon in §. 39. angeführte Gleichung

$$x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8 = 0$$

findet man nach dem im vorigen Paragraphe angegebenen Verfahren nur die Wurzeln $x = -1$ und $x = 2$; dividirt man diese daher durch $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$, so erhält man zum Quotienten die Gleichung:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0.$$

Für diese findet man neuerdings die Wurzeln $x = -1$ und $x = 2$; theilt man daher abermals durch

$$(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2,$$

so erhält man $x - 2 = 0$, woraus noch die Wurzel $x = 2$ folgt. Es sind daher (wie wir auch schon oben im §. 39. fanden) -1, -1, 2, 2, 2 die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Hat man von einer Gleichung alle Wurzeln bis auf **zwei** gefunden, so lassen sich diese, sie mögen wie immer beschaffen seyn, allemal durch Auflösung der quadratischen Gleichung finden, welche als Quotient entsteht, wenn man die gegebene Gleichung durch das Product der, den bereits gefundenen Wurzeln entsprechenden einfachen Factoren dividirt.

Beispiel.

Für die Gleichung $x^3 - 30x - 56 = 0$ findet man nur

die einzige rationale Wurzel $x = -4$; theilt man aber durch den Factor $x + 4$, so entsteht die quadratische Gleichung $x^2 - 4x - 14 = 0$, welche nach der Regel aufgelöst, noch die beiden Wurzeln liefert:

$$x = 2 \pm 3\sqrt{2}.$$

Die gegebene Gleichung hat also die Wurzeln:

$$-4,\ 2 + 3\sqrt{2} \text{ und } 2 - 3\sqrt{2}.$$

Das Aufsuchen der *irrationalen* Wurzeln.

§. 63.

Da man die rationalen Wurzeln einer Gleichung immer durch die Division mit den betreffenden einfachen Factoren, ferner auch die gleichen Wurzeln (§. 39.) wegschaffen kann; so haben wir es hier blofs mit Gleichungen zu thun, deren Wurzeln sämmtlich verschieden, und entweder irrational, oder imaginär sind.

Um nun die irrationalen Wurzeln, welche man ihrer algebraischen Form nach nur für Gleichungen, die den vierten Grad nicht übersteigen, angeben kann, näherungsweise zu finden, mufs man jede derselben zuerst zwischen zwei, höchstens um eine Einheit von einander verschiedene, Zahlen einzuschliefsen suchen. Zu diesem Ende sucht man (besonders wenn das letzte Glied aus sehr vielen Factoren besteht) zuerst nach §. 59. (3 und 4) die äufsern Grenzen G und G' der Wurzeln, substituirt sodann in dem Polynome X für x nach und nach die Werthe $0, 1, 2 \ldots G$ und (wenn nämlich auch Zeichenfolgen vorhanden sind) $-1, -2 \ldots -G'$, und bemerkt, für welche zwei auf einander folgende Substitutionen X sein Zeichen wechselt; indem nämlich zwischen je zwei solchen Zahlen, welche einen Zeichenwechsel hervorbringen (§. 23.), wenigstens eine reelle Wurzel liegt. Bei dieser Untersuchung hat man nun entweder *A*) eben so viele, oder *B*) weniger Wurzeln entdeckt, als der Ordnungsexponent n der Gleichung Einheiten hat (d. i. als die Gleichung Wurzeln haben mufs). Wir wollen sofort jeden dieser beiden Fälle besonders behandeln.

§. 64.

A) Wenn sich eben so viele reelle Wurzeln verrathen, als der Ordnungsexponent n Einheiten hat (oder wenigstens so viele, daſs wenn die Gleichung durch die daraus entspringenden Factoren dividirt wird, die als Quotient entstehende Gleichung leicht aufgelöst werden kann).

In diesem Falle liegt zwischen zwei auf einander folgenden Zahlen, für welche im Polynome X ein Zeichenwechsel eintritt, nur eine einzige Wurzel a, welche man durch einige Versuche oder Substitutionen sehr bald so weit einschlieſsen oder bestimmen kann, daſs sie von dem wahren Werthe um weniger als $\frac{1}{10}$ abweicht. Setzt man nun in der gegebenen Gleichung $x = a + y$, wo also $y < \frac{1}{10}$ ist; so erhält man (§. 33.):

$$X + X_1 y + X_2 y^2 + \ldots + X_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0,$$

oder

$$y = -\frac{X}{X_1} - \frac{X_2}{X_1} y^2 - \ldots - \frac{X_{n-1}}{X_1} y^{n-1} - \frac{1}{X_1} y^n,$$

wenn man nämlich das Polynom X und die daraus abgeleiteten X_1, $X_2 \ldots$ so versteht, daſs überall statt x, a zu setzen ist.

Vernachläſsigt man von dem eigentlichen Bruche y die zweiten und höhern Potenzen, so erhält man als ersten Näherungswerth von y:

$$y = -\frac{X}{X_1} \ldots (\beta\ ^*);$$

das bedeutendste der weggelassenen Glieder ist $-\frac{X_2}{X_1} y^2$,

*) Es ist daher, wenn man den ersten Näherungswerth von x anstatt mit a, mit x' bezeichnet, ein im Allgemeinen genauerer Werth, wegen $x = x' + y$:

$$x = x' - \left(\frac{x'^n + A_1 x'^{n-1} + \ldots + A_n}{n x'^{n-1} + (n-1) A_1 x'^{n-2} + \ldots + A_{n-1}} \right)$$

$$= \frac{(n-1) x'^n + (n-2) A_1 x'^{n-1} + \ldots}{n x'^{n-1} + (n-1) A_1 x'^{n-2} + \ldots};$$

unter welcher Form die obige Näherungsformel manchmal vorkömmt.

$\left(\text{nahe} = -\frac{X^2 X_2}{X_1^3}\right)$, welches man zwar noch in Rechnung bringen könnte, dadurch aber die Formel (β auf eine unvortheilhafte Weise zusammensetzen würde.

Setzt man diesen für y gefundenen Werth in $x = a + y$, so hat man nun schon, wenigstens im Allgemeinen genommen, einen genauern Werth für die Wurzel x. Läſst man diesen für a gelten, und berechnet mit diesem Werthe neuerdings aus (β den Werth y; so erhält man dadurch wieder einen mehr genäherten Werth von x, u. s. w. Wir wollen diese Methode sogleich auf ein Beispiel anwenden.

Beispiel.

Es sey die Gleichung zur Auflösung gegeben:

$$x^3 - 5x - 3 = 0.$$

Für die äuſsern Grenzen der Wurzeln derselben findet man (§. 59.): $+3$ und -2; ferner wird für

$x = -2$	das Polynom	$X = -1$
$x = -1$	» »	$X = +1$
$x = \mp 0$	» »	$X = -3$
$x = +1$	» »	$X = -7$
$x = +2$	» »	$X = -5$
$x = +3$	» »	$X = +9.$

Es liegt also eine positive Wurzel zwischen 2 und 3, und von den beiden negativen Wurzeln liegt eine zwischen 0 und -1, und die andere zwischen -1 und -2. Um nun zuerst die positive Wurzel näherungsweise zu berechnen, nehme man Anfangs die Wurzel in der Mitte zwischen 2 und 3, und setze $x = 2{\cdot}5$; dafür wird $X = +{\cdot}125$, welches sofort zeigt, daſs x zwischen 2 und 2·5 liegt. Setzt man dagegen $x = 2{\cdot}4$, so wird $X = -1{\cdot}176$, woraus also wieder hervorgeht, daſs die gesuchte Wurzel zwischen 2·4 und 2·5 eingeschlossen ist. Da also die Wurzel schon bis auf $\frac{1}{10}$ genau bestimmt ist, so setze man $a = 2{\cdot}4$; dafür folgt aus der Formel (β:

$$y = -\frac{(2{\cdot}4)^3 - 5(2{\cdot}4) - 3}{3(2{\cdot}4)^2 - 5} = \frac{1{\cdot}176}{12{\cdot}28} = {\cdot}0958,$$

mithin ist

$$x = 2{\cdot}4 + {\cdot}0958 = 2{\cdot}4958$$

ein genauerer Werth von x, wobei man jedoch noch keinesweges auf die Richtigkeit der dritten und vierten Decimalstelle vollkommen rechnen darf.

Setzt man ferner $a = 2{\cdot}496$, so folgt aus derselben Formel (β, wenn man jetzt die Rechnung auf sechs Decimalstellen anlegt:

$$y = -{\cdot}005122;$$

es ist daher als folgender Näherungswerth:

$$x = 2{\cdot}496 - {\cdot}005122 = 2{\cdot}490878.$$

Für $a = 2{\cdot}49087$ findet man eben so

$$y = -{\cdot}000006038, \text{ also}$$

$$x = 2{\cdot}49087 - {\cdot}00000604 = 2{\cdot}49086396 \text{ u. s. w.}$$

Um zu erfahren, wie weit der jedes Mal gefundene Näherungswerth genau ist, bemerke man, daſs wenn die m^{te} Decimalstelle noch richtig seyn soll, dieser Werth, und dann der nächst folgende, in welchem diese m^{te} Stelle um eine Einheit vergröſsert ist, für x gesetzt, Resultate mit entgegengesetzten Zeichen (in X) hervorbringen müssen. Auf diese Weise findet man, daſs der letzte Werth von x bis zur sechsten Decimalstelle genau ist. Und in der That hat man $x = 2{\cdot}4908636$ (die beiden andern Wurzeln werden im nächsten Paragraphe angegeben werden).

So einfach aber diese von *Newton* herrührende Näherungsmethode *) ihrem Principe nach ist, so sorgfältig muſs man bei ihrer Anwendung zu Werke gehen, und sich dabei öfter von dem Grade der Annäherung auf die angeführte Weise überzeugen und Rechenschaft geben; denn es ist bei einer gewissen Beschaffenheit der Wurzeln möglich, daſs man sich bei der wiederholten Anwendung dieses Verfahrens, anstatt dem wahren Werthe der Wurzel zu nähern,

*) Er lehrte dieses Verfahren in seiner Fluxions-Methode, und im Jahre 1685 machte dasselbe zuerst *Wallis* (geb. zu Ashford in der Grafschaft Kent 1616; gest. zu Oxford 1703) in der von ihm herausgegebenen Algebra (englische Ausgabe) bekannt.

davon wieder entfernt. *Lagrange*, welcher zuerst auf diesen Umstand aufmerksam machte *), hat sofort eine neue, in allen Fällen vollkommen sichere Näherungsmethode angegeben; nur Schade, dafs ihre Anwendung in den meisten Fällen etwas ermüdend und langwierig wird. Wir werden diese sonst so scharfsinnige Methode, welche die approximativen Werthe der Wurzeln durch Kettenbrüche darstellt, in dem folgenden Paragraphe ganz kurz entwickeln.

§. 65.

Liegt der numerische Werth einer Wurzel zwischen den beiden auf einander folgenden Zahlen a und $a+1$, so setze man in der gegebenen Gleichung $x = a + \frac{1}{y}$, wobei also nothwendig $\frac{1}{y} < 1$, daher $y > 1$ und positiv ist. Die transformirte Gleichung (§. 33.)

$$X + X_1 \frac{1}{y} + X_2 \frac{1}{y^2} + \ldots + X_{n-1} \frac{1}{y^{n-1}} + \frac{1}{y^n} = 0,$$

oder $Xy^n + X_1 y^{n-1} + X_2 y^{n-2} + \ldots + 1 = 0$ (wenn nämlich die Polynome X, $X_1 \ldots$ wieder so genommen werden, dafs man statt x, a setzt), die wir durch $Y = 0$ bezeichnen wollen, besitzt aber, da der Annahme zufolge, zwischen a und $a+1$ nur eine Wurzel liegt, eine aber auch nur eine positive Wurzel y, die gröfser als 1 ist; denn könnte es mehrere solcher Werthe für y geben, so würden auch gegen die Annahme für $x = a + \frac{1}{y}$ mehrere zwischen a und $a+1$ liegende Wurzeln folgen.

Liegt dieser Werth zwischen b und $b+1$, so setze man $y = b + \frac{1}{y'}$, wo wieder $y' > 1$ und positiv seyn mufs. Für diesen Werth verwandelt sich die letzte Gleichung $Y = 0$ in jene $Y' = 0$, welche aus demselben Grunde wieder eine, und nur eine Wurzel y' von der Beschaffenheit haben mufs, dafs diese positiv und > 1 ist.

*) *De la Résolution des Équations Numériques de tous les Degrés. Note V.* Die deutsche Uebersetzung desselben Werkes von Dr. *A. L. Crelle.* 5. Zus. S. 238.

Fällt diese zwischen c und $c+1$, so setzt man ferner in die letzte Gleichung $y' = c + \frac{1}{y''}$ und sucht, zwischen welche zwei auf einander folgende Zahlen d und $d+1$ die positive Wurzel, welche zugleich >1 seyn muſs, der transformirten Gleichung $Y'' = 0$ liegt; und so wird dieses Verfahren beliebig wiederholt und fortgesetzt.

Es ist dann offenbar

$$y' = c + \frac{1}{d+}, \quad y = b + \frac{1}{c+}\frac{1}{d+}$$

$$\text{also} \quad x = a + \frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{d+}$$

und man ist, zufolge der bekannten Eigenschaften der Kettenbrüche, ganz sicher, die Wurzel x um so genauer zu erhalten, je mehr Glieder der Kette man entwickelt, je weiter also das angeführte Verfahren fortgesetzt wird.

Beispiel.

Um diese Methode auf unser voriges Beispiel, und zwar wieder auf die Berechnung der zwischen 2 und 3 liegenden positiven Wurzel anzuwenden, setze man $x = 2 + \frac{1}{y}$; so geht die gegebene Gleichung $x^3 - 5x - 3 = 0$ in folgende über:

$$1) \quad 5y^3 - 7y^2 - 6y - 1 = 0 \; (Y = 0).$$

Das Polynom derselben wird für $y = 0$: -1, für $y = 1$: -9, für $y = 2$: -1, und für $y = 3$: $+53$; es liegt daher die (einzige) positive Wurzel dieser Gleichung zwischen 2 und 3. Man setze also $y = 2 + \frac{1}{y'}$, wodurch die Gleichung 1) übergeht in

$$2) \quad y'^3 - 26y'^2 - 23y' - 5 = 0 \; (Y' = 0).$$

Die positive Wurzel dieser Gleichung liegt, wie man bald findet, zwischen 26 und 27. Setzt man daher wieder $y' = 26 + \frac{1}{y''}$, so entsteht die Gleichung

$$3) \quad 603y''^3 - 653y''^2 - 52y'' - 1 = 0 \; (Y'' = 0),$$

in welcher die **einzige positive reelle** Wurzel zwischen 1 und 2 liegt. Wird also ferner $y'' = 1 + \frac{1}{y'''}$ gesetzt, so verwandelt sich diese letzte Gleichung 3) in jene

4) $103y'''^3 - 451y'''^2 - 1156y''' - 603 = 0 \; (Y''' = 0)$,

in welcher die positive Wurzel zwischen 6 und 7 liegt, so, daſs diese Gleichung für die Substitution von $y''' = 6 + \frac{1}{y^{IV}}$ wieder übergeht in

5) $1527y^{IV3} - 4556y^{IV2} - 1403y^{IV} - 103 = 0 \; (Y^{IV} = 0)$ *).

Für diese Gleichung liegt die positive Wurzel zwischen 3 und 4, so, daſs man $y^{IV} = 3 + \frac{1}{y^{V}}$ setzen muſs; da wir aber hier stehen bleiben wollen, so haben wir für den approximativen Werth von x:

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{26 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}}}$$

Sucht man zu diesem Kettenbruch die Näherungsbrüche, so erhält man für x der Reihe nach die Näherungswerthe $\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{132}{53}, \frac{137}{55}, \frac{954}{383}, \frac{2999}{1204}$; und dieser letzte, welcher gegen den wahren Werth etwas zu groſs ist, in einen Decimalbruch aufgelöst, gibt $x = 2{\cdot}49086378$. Dabei ist die Annäherung an den wahren Werth so, daſs der Fehler (gemäſs der Theorie der Kettenbrüche) kleiner als

$$\frac{1}{(1204)^2} = {\cdot}0000007$$

ist; man ist also sicher, daſs wenigstens die ersten sechs Decimalziffern **genau** sind (was auch vollkommen mit dem im vorigen Paragraphe gefundenen Werthe übereinstimmt).

Auf die nämliche Art findet man nach beiden angeführten Näherungsmethoden, wo man zur gröſsern Bequemlich-

*) Man kann bemerken, daſs es nun auch *a posteriori* aus der Form dieser transformirten Gleichungen 1), 2), 3) . . ., in welchen durchgehends nur **ein einziger** Zeichenwechsel vorkommt, erhellet, daſs jede derselben **eine**, und **nur eine positive** Wurzel besitzt. (M. s auch §. 24. und 32.)

keit noch die Gleichung in jene mit entgegengesetzten Wurzeln umwandeln und dafür abermals die positiven Wurzeln suchen kann, die beiden negativen Wurzeln, und zwar bis auf die siebente Decimalstelle genau:

$$x = -1{\cdot}8342431 \text{ und } x = -{\cdot}6566204\text{ *)}.$$

Für die Gleichung $x^3 - 2x - 5 = 0$, auf welche *Newton* selbst seine Methode beispielsweise angewendet hat, findet man ebenfalls nach beiden Methoden, die einzige reelle Wurzel: $x = 2{\cdot}09455147$.

Anmerk. 1. Die Näherungsmethode des *Lagrange* gibt auch die rationalen Wurzeln einer Gleichung; in diesem Falle kommt man nämlich zuletzt auf eine Gleichung $y^{(n)\prime} = 0$, deren positive Wurzel eine ganze Zahl ist, so, daſs der die Wurzel x ausdrückende Kettenbruch begrenzt oder endlich wird.

Zu dieser Methode wird man auch seine Zuflucht nehmen, wenn einige Coefficienten der gegebenen Gleichung irrational seyn sollten.

Endlich wollen wir noch bemerken, daſs man beide Näherungsmethoden, die *Newton*'sche und *Lagrange*'sche, mit Vortheil mit einander verbinden kann; hat man nämlich nach der letztern die Wurzel schon bis auf $\frac{1}{10}$, oder besser auf $\frac{1}{100}$ genau gefunden, so kann man die fernere Annäherung (im Allgemeinen) nach der erstern schneller bewerkstelligen.

Anmerk. 2. Ein in vielen Fällen sehr brauchbares und bequemes Verfahren, die Wurzeln von nicht bloſs algebraischen, sondern selbst transcendenten Gleichungen approximativ und zwar mit beliebiger Genauigkeit zu berech-

*) Man findet nämlich dem numerischen Werthe nach:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{30 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{30 +}}}}}}}$$

und

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 +}}}}}}}}}}$$

nen, liefert die sogenannte *regula falsi;* wir wollen dasselbe noch in Kürze entwickeln.

Man nehme an, $x = w$ sey die eben zu berechnende Wurzel der Gleichung

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots = 0 \ldots (1$$

und es gehe durch die Substitutionen von $x = s_1$ und s_2, y beziehungsweise in F_1 und F_2 über; so ist klar, dafs sich s_1 oder s_2 dem wahren Werthe w um so mehr nähern wird, je weniger F_1 oder F_2 von Null verschieden ist, und dafs $s_1 - w = d_1$, $s_2 - w = d_2$ die Fehler der Substitutionen, und F_1, F_2 die Fehler der Resultate bezeichnen.

Sind nun s_1 und s_2 schon nahe gleich w und von diesem Werthe z. B. um weniger als $1/_{10}$ verschieden, so, dafs sie die gegebene Gleichung (1 nahe auf Null bringen; so werden d_1 und d_2 so kleine Gröfsen seyn, dafs man bei einer blofsen Näherungsrechnung, die zweiten und höhern Potenzen derselben vernachlässigen kann. Diefs vorausgesetzt, hat man:

$$F_1 = As_1^{\alpha} + Bs_1^{\beta} + Cs_1^{\gamma} + \ldots$$
$$F_2 = As_2^{\alpha} + Bs_2^{\beta} + Cs_2^{\gamma} + \ldots$$

also auch, wenn man von jeder dieser Gleichungen jene $0 = Aw^{\alpha} + Bw^{\beta} + Cw^{\gamma} + \ldots$ subtrahirt:

$$F_1 = A(s_1^{\alpha} - w^{\alpha}) + B(s_1^{\beta} - w^{\beta}) + C(s_1^{\gamma} - w^{\gamma}) + \ldots,$$
$$F_2 = A(s_2^{\alpha} - w^{\alpha}) + B(s_2^{\beta} - w^{\beta}) + C(s_2^{\gamma} - w^{\gamma}) + \ldots$$

oder, wegen $s_1 = w + d_1$, also $s_1^{\alpha} = (w + d_1)^{\alpha} = w^{\alpha} + \alpha w^{\alpha - 1} d_1$, $s_1^{\beta} = w^{\beta} + \beta w^{\beta - 1} d_1$, $s_1^{\gamma} = w^{\gamma} + \gamma w^{\gamma - 1} d_1$, ... und $s_2^{\alpha} = (w + d_2)^{\alpha} = w^{\alpha} + \alpha w^{\alpha - 1} d_2$, u. s. w. (nämlich mit Auslassung der folgenden Glieder), auch:

$$F_1 = d_1(A\alpha w^{\alpha - 1} + B\beta w^{\beta - 1} + C\gamma w^{\gamma - 1} + \ldots),$$
$$F_2 = d_2(A\alpha w^{\alpha - 1} + B\beta w^{\beta - 1} + C\gamma w^{\gamma - 1} + \ldots),$$

$$\text{folglich } \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_1}{d_2},$$

d. h. es verhalten sich unter den angenommenen Bedingungen, die Fehler der Resultate genau so, wie die Fehler der Substitutionen; und dieser Satz bildet eben die *regula falsi.*

Setzt man in der letzten Gleichung für d_1 und d_2 die Werthe $s_1 - w$ und $s_2 - w$, und bestimmt daraus w; so erhält

man für einen mehr genäherten Werth von w:

$$w = \frac{s_1 F_2 - s_2 F_1}{F_2 - F_1} = s_1 - \frac{F_1 (s_2 - s_1)}{F_2 - F_1} = s_2 - \frac{F_2 (s_1 - s_2)}{F_1 - F_2} \ldots (2$$

Ist nun s_2 genauer als s_1, so nimmt man s_2 als erste, und den zuletzt nach dieser Formel berechneten Werth von w als zweite Substitution (s_2), bemerkt die entsprechenden Fehler F_1, F_2, und berechnet mit diesen Elementen nach derselben Formel neuerdings w, welcher Werth wieder genauer seyn wird, als der vorige; und so fährt man fort, bis w hinreichend genau gefunden ist. Ein paar Beispiele werden das Gesagte erläutern.

Beispiel 1. Nehmen wir wieder die obige Gleichung $x^3 - 5x - 3 = 0$ zur Auflösung, und setzen, da man schon nach einigen wenigen Versuchen findet, daſs eine Wurzel derselben zwischen 2·4 und 2·5 liegt,

$$x = s_1 = 2{\cdot}4 \quad \text{und} \quad x = s_2 = 2{\cdot}5;$$

so erhält man die Fehler $F_1 = -$ ~~2·824~~ und $F_2 = {\cdot}125$, folglich nach der obigen Eormel (2 für w den genäherten Werth: 2·49[illegible]0.

Nimmt man jetzt $s_1 = 2{\cdot}5$ und $s_2 = 2{\cdot}49$, so erhält man als correspondirende Fehler $F_1 = {\cdot}125$ und $F_2 = -{\cdot}01175$; folglich wieder nach der obigen Formel (2: $w = 2{\cdot}490859$.

Für $s_1 = 2{\cdot}49$ und $s_2 = 2{\cdot}490859$ erhält man ferners

$$F_1 = -{\cdot}01175, \quad F_2 = -{\cdot}00006287,$$

und damit wieder

$$w = 2{\cdot}4908634;$$

ein Resultat, welches noch in den sechs ersten Decimalstellen richtig ist, und durch dasselbe wiederholte Verfahren leicht noch genauer gefunden werden kann.

Auf dieselbe Weise lieſsen sich auch, wenn es nöthig wäre, die beiden andern reellen Wurzeln der obigen Gleichung berechnen.

Beispiel 2. Um aus der Gleichung $x^x = 645$ oder aus $x \log. x = \log. 645 = 2{\cdot}8095597$ den Werth von x zu finden, setze man, da zufolge einiger einfachen Versuche, dieser Werth als zwischen 4 und 4·5 liegend gefunden wird, als erste Substitution $s_1 = 4$, und als zweite $s_2 = 4{\cdot}3$; so erhält man $F_1 = -{\cdot}401$ und $F_2 = -{\cdot}0856$, mithin nach der obigen Gleichung (2: $x = 4{\cdot}381$.

Man findet ferner für $s_1 = 4{\cdot}3$ und $s_2 = 4{\cdot}381$ beziehungsweise $F_1 = -{\cdot}0856$, $F_2 = {\cdot}001173$, und damit wieder nach (2: $x = 4{\cdot}379905$.

Nimmt man endlich noch $s_1 = 4{\cdot}381$ und $s_2 = 4{\cdot}379905$; so erhält man $F_1 = {\cdot}001173$, $F_2 = -{\cdot}00000531$, und damit wieder $x = 4{\cdot}37990995$; welcher Werth noch in der siebenten Decimalstelle richtig ist *).

§. 66.

B) **Wenn man durch die auf einander folgenden Substitutionen von Zahlen, welche um die beständige Differenz 1 zu- oder abnehmen, nicht so viele Wurzeln entdecken kann, als der Exponent n Einheiten hat.**

In diesem Falle darf man nicht immer schliefsen, dafs die noch fehlenden Wurzeln, wenn etwa ihre Anzahl gerade wäre, sämmtlich imaginär sind; denn es können (§. 23.) nicht nur zwischen zwei Zahlen, welche Resultate mit entgegengesetzten Zeichen hervorbringen, statt einer Wurzel, die man vermuthet, 3, 5..., sondern auch noch zwischen zwei solchen Zahlen, bei deren Substitution kein Zeichenwechsel eintritt, eine gerade Anzahl von Wurzeln liegen, die sich also ebenfalls der Beobachtung entziehen.

Hätte z. B. eine Gleichung die Wurzeln $\sqrt{2} = 1{\cdot}414...$, $\sqrt{3} = 1{\cdot}733...$, $\sqrt{5} = 2{\cdot}236...$, $\sqrt{6} = 2{\cdot}449...$ und $\sqrt{8} = 2{\cdot}828...$, von denen die beiden erstern zwischen 1 und 2, und die drei letztern zwischen 2 und 3 liegen; so würden offenbar, wenn man für x successive die Glieder der Reihe 0, 1, 2, 3, 4... substituirte: für $x = 1$ und $x = 2$ Resultate von einerlei, ferner für $x = 2$ und $x = 3$ Re-

*) Unter den verschiedenen Näherungsmethoden, welche aufserdem noch bestehen, verdienen die von *Budan* [*Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques d'un degré quelconque. Paris* 1807 (1. Ausgabe)] und von *Legendre* (*Supplément à l'Essai sur la Théorie des Nombres*, 2. *Edit.*, 1816, S. 28 u. f.) angegebenen eine besondere Erwähnung. Die erstere findet man auch in *Crelle's* Lehrb. der Arithm. und Algebra, Berlin 1825, recht gut erläutert.

Eine gute Zusammenstellung und Kritik über die vorzüglichsten Näherungsmethoden dieser Art, findet man endlich in einer von Prof *Egen* herausgegebenen Abhandlung: »Über die Methoden, Zahlengleichungen durch Näherung aufzulösen.« Elberfeld 1829.

sultate mit verschiedenen Zeichen entstehen, und man würde sofort statt fünf Wurzeln nur eine einzige entdecken. Dagegen würden sich auch die auf diese Weise übersprungenen Wurzeln verrathen, wenn man für die beständige Differenz der Reihe, deren Glieder man nach und nach für x substituirt, statt 1 eine Zahl δ nähme, welche kleiner ist, als die kleinste Differenz, welche zwischen je zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung Statt findet. Eine solche Zahl wäre für das gewählte Beispiel offenbar ·2; und in der That, setzt man für x nach und nach die Glieder der Reihe 1, 1·2, 1·4..., 2, 2·2, 2·4, 2·6..., 3; so erhält man Resultate mit entgegengesetzten Zeichen, für die Substitutionen von $x = 1{\cdot}4$ und $1{\cdot}6$, $x = 1{\cdot}6$ und $1{\cdot}8$, $x = 2{\cdot}2$ und $2{\cdot}4$, $x = 2{\cdot}4$ und $2{\cdot}6$, endlich $x = 2{\cdot}8$ und 3, so, daſs man jetzt die sämmtlichen fünf Wurzeln entdeckt.

Die Schwierigkeit liegt nun aber darin, eine solche Zahl δ, *a priori*, bevor man nämlich die Wurzeln kennt, zu finden. *Lagrange* war wieder der erste, welcher eine solche finden lehrte; indeſs muſs man auch hier bedauern, daſs sein Verfahren, welches die mühselige Berechnung der Differenzengleichung fordert, bei Gleichungen mit grossen Exponenten fast ganz unausführbar wird. Der Vorgang, um nach *Lagrange* eine solche Zahl δ zu finden, ist kurz folgender:

Man sucht (§. 38. und 43.) zur gegebenen oder aufzulösenden Gleichung $X = 0$ die Gleichung $Z = 0$ der quadrirten Differenzen, und in dieser, da die Quadrate der Differenzen der reellen Wurzeln von der Gleichung $X = 0$ nur positiv seyn können, die innere oder untere Grenze g der positiven Wurzeln (§. 59., 5); so ist $\delta = \sqrt{g}$ eine Zahl, welche offenbar kleiner, als die kleinste Differenz je zweier Wurzeln der Gleichung $X = 0$ ist. Ist $\sqrt{g}$, wie gewöhnlich, irrational, so behält man zur gröſsern Einfachheit, nur die nächst kleinere ganze Zahl h, oder wenn diese Null wäre, die erste Decimalziffer bei, und nimmt $\delta = h$, wodurch die verlangte Eigenschaft noch um so gewisser herbeigeführt wird. Sucht man ferner für die auf-

zulösende Gleichung $X=0$ die obern und untern Grenzen (wenn man für die letztern nicht die Nulle gelten lassen will) G, G', und g, g', und substituirt in X für x nach und nach die Glieder der Reihe g, $g+h$, $g+2h$, $g+3h \ldots G$ und $-g'$, $-(g'+h)$, $-(g'+2h) \ldots$, $-G'$; so mufs man, bei Berücksichtigung der in den Resultaten entstehenden Zeichen, unfehlbar die sämmtlichen reellen Wurzeln der Gleichung $X=0$ entdecken.

Wir wollen diesen Vorgang im folgenden Paragraphe durch ein paar Beispiele erläutern.

§. 67.

Beispiel 1.

Es sey die Gleichung $8x^3 - 8x + 1 = 0$ zur Auflösung gegeben.

Wir wollen diese Gleichung (um nämlich die in Rede stehende Methode mit Grund anwenden zu können) auflösen, ohne früher den Coefficienten des ersten Gliedes, und dann die entstehenden Brüche wegzuschaffen. Man findet sogleich für die obern Grenzen der Wurzeln (§. 59., 3 und 4) $G=1$ und $G'=2$; man kann also ohne Weiters 0 für die untern Grenzen nehmen. Nun wird

für $x = -2$ das Polynom $X = -47$,
» $x = -1$ » » $X = +1$,
» $x = \mp 0$ » » $X = +1$,
» $x = +1$ » » $X = +1$,

so, dafs man auf diese Weise nur eine einzige, zwischen -1 und -2 liegende, reelle Wurzel entdeckt.

Sucht man also nach §. 38. oder 43. für die gegebene Gleichung jene der quadrirten Differenzen, so findet man dafür

$$64z^3 - 384z^2 + 576z - 229 = 0 \ (Z=0),$$

welche, wie man sieht, lauter positive Wurzeln besitzt. Um nun in dieser Gleichung die untere Grenze g zu finden, setze man (§. 59., 5) $z = \frac{1}{v}$, so verwandelt sich diese letzte Gleichung, wenn man sogleich mit dem gemeinschaftlichen

Nenner durchaus multiplicirt, in jene:

$$229 v^3 - 576 v^2 + 384 v - 64 = 0,$$

und da hier 2 die obere Grenze G der Wurzeln ist, so hat man $g = \frac{1}{2}$ für die gesuchte untere Grenze der vorigen Gleichung $Z = 0$. Setzt man daher $\delta = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \cdot 707 \ldots$ oder nur $\delta = \cdot 7\ (= h)$, so muſs man bei den auf einander folgenden Substitutionen der Zahlenreihe

$$-2,\ -1\cdot 3,\ -\cdot 6,\ +\cdot 1,\ +\cdot 8,\ +1,$$

oder wenn man von 0 anfangen will, jener 0, ·7, 1 und —·7, —1·4, —2, unfehlbar alle reelle Wurzeln der gegebenen Gleichung entdecken. Man findet wirklich hinsichtlich der Zeichen von X Folgendes: für $x = 0$: $+$, für $x = \cdot 7$: $-$, für $x = 1$: $+$; ferner für $x = -\cdot 7$: $+$, für $x = -1\cdot 4$: $+$, und für $x = -2$: $-$; es liegt also eine positive Wurzel zwischen 0 und ·7, eine zweite zwischen ·7 und 1, und endlich die dritte negative Wurzel zwischen —1·4 und —2. Und in der That, man findet nach einer der in den §§. 47., 64., 65. angegebenen Methoden für die gegebene Gleichung die Wurzeln:

$$x_1 = 0\cdot 1270508,\quad x_2 = 0\cdot 9304029,\quad x_3 = -1\cdot 0574538.$$

Anmerk. Da h eine Zahl bezeichnet, welche kleiner als die kleinste Differenz je zweier Wurzeln der Gleichung $X = 0$ ist; so wird, wenn man diese Gleichung in eine andere $X' = 0$ transformirt, deren Wurzeln m Mal so groſs sind, mh eine Zahl seyn, welche kleiner als die kleinste Differenz je zweier Wurzeln der Gleichung $X' = 0$ ist. Ist daher h ein Bruch, so kann man durch eine passende Annahme von m die Brüche in der Substitution vermeiden. So war in diesem Beispiele $h = \frac{7}{10}$; nimmt man also $m = 2$, so wird $mh = 1\cdot 4$. Verwandelt man daher die gegebene Gleichung in eine andere, deren Wurzeln doppelt so groſs sind, wofür man (§. 35.) $x'^3 - 4x' + 1 = 0$ findet (und auf welche man auch kommt, wenn die gegebene Gleichung nach der Vorschrift geordnet wird), so kann die kleinste Differenz je zweier Wurzeln dieser letzten Gleichung nicht unter 1·4 seyn; um so weniger wird man daher endlich eine reelle Wurzel derselben überspringen können, wenn man $\delta = 1$, d. i. die Reihe der natürlichen Zahlen 0, 1, 2 ... und —1, —2, ... für die auf einander folgenden Sub-

stitutionen nimmt. Man findet in der That, daſs eine Wurzel dieser letzten Gleichung zwischen o und 1, eine zweite zwischen 1 und 2, und endlich die dritte zwischen —2 und —3 liegt, und findet ferner, wenn man diese Wurzeln dann näherungsweise berechnet, $x'_1 = 0{\cdot}25410168$, $x'_2 = 1{\cdot}86080585$ und $x'_3 = -2{\cdot}11490754$, deren Hälften, wegen $x = \frac{x'}{2}$, sofort die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind *).

B e i s p i e l 2.

Es sey die Gleichung aufzulösen: $x^3 - 6x - 7 = 0$.

Die obern Grenzen der Wurzeln sind $+3$ und -2. Setzt man daher für x nach und nach die Werthe -2, -1, 0, 1, 2, 3, so erhält man der Reihe nach für X die Resultate -3, -2, -7, -12, -11, $+2$; es verräth sich also eine e i n z i g e reelle Wurzel zwischen 2 und 3.

Die Gleichung der quadrirten Differenzen ist (§. 37.)

$$z^3 - 36z^2 + 324z + 459 = 0,$$

und dafür ist die untere Grenze g der (positiven) Wurzeln $= 9$; es kann also keine der aus den Wurzeln der gegebenen Gleichung gebildeten Differenzen kleiner als $\sqrt{9} = 3$ seyn, und man ist daher vollkommen sicher, daſs bei der vorigen Substitution der Zahlen, die um die noch kleinere Differenz $\delta = 1$ auf einander folgen, a l l e r e e l l e Wurzeln entdeckt worden sind. Man findet in der That die r e e l l e Wurzel $x = 2{\cdot}9005718$, und dann noch zwei i m a g i n ä r e Wurzeln: $-1{\cdot}4502859 \pm 0{\cdot}5567652\sqrt{-1}$.

A n m e r k. 1. Es ist leicht zu sehen, daſs man auch nach dieser vorgetragenen Methode nicht a l l e reelle Wurzeln einer gegebenen Gleichung entdecken kann, wenn diese g l e i c h e

*) Man kann also, wenn sich in der Gleichung $X = 0$ durch die Substitutionen der natürlichen Zahlen $0, 1, 2 \ldots G$ und $-1, -2 \ldots -G'$ nicht alle reellen Wurzeln verrathen, auch auf Gerathewohl die Wurzeln m Mal so groſs machen, und in der transformirten Gleichung $X' = 0$ neuerdings die Zahlen $0, 1, 2 \ldots mG$ und $-1, -2 \ldots -mG'$ für x' probiren. Oft entdeckt man in dieser Gleichung die sämmtlichen Wurzeln, und man darf, nachdem diese gefunden sind, nur jede durch m dividiren, um jene der ursprünglichen Gleichung zu haben.

Wurzeln besitzt; was die betreffende Gleichung der quadrirten Differenzen dadurch zu erkennen gibt, dafs sie auch Wurzeln hat, die gleich Null sind. Man kann aber die gleichen Wurzeln nach §. 39. schon früher entdecken und wegschaffen.

Anmerk. 2. Ein weit einfacheres Verfahren, die sämmtlichen reellen Wurzeln einer Gleichung zu entdecken, ist in der neuesten Zeit von Herrn *Ch. Sturm* angegeben worden *). Dieses besteht ganz kurz in Folgendem:

Zu dem Polynome X der gegebenen Gleichung sucht man (§. 21.) das erste abgeleitete Polynom X_1, und dividirt X durch X_1, bis man auf einen Rest kommt, der in Bezug auf x von niedrigerer Ordnung als X_1 ist; in diesem ändert man durchaus die Zeichen und multiplicirt (wenn Brüche vorkommen) mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner, um keine Brüche zu haben. Wird dieser so geänderte Rest mit X_2 bezeichnet, so dividirt man wieder X_1 durch X_2, und behandelt den entstehenden Rest genau so wie den vorigen, wodurch man das Polynom X_3 erhält. Auf diese Weise fortgefahren, erhält man zuletzt, wenn die Gleichung keine gleichen Wurzeln hat, einen von x unabhängigen Rest, welcher, nachdem das Zeichen geändert und der etwa vorhandene Nenner weggelassen worden ist, X_m heifsen mag. Schreibt man nun die für die Substitution von $x = a$ in den Resultaten der Polynome $X, X_1, X_2 \ldots X_m$ eintretenden Zeichen neben einander hin und zählt die dadurch entstehenden Zeichenwechsel, beobachtet das nämliche für die Substitution von $x = b$; so gibt der Unterschied aus diesen beiden Zahlen (der Zeichenwechsel) die Anzahl der zwischen a und b liegenden reellen Wurzeln. Zugleich zeigt, wenn man aus jedem der Polynome $X, X_1 \ldots X_m$ das Zeichen des ersten Gliedes, nämlich jenes der höchsten Potenz von x nimmt, und diese neben einander hinschreibt, jeder in dieser Folge Statt findende Zeichenwechsel, ein Paar imaginäre Wurzeln an.

So ist z. B. für die vorige Gleichung $x^3 - 6x - 7 = 0$: $X = x^3 - 6x - 7$, $X_1 = 3x^2 - 6$, $X_2 = 4x + 7$, $X_3 = -51$, und man hat für $x = 0$ die Zeichenreihe: $- - + -$, also zwei Wechsel; für $x = 2$: $- + + -$, ebenfalls zwei; für $x = 3$: $+ + + -$, nur einen, und dasselbe für jede noch so grofse Zahl für x. Es liegt also eine einzige positive Wurzel zwischen 2 und 3. Da die ersten Glieder der

*) *Bulletin des sciences Mathématiques, Physiques et Chimiques* (Juniheft 1829).

vorigen Polynome die Zeichenreihe bilden: $+++-$, so zeigt der eine Zeichenwechsel ein paar imaginäre Wurzeln an *).

Wir wollen endlich im nächsten Paragraphe unsere eigene Methode, um die sämmtlichen reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung zu entdecken, welche in der Anwendung, der Regel nach, noch einfacher und bequemer ist, vortragen.

§. 68.

Leitet man aus dem Polynom X der gegebenen Gleichung $X = 0$ das 1ste, 2te, 3te ... nte Polynom X_1, X_2, $X_3 \ldots X_{n-1}$, X_n nach §. 21. (Anmerk.) ab, was ganz einfach und fast mechanisch geschehen kann, beobachtet die für die Substitution $x = a$ in diesen Polynomen X, $X_1 \ldots$ entstehenden Resultate hinsichtlich ihrer Zeichen, die man in eine Reihe neben einander hinschreibt, um die Anzahl der entstehenden Zeichenwechsel zu zählen, und befolgt endlich dasselbe auch für die Substitution von $x = b$; so gibt der Unterschied der Zahlen, welche in beiden Fällen die vorhandenen Zeichenwechsel ausdrücken, die zwischen a und b liegenden reellen Wurzeln auf folgende Art:

Ist dieser Unterschied gleich Eins, so liegt zwischen a und b eine und nur eine reelle Wurzel. Beträgt diese Differenz zwei Einheiten, so setze man für x eine zwischen a und b fallende Zahl c, und beobachte wieder die Zahl der entstehenden Zeichenwechsel; ist diese um 1 grösser als für $x = b$, und also um 1 kleiner als für $x = a$, oder umgekehrt; so liegt eine reelle Wurzel zwischen a und c, und eine zweite zwischen c und b. Gibt aber diese Substitution $x = c$ mit $x = b$ oder $x = a$ die nämliche Anzahl von Zeichenwechsel; so können zwei reelle Wurzeln zwischen a und c, oder c und b eingeschlossen seyn, und man setzt daher für x im ersten Falle eine zwischen a und c, im zweiten eine zwischen c und b fallende Zahl, und beobachtet

*) Über ein von *Louis Olivier* angegebenes »Kennzeichen der Grenzen der Zahl der reellen Wurzeln einer beliebigen algebraischen Gleichung« kann man nachsehen: *Crelle's* Journal für die reine und angewandte Mathematik. Berlin 1826. 1. Bd., S. 223.

abermals die für diese Substitution entstehende Zahl der Zeichenwechsel. Sind nun die beiden zu vermuthenden Wurzeln reell und ungleich, so erhält man sehr bald auf die angeführte Weise zwei Zahlen, welche für x gesetzt, solche Mengen von Zeichenwechsel hervorbringen, daſs ihr Unterschied gleich Eins wird; und es liegt sodann zwischen diesen beiden Zahlen die eine dieser beiden Wurzeln, während man zugleich auch die nächsten beiden Zahlen hat, welche die andere Wurzel einschlieſsen. Sind dagegen diese beiden Wurzeln reell und gleich, oder imaginär, so kann man durch noch so viele Zwischensubstitutionen niemals eine Zahl finden, für welche die Anzahl der genannten Zeichenwechsel, gegen jene für $x=a$ oder $x=b$ um eine Einheit verschieden wäre; man erkennt diesen Umstand, ohne erst die Zeichen für die abgeleiteten Polynome X_1, X_2 ... zu suchen, immer leicht daraus, daſs das Polynom X, welches in diesem Falle für $x=a$ und $x=b$ nothwendig einerlei Zeichen haben muſs (§. 23., Zus. 2.), für keinen zwischen a und b liegenden Werth sein Zeichen ändern kann, was aber für eine zwischen diesen beiden reellen Wurzeln liegende Zahl geschehen müſste (§. 23.). Hat man sich also nach §. 39. von dem Nichtvorhandenseyn gleicher Wurzeln überzeugt, so deutet dann dieser letzt erwähnte Umstand immer auf ein paar imaginäre Wurzeln.

Beträgt der erwähnte Unterschied in den für $x=a$ und $x=b$ entstehenden Zeichenwechseln drei Einheiten, so muſs wenigstens eine reelle Wurzel zwischen a und b liegen, und man wird diese auf die vorhin angegebene Weise bald zwischen zwei, nur um eine Einheit von einander verschiedene, Zahlen einschlieſsen können. Hinsichtlich der beiden übrigen gilt das eben Erwähnte.

Und so wird man überhaupt für jede gegebene Gleichung, durch geordnete Substitutionen, sehr bald die sämmtlichen reellen Wurzeln entdecken und jede derselben zwischen zwei Zahlen einschlieſsen können, welche höchstens um eine Einheit von einander abstehen. Ein paar Beispiele

werden dieses Verfahren am schnellsten und besten erläutern.

Beispiel 1.

Für die Gleichung $x^3 - 7x + 7 = 0$ entdeckt man auf dem gewöhnlichen Wege, indem man nämlich für x die Zahlen $0, 1, 2 \ldots, -1, -2 \ldots$ setzt, bloſs eine einzige reelle Wurzel zwischen -3 und -4.

Nach unserer Methode ist

$$X = x^3 - 7x + 7, \quad X_1 = 3x^2 - 7, \quad X_2 = 3x, \quad X_3 = 1;$$

daraus erhält man für $x = 0$ die Zeichenreihe: $+ - \pm +$ (also zwei Wechsel), für $x = 5$: $+ + + +$ (0 Wechsel, was auch für jede noch so groſse Zahl, wie man leicht sieht, Statt findet); es können daher zwischen 0 und 5 (da die Differenz $2 - 0 = 2$ ist) zwei reelle Wurzeln liegen. Setzt man daher $x = 2$, so entsteht die Reihe: $+ + + +$ (0 Wechsel), diese müſsten daher zwischen 0 und 2 liegen. Für $x = 1$ hat man $+ - + +$ (zwei Wechsel); die beiden Wurzeln liegen also, wenn sie reell sind, zwischen 1 und 2. $x = 1 \cdot 5$ gibt: $- - + +$ (einen Wechsel); es liegt also eine dieser beiden Wurzeln zwischen 1 und $1 \cdot 5$, und die andere zwischen $1 \cdot 5$ und 2.

Um die dritte Wurzel, welche sonach (da das zweite Glied fehlt) nur negativ seyn kann, zu entdecken, hat man für $x = -5$: $- + - +$ (3); diese Wurzel liegt daher zwischen 0 und -5. Für $x = -3$ entsteht: $+ + - +$ (2); die Wurzel liegt demnach zwischen -5 und -3. $x = -4$ gibt: $- + - +$ (3); es liegt also endlich die dritte Wurzel zwischen -3 und -4. Und in der That, die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$x_1 = 1 \cdot 35689, \quad x_2 = 1 \cdot 69202 \text{ und } x_3 = -3 \cdot 04892.$$

Beispiel 2.

Für die obige Gleichung $x^3 - 6x - 7 = 0$ (§. 67., Beisp. 2.) hat man

$$X = x^3 - 6x - 7, \quad X_1 = 3x^2 - 6, \quad X_2 = 3x, \quad X_3 = 1.$$

Ferner ist für $x=0$: $--++$ (1 Wechsel). Für $x=3$: $++++$ (0 Wechsel), dasselbe erfolgt für jede gröfsere Zahl als 3; es gibt also hier nur eine positive reelle Wurzel, welche zwischen 0 und 3 liegt; um diese näher einzuschliefsen, hat man ferner für $x=1$: $--++$ (1); zwischen 1 und 3. Für $x=2$: $-+++$ (1); diese liegt also zwischen 2 und 3.

In Betreff der beiden übrigen Wurzeln, welche, wenn sie reell sind, nur negativ seyn können, setze man zuerst $x=-2$, so entsteht die Zeichenreihe $-+-+$ (drei Wechsel); es müfsten diese also zwischen 0 und -2 liegen. $x=-1$ gibt $---+$ (1); die beiden Wurzeln können daher nur zwischen -1 und -2 liegen. Da aber, wie man leicht sieht, das Polynom X für keinen zwischen -1 und -2 liegenden Werth positiv werden, oder das Zeichen ändern kann; so sind diese beiden Wurzeln entweder reell und einander gleich, oder imaginär. Und da ferner, wie man sich leicht überzeugt, die gegebene Gleichung keine gleichen Wurzeln besitzt; so sind diese beiden Wurzeln in der That, wie wir auch oben schon gefunden haben, imaginär.

Beispiel 3.

Es sey endlich noch, um diese Methode auch auf eine zusammengesetztere Gleichung (in welcher selbst noch die rationalen Wurzeln enthalten seyn können) anzuwenden, die Gleichung gegeben:

$$X = x^5 - 12x^4 + 52x^3 - 96x^2 + 59x + 20 = 0.$$

Dafür ist

$$X_1 = 5x^4 - 48x^3 + 156x^2 - 192x + 59,$$
$$X_2 = 10x^3 - 72x^2 + 156x - 96,$$
$$X_3 = 10x^2 - 48x + 52,$$
$$X_4 = 5x - 12 \text{ und } X_5 = 1.$$

Es folgt also für $x=0$: $++-+-+$ (4); $x=10$: $++++++$ (0, so wie für jede gröfsere Zahl); $x=5$: $++++++$ (0); $x=3$: $+---++$ (2); es können

daher sowohl zwischen o und 3, wie auch zwischen 3 und 5 zwei reelle Wurzeln liegen. Nun ist für $x = 4$, $X = 0$, folglich 4 selbst eine Wurzel, und es muſs daher zwischen 3 und 5 noch eine reelle Wurzel liegen. Um diese enger einzuschlieſsen, hat man für $x = 4{\cdot}1$: $- - + + + +$ (1); diese liegt daher zwischen 4·1 und 5.

Um ferner die beiden Wurzeln, welche zwischen o und 3 liegen können, näher zu bestimmen, folgt für $x = 2$: $+ - + - - +$ (4); diese müssen also, so ferne sie reell sind, zwischen 2 und 3 liegen. Es wird aber für $x = 2$, $X = +10$, für $x = 2{\cdot}5$, $X = +8{\cdot}9$, und für $x = 3$, $X = +8$; folglich geht hieraus unzweideutig hervor, daſs es keine zwischen 2 und 3 liegende Zahl geben kann, welche das Zeichen von X ändert oder dieses Polynom negativ macht; es wird also auch für jede solche Substitution von x, die zwischen 2 und 3 fällt, die Anzahl der Zeichenwechsel entweder 2 oder 4, mithin die Differenz derselben gleich 2 bleiben. Dieser Umstand beweist, weil nämlich die gegebene Gleichung keine gleichen Wurzeln hat, daſs diese beiden Wurzeln imaginär sind.

Um endlich noch die fünfte Wurzel zu entdecken, die nur negativ seyn kann, hat man für $x = -1$: $- + - + - +$ (5); es liegt diese also zwischen o und -1 *).

Es sind in der That die Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 4{\cdot}236068, \quad x_3 = -0{\cdot}236068,$$
$$x_4 = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{und} \quad x_5 = 2 - \sqrt{-1}.$$

Die Vorzüge, welche diese Methode in Hinsicht auf ihre Einfachheit vor den oben angeführten hat, treten in ein um so helleres Licht, je gröſser der Ordnungsexponent und die Coefficienten der gegebenen Gleichung sind.

*) Um die Substitutionen mit negativen Zahlen zu vermeiden, darf man bloſs die gegebene Gleichung in jene mit entgegengesetzten Wurzeln (§. 30.) verwandeln, und in dieser die Untersuchung wieder nur auf die positiven Wurzeln ausdehnen.

§. 69.

Um nun auch, wenigstens ganz kurz und dem Wesentlichen nach, den Beweis für die Richtigkeit der so eben vorgetragenen Methode anzuführen; so beruht dieser ganz einfach darauf, dafs die gegebene Gleichung $X = o$ durch die Substitution von $x = y + \alpha$ in jene

$$Y = y^n + X_{n-1} y^{n-1} + X_{n-2} y^{n-2} + \ldots + X_1 y + X = o,$$

wobei (§. 33.) X, X_1, X_2 . . . die im vorigen Paragraphe angenommenen Werthe haben, nur dafs man statt x durchgehends α setzen mufs, transformirt wird.

A) Hat nun die Gleichung $X = o$ blofs die reellen Wurzeln w_1, w_2, w_3 . . . w_n, von denen, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, jene w_2 und w_3 zwischen a und b liegen sollen, und bilden die numerischen Werthe, steigend geordnet, die Folge: w_1, a, w_2, w_3, b, w_4 . . . w_n; so erhält die Gleichung $Y = o$ für die beiden Substitutionen von $\alpha = a$ und $\alpha = b$ (in der Ausführung läfst man gleich statt α, x selbst stehen, und setzt dann $x = a$ und $x = b$) beziehungsweise die Wurzeln

$$w_1 - a,\ w_2 - a,\ w_3 - a,\ w_4 - a \ldots w_n - a$$
und $$w_1 - b,\ w_2 - b,\ w_3 - b,\ w_4 - b \ldots w_n - b.$$

Es haben aber in diesen beiden Reihen je zwei correspondirende Wurzeln entweder gleiche oder entgegengesetzte Zeichen, je nachdem diese aus den Wurzeln w_1, w_4 . . . w_n, welche aufserhalb a und b liegen, oder aus jenen w_2, w_3, welche innerhalb dieser beiden Gröfsen liegen, gebildet sind; nimmt man nämlich, da zu dieser Betrachtung ein Fall hinreicht, alle Wurzeln w_1, w_2 . . . positiv an, so besitzen diese beiden Wurzelreihen die Zeichen

$$- + + + + \ldots +$$
$$- - - + + \ldots +$$

In jedem Falle, man mag die Wurzeln w_1, w_2 . . . mit was immer für Zeichen annehmen, gibt die Substitution $\alpha = b$ für die Gleichung $Y = o$, zwei positive Wurzeln mehr oder weniger, als jene $\alpha = a$. Da nun aber, weil a und b so wie w_1, w_2 . . . reelle Gröfsen seyn sollen, die

sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $Y = 0$ reell sind, folglich diese (§. 32., Zus. 2.) genau so viele Zeichenwechsel als positive Wurzeln besitzt; so bringt auch die Substitution $\alpha = b$ in dem Polynome Y um zwei Zeichenwechsel mehr oder weniger, als jene $\alpha = a$ hervor, so, daſs der Unterschied dieser beiden Summen jedenfalls zwei, d. i. eben so viele Einheiten beträgt, als reelle Wurzeln zwischen a und b liegen.

Sind beide Wurzeln w_2 und w_3 von einander verschieden, so gibt es immer eine zwischen a und b liegende Zahl c, welche zwischen w_2 und w_3 fällt, so, daſs $w_2 - c$ und $w_3 - c$ verschiedene Zeichen haben. Man findet nun wieder eben so, wie zuvor, daſs für die Substitution von $\alpha = c$ das Polynom Y einen Zeichenwechsel mehr oder weniger als für $\alpha = a$ oder $\alpha = b$ erhält, so, daſs überhaupt sowohl der Unterschied in der Zahl der Zeichenwechsel für $\alpha = a$ und $\alpha = c$, so wie auch für $\alpha = c$ und $\alpha = b$ eine Einheit beträgt, und daher eben sowohl die zwischen a und c liegende Wurzel w_2, als auch jene w_3, welche zwischen c und b liegt, angezeigt wird. Auch ist klar, daſs die Substitutionen von $\alpha = a$ und $\alpha = b$ in X einerlei, dagegen jene $\alpha = c$ davon das entgegengesetzte Zeichen hervorbringen müssen (§. 23.).

Sind dagegen diese beiden Wurzeln w_2 und w_3 einander gleich, so kann es offenbar keine solche Zahl c geben, durch deren Substitution ein Zeichenwechsel mehr oder weniger, als für jene a oder b entstehet, oder einfacher, für welche X das Zeichen, welches dieses Polynom für $\alpha = a$ und $\alpha = b$ erhält, wechseln könnte.

Diese Schlüsse können nun leicht auf jede beliebige Anzahl von zwischen a und b liegenden Wurzeln ausgedehnt werden.

B) Enthält die gegebene Gleichung auch imaginäre Wurzeln, so reicht es hier hin, davon nur ein Paar (§. 28.) $p + q\sqrt{-1}$, $p - q\sqrt{-1}$ anzunehmen; weil sich für mehrere Paare die folgenden Schlüsse nur wiederholen.

Es seyen also w_1, w_2, $w_3 \ldots p + q\sqrt{-1}$ und $p - q\sqrt{-1}$

die Wurzeln der Gleichung $X=o$, wobei alle, bis auf die beiden letzten, reell seyn sollen, und von denen, um wieder die Ideen festzusetzen, jene w_2 zwischen a und b liegen mag. Setzt man nun $b=a+\beta$, wo β eine beliebig kleine Gröfse bedeuten soll, so, dafs man sich die reelle Wurzel w_2 von a und b so eng eingeschlossen denken kann, als es nur immer nöthig ist; so läfst sich, wie man ohne Mühe findet, β in jedem Falle so klein annehmen, dafs in den beiden Producten:

$$[y-(w_1-a)][y-(w_3-a)]\ldots[y^2-2(p-a)y+(p-a)^2+q^2]$$

und

$$[y-(w_1-b)][y-(w_3-b)]\ldots[y^2-2(p-b)y+(p-b)^2+q^2],$$

in welchen je zwei correspondirende Factoren einerlei Zeichen besitzen, die gleichnamigen Coefficienten auch gleiche Zeichen erhalten, und also die beiden Polynome die nämlichen Zeichenwechsel und Folgen darbieten; und dafs ferner, wenn man das erstere Product oder Polynom mit dem Factor $y-(w_2-a)$, und das letztere mit jenem $y-(w_2-b)=y+(b-w_2)$ multiplicirt, im erstern genau um einen Zeichenwechsel mehr als im letzteren entsteht; weil nämlich die letzten Glieder dieser beiden Producte verschiedene Zeichen erhalten. Oder mit andern Worten, man kann, ohne auf das einzugehen, was bei einem gröfsern Intervall ab Statt findet, b immer so nahe an a nehmen (wobei immerfort w_2 zwischen a und b liegen bleibt), dafs wenn die Producte der reellen einfachen Factoren

$$Y_1=[y-(w_1-a)][y-(w_2-a)][y-(w_3-a)]\ldots$$

und

$$Y_2=[y-(w_1-b)][y-(w_2-b)][y-(w_3-b)]\ldots$$

beziehungsweise mit den aus dem conjugirten Paar imaginärer Wurzeln entspringenden quadratischen Factoren $y^2-2(p-a)y+(p-a)^2+q^2$ und $y^2-2(p-b)y+(p-b)^2+q^2$, wobei selbst $p-a$ und $p-b$ verschiedene Zeichen haben dürfen (was z.B. für $p=w_2$ Statt fände), multiplicirt werden, dadurch der Unterschied in beiden Mengen von Zeichenwechseln genau derselbe bleibt, wie er zwischen

Y_1 und Y_2 selbst Statt gefunden hat. Es kann also, wenigstens dann, wenn die reelle Wurzel w_2 zwischen a und b eng genug eingeschlossen wird, diese der Beobachtung niemals entgehen, und läſst sich sofort immer entdecken. Dasselbe gilt auch von jeder andern reellen Wurzel w_1, w_3...

Wir könnten ferner auch leicht zeigen, daſs sich die imaginären Wurzeln auf die in den beiden letzten Beispielen angeführte Weise direct verrathen. Da sich indeſs ihre Anzahl immer von selbst ergibt, nachdem man die der reellen Wurzeln gefunden hat; so wollen wir hier in diesen Beweis nicht weiter eingehen.

Kennzeichen und Berechnung der *imaginären* Wurzeln.

§. 70.

Da die Berechnung der imaginären Wurzeln einer Gleichung in der Regel wenig Nutzen, dafür um so mehr Schwierigkeiten darbiethet; so soll hier auch nur ganz kurz das Wesentlichste und Wichtigste hierüber angeführt werden. Hinsichtlich der Kennzeichen der imaginären Wurzeln dienet folgendes:

1. Behält eine Gleichung, in welcher ein oder mehrere Glieder fehlen, nicht die nämliche Anzahl von Zeichenwechsel und Folgen, wenn man sich die fehlenden Glieder ein Mal mit $+$, das andere Mal mit $-$ eingeschaltet denkt; so hat die Gleichung nothwendig imaginäre Wurzeln. Diese Verschiedenheit in der Anzahl der Wechsel und Folgen in den beiden Fällen tritt aber, wenn nur ein Glied fehlt, immer dann ein, wenn das fehlende Glied eine Zeichenfolge unterbricht, d. h. wenn ein Glied zwischen zwei gleichen Zeichen fehlt.

So ist z. B. $x^3 + px + q = 0$ auch so viel als $x^3 \pm 0x^2 + px + q = 0$. Sind nun p und q positiv, und zählt man im zweiten Gliede das Zeichen $+$, so hat das Polynom dieser Gleichung drei Folgen; und es könnte, wenn alle Wurzeln reell wären, diese Gleichung nur negative Wurzeln haben. Nimmt man dagegen das Zeichen $-$ bei

$0x^2$, so entstehen zwei Wechsel und eine Folge; so dafs jetzt wieder dieselbe Gleichung zwei positive und eine negative Wurzel haben müfste, was mit dem Vorigen im Widerspruche steht: diese Gleichung kann also unmöglich lauter reelle Wurzeln haben.

Anders verhält es sich dagegen mit der Gleichung $x^3 - px + q = 0$, nämlich mit $x^3 \pm 0x^2 - px + q = 0$; hier erhält man, man mag im zweiten Gliede das obere oder untere Zeichen gelten lassen, immer zwei Wechsel und eine Folge. Da sich aber der hier aufgestellte Satz oder Schlufs nicht umkehren läfst, so kann man von dieser Gleichung nur sagen, dafs sie möglicher Weise lauter reelle Wurzeln haben kann.

2. Ist die Gesammtzahl der vorhandenen Zeichenwechsel in der Gleichung $X = 0$, in welcher ein oder mehrere Glieder fehlen, und in jener $\underline{X} = 0$, welche mit der vorigen gleiche aber entgegengesetzte Wurzeln hat, kleiner als der Grad der Gleichung $X = 0$; so besitzt diese nothwendig imaginäre Wurzeln.

So hat z. B. die Gleichung $x^3 + 2x - 12 = 0$ einen, jene mit entgegengesetzten Wurzeln: $x^3 + 2x + 12 = 0$, gar keinen, folglich beide zusammen nur einen Zeichenwechsel; es hat daher diese gegebene Gleichung ein Paar imaginäre Wurzeln. Man findet dafür in der That die Wurzeln: 2, $-1 + \sqrt{-5}$ und $-1 - \sqrt{-5}$.

Auch dieser Schlufs darf nicht umgekehrt werden. Denn so hat die Gleichung (§. 67., Beisp. 2.) $x^3 - 6x - 7 = 0$ einen, und die mit entgegengesetzten Wurzeln: $x^3 - 6x + 7 = 0$, zwei, folglich beide zusammen drei Zeichenwechsel; und doch enthält diese Gleichung, wie wir gesehen haben, zwei imaginäre Wurzeln.

3. Fehlen in einer Gleichung zwei oder mehrere auf einander folgende Glieder, so besitzt die Gleichung nothwendig imaginäre Wurzeln. Zählt man die fehlenden Glieder auf eine solche Art zusammen, dafs so oft eine ungerade Anzahl Glieder zwischen einem Zeichenwechsel fehlt, Eins weniger, und wenn diese zwischen ei-

ner Zeichenfolge mangelt, Eins mehr gezählt wird; so erhält man eine Summe, welcher die Anzahl der imaginären Wurzeln wenigstens gleich kommen muſs *).

So hat z. B. die Gleichung $x^6 - 1 = 0$, in welcher fünf Glieder zwischen einem Zeichenwechsel fehlen, wenigstens $5 - 1 = 4$, dagegen jene $x^6 + 1 = 0$, in welcher fünf Glieder zwischen einer Zeichenfolge fehlen, wenigstens $5 + 1 = 6$ imaginäre Wurzeln (m. vergl. die Beispiele in §. 56.).

Eben so findet man, daſs die Gleichung

$$x^{14} - 2x^{11} + x^{10} + 3x^9 + 5x^6 - 3x^4 + x^2 + 1 = 0$$

wenigstens sechs imaginäre Wurzeln haben muſs.

4. Die Gleichung $Z = 0$ der quadrirten Differenzen (§. 38.) muſs wenigstens eben so viele reelle negative Wurzeln haben, als die gegebene Gleichung $X = 0$ Paare imaginärer Wurzeln besitzt. Denn da die imaginären Wurzeln (§. 28.) immer paarweise und conjugirt vorhanden seyn müssen, so sey $p + q\sqrt{-1}$ und $p - q\sqrt{-1}$ ein solches Paar; ihre Differenz ist $2q\sqrt{-1}$, und das Quadrat davon $-4q^2$, welche reelle negative Gröſse sofort eine Wurzel der Gleichung $Z = 0$ bildet. Dasselbe gilt aber für jedes Paar conjugirter imaginärer Wurzeln der Gleichung $X = 0$.

Da übrigens auch noch die Differenzen zwischen den

*) Bezeichnet man nämlich mit *Gauſs* durch a die Anzahl der durch eine gerade, mit c jene durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenwechsel; ferner mit b die Anzahl der durch eine gerade, mit d jene der durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenfolgen; endlich durch A die Anzahl der unmittelbaren Zeichenwechsel, und durch B jene der unmittelbaren Zeichenfolgen: so ist die Zahl der in der Gleichung $X = 0$ fehlenden Glieder sofort

$$e = n - (A + B + a + b + c + d).$$

Nach der *Descart*'schen Regel (§. 32., Zus. 1.) kann aber die Anzahl der positiven Wurzeln höchstens $= A + a + c$, und die der negativen höchstens $= B + b + c$ seyn; folglich ist die Zahl der reellen Wurzeln überhaupt höchstens

$$= A + B + a + b + 2c = n + c - d - c,$$

und mithin die der imaginären Wurzeln wenigstens

$$= c + d - c.$$

reellen, zwischen reellen und imaginären, und endlich zwischen nicht conjugirten imaginären Wurzeln vorkommen, nämlich auch noch Differenzen von der Form $w - w'$, $w - (p + q\sqrt{-1})$, $(p - p') + (q - q')\sqrt{-1}$ entstehen, woraus für die Gleichung $Z = 0$ theils reelle, theils imaginäre Wurzeln entspringen; so kann, wenn z. B. $w = p$ oder $p = p'$ ist, wodurch die beiden letzten Differenzen in $-q\sqrt{-1}$, $(q - q')\sqrt{-1}$, und also ihre Quadrate in $-q^2$ und $-(q - q')^2$ übergehen, die Gleichung $Z = 0$ auch noch reelle negative Wurzeln besitzen, die von keinem conjugirten Paar imaginärer Wurzeln der Gleichung $X = 0$ herrühren; es ist also möglich, dafs die Gleichung $Z = 0$ mehr reelle negative Wurzeln hat, als die Gleichung $X = 0$ Paare von imaginären Wurzeln besitzt.

Kommen also in der Gleichung der quadrirten Differenzen $Z = 0$ Zeichenfolgen vor, so hat (es mögen diese Folgen nun von negativen oder imaginären Wurzeln z herrühren) die gegebene Gleichung $X = 0$ nothwendig imaginäre Wurzeln. Hat dagegen umgekehrt die Gleichung $Z = 0$ lauter Zeichenwechsel, so kann die Gleichung $X = 0$ keine imaginären Wurzeln besitzen, weil das Quadrat der Differenz aus den beiden conjugirten imaginären Wurzeln, die sonst wenigstens vorhanden seyn müfsten, nothwendig eine reelle negative Wurzel z, und diese wieder, nach dem *Descart*'schen Satze, wenigstens eine Zeichenfolge in Z hervorbringen müfste *).

So hat von den Gleichungen $x^3 - 6x - 7 = 0$ und $8x^3 - 8x + 1 = 0$, deren quadrirte Differenzengleichungen (§. 67., Beispiele 2. und 1.) beziehungsweise

$$z^3 - 36z^2 + 324z + 459 = 0$$

$$\text{und } 64z^3 - 384z^2 + 576z - 229 = 0$$

*) Wenn daher in einigen Lehrbüchern behauptet wird, dafs sich aus der Abwesenheit aller Zeichenfolgen in der Gleichung der quadrirten Differenzen, keineswegs auch auf die Abwesenheit aller imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung schliefsen lasse; so ist diefs offenbar ein Irrthum.

sind, die erstere ein Paar imaginäre, dagegen die letztere lauter reelle Wurzeln.

§. 71.

Um die imaginären Wurzeln einer Gleichung $X=0$ zu berechnen, bemerken wir zuerst, daſs die Substitution von $x=p+q\sqrt{-1}$ in dieselbe auf eine Gleichung von der Form $P+Q\sqrt{-1}=0$, und diese wieder unmittelbar auf die beiden folgenden $P=0$ und $Q=0$, in welchen p und q als die beiden unbekannten Gröſsen enthalten sind, führt (§. 28.). Kann man nun aus diesen beiden letzten Gleichungen alle zusammengehörigen Werthe von p und q bestimmen, so darf man diese nur nach und nach in den Ausdruck $p\pm q\sqrt{-1}$ setzen, um sofort alle Paare imaginärer Wurzeln der Gleichung $X=0$ zu erhalten. Das Auffinden dieser zusammengehörigen Werthe von p und q wird durch das folgende Verfahren vereinfacht.

Bestimmt man nach den oben angegebenen Methoden die reellen negativen Wurzeln der Gleichung der quadrirten Differenzen $Z=0$, und heiſsen diese $-z'$, $-z''$. . .; so hat man (vorigen Paragraph, 4.), wenn sie von conjugirten Paaren imaginärer Wurzeln der gegebenen Gleichung herrühren, $z'=4q^2$, $z''=4q'^2$. . ., mithin auch $q=\frac{1}{2}\sqrt{z'}$, $q'=\frac{1}{2}\sqrt{z''}$. . ., wodurch also die Gröſsen q, q' . . . bekannt werden.

Setzt man ferner in die beiden Gleichungen $P=0$ und $Q=0$, $q=\frac{1}{2}\sqrt{z'}$, so gelten diese gleichzeitig für jenen Werth von p, welcher gerade diesem Werthe q entspricht; diese besitzen also nothwendig einen gemeinschaftlichen Factor ($p-\alpha$, wenn α der gesuchte, jenem $q=\frac{1}{2}\sqrt{z'}$ entsprechende Werth von p ist). Sucht man diesen nach der bekannten Methode auf (welcher sofort vom 1sten, 2ten, 3ten . . . Grade seyn wird, je nachdem diesem Werthe von $q=\frac{1}{2}\sqrt{z'}$ 1, 2, 3 . . . Werthe von p entsprechen, d. i. je nachdem alle für q, q' . . . gefundenen Werthe ungleich, oder davon 2, 3 . . . einander gleich sind), und setzt diesen gleich Null; so läſst sich daraus der dem Werthe

$q = \frac{1}{2}\sqrt{z'}$ entsprechende Werth von p finden. Auf die nämliche Art findet man auch für q', q'' . . . die zugehörigen p', p'' . . .

Rührt eine der negativen Wurzeln $-z'$, $-z''$. . ., z. B. jene $-z''$, nicht von einem Paar conjugirten imaginären Wurzeln der Gleichung $X = o$, sondern von einem der beiden übrigen (im vorigen Paragraphe, 4.) angeführten Fälle her; so wird der Werth $q'' = \frac{1}{2}\sqrt{z''}$, in die beiden Gleichungen $P = o$ und $Q = o$ substituirt, keinen gemeinschaftlichen Factor erzeugen, weil diese für keinen Werth von p'' zugleich bestehen können. Man wird daher, wenn sich dieses zeigt, die Wurzel $-z''$ als für die Bestimmung der zusammengehörigen Werthe von p und q unbrauchbar weglassen.

II. Gleichungen mit *mehreren*, und insbesondere mit *zwei* Unbekannten.

Elimination einer der beiden unbekannten Gröſsen, aus zwei höhern Gleichungen mit zwei Unbekannten.

§. 72.

Erklärung.

Der Grad einer Gleichung mit zwei unbekannten Gröſsen x, y, wird durch die höchste Summe der Exponenten von x und y der vorkommenden Producte, wie $a x^r y^s$, wobei auch der eine oder der andere dieser Exponenten Null seyn kann, bestimmt.

Die allgemeine Form einer Gleichung des n^{ten} Grades mit zwei Unbekannten ist demnach

$$P_0 x^n + P_1 x^{n-1} + P_2 x^{n-2} + \ldots + P_{n-1} x + P_n = 0,$$

wobei P_0 eine numerische oder algebraische Gröſse, P_1 eine Function von y höchstens des ersten, P_2 eine Function von y höchstens des zweiten u. s. w., P_n eine Function von y höchstens des n^{ten} Grades bezeichnet; dabei können auch eine oder mehrere dieser Gröſsen P_0, P_1, $P_2 \ldots$ Null seyn.

Wir wollen nun zwei Gleichungen, die eine vom n^{ten}, die andere vom m^{ten} Grade zur Auflösung wählen; diese lassen sich also, wenn nach x geordnet wird, so darstellen:

$$P_0 x^n + P_1 x^{n-1} + P_2 x^{n-2} + \ldots + P_{n-1} x + P_n = 0 \quad (A = 0)$$
$$P'_0 x^m + P'_1 x^{m-1} + P'_2 x^{m-2} + \ldots + P'_{m-1} x + P'_m = 0 \quad (A' = 0)$$

dabei sind, der vorigen Bemerkung gemäſs, die Coefficienten im Allgemeinen von der Form:

$$P_0 = a,\quad P_1 = b + cy,\quad P_2 = d + ey + fy^2,\ \text{etc.}$$
$$P'_0 = a',\quad P'_1 = b' + c'y,\quad P'_2 = d' + e'y + f'y^2,\ \text{etc.}$$

Um aber diese gegebenen Gleichungen, die wir der Kürze wegen durch $A = 0$ und $A' = 0$ bezeichnen wollen, aufzulösen, d. i. um alle Paare zusammengehöriger Werthe von x und y, deren jedes die beiden Polynome A und A'

gleichzeitig auf Null bringt, zu finden; nehmen wir einen Augenblick an, dafs $y = \beta$ eine Wurzel oder Auflösung sey, die dem Werthe $x = \alpha$ entspricht, so dafs $x = \alpha$, $y = \beta$ ein solches Paar zusammengehöriger Werthe oder eine vollständige Auflösung bildet. Denkt man sich daher diesen Werth von $y = \beta$ in A und A' substituirt, so müssen diese beiden Polynome (§. 26.) den Factor $x - \alpha$ gemeinschaftlich haben, welchen man nach dem bekannten Verfahren auch finden würde. Dasselbe gilt für die Auflösungen $x = \alpha'$, $y = \beta'$, ferner $x = \alpha''$, $y = \beta''$ u. s. w.

Da man aber die Wurzeln $y = \beta$, β'... nicht im Voraus weifs, so wird man auf die Polynome A und A' das bekannte Verfahren des gröfsten gemeinschaftlichen Mafses oder Theilers anwenden. Die dabei der Reihe nach entstehenden Reste werden in Bezug auf x immer niedriger, bis man zuletzt auf einen Rest kommt, der gar kein x mehr enthält, und blofs noch eine Function von y ist. Da aber dieser Rest für $y = \beta$, β'... verschwinden mufs, indem die Polynome A und A' für jeden dieser Werthe einen gemeinschaftlichen Factor, im Allgemeinen von der Form $a + bx$ besitzen müssen; so wird man diesen letzten Rest gleich Null setzen, und dadurch die End- oder Finalgleichung in y erhalten, welche sofort die sämmtlichen Werthe β, β'... für y liefert. Setzt man sodann auch den vorletzten Rest (den gemeinschaftlichen Divisor), welcher von der Form $a + bx$ seyn wird, wo a und b blofs noch Functionen von y sind, ebenfalls gleich Null; so erhält man aus dieser Gleichung, wenn darin nach und nach für y die aus der Finalgleichung gefundenen Werthe β, β'... substituirt werden, die correspondirenden Werthe für $x = \alpha$, α'....

Auch ist es für sich klar, dafs man bei diesem Vorgange x mit y verwechseln, d. i. die beiden Polynome A, A' nach y ordnen, und so die Finalgleichung in x finden kann; dabei hat der vorletzte Rest die Form $a' + b'y$, wo a' und b' blofs noch Functionen von x sind.

§. 73.

Um noch deutlicher zu sehen, wie die beiden zuletzt genannten Gleichungen, das ganze System der Auflösungen der gegebenen Gleichungen $A=0$ und $A'=0$ enthalten; seyen bei dem Verfahren für das Auffinden des gröfsten gemeinschaftlichen Divisors von A und A': f, f_1, $f_2\ldots$ die zur Erzielung ganzer Quotienten eingeführten Factoren, Q, Q_1, $Q_2\ldots$ und R, R_1, $R_2\ldots$ die auf einander folgenden Quotienten und Reste; so hat man

$$fA = A'Q + R\ldots(1$$
$$f_1A' = RQ_1 + R_1\ldots(2$$
$$f_2R = R_1Q_2 + R_2\ldots(3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_nR_{n-2} = R_{n-1}Q_n + R_n\ldots(n+1.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber ganz einfach, dafs diejenigen Werthe von x und y, welche A und A' Null machen, also Auflösungen sind, vermöge Gleichung (1, auch $R=0$ machen; dafs ferner dieselben Werthe, wegen Gleichung (2, auch R_1 auf Null bringen; dafs dasselbe, vermöge der Gleichung (3, auch von R_2 gilt, d. h. dafs die Auflösungen von $A=0$ und $A'=0$ auch dem Systeme $R_1=0$, $R_2=0$ zukommen u. s w., und endlich auch, wenn man diese Schlüsse gehörig fortsetzt, dafs vermöge der letzten oder $(n+1)^{ten}$ Gleichung, die Auflösungen des Systems $A=0$, $A'=0$, nothwendig in dem letzten Systeme der Gleichungen $R_{n-1}=0$, $R_n=0$ enthalten sind *).

Beispiel 1.

Um aus den Gleichungen

$$x^2-(y+1)x-2(y^2+2y+1)=0\ldots(A$$

und $x^2+(1-3y)x+2y^2-2y=0\ldots(A'$,

welche bereits nach der einen unbekannten Gröfse x geordnet sind, die zusammengehörigen Werthe von x und y,

*) Bei diesen Schlüssen wird offenbar gefordert und vorausgesetzt, dafs die sämmtlichen Quotienten in Bezug auf x und y ganz sind; nämlich weder x noch y im Nenner enthalten.

oder alle **Auflösungen** zu finden, hat man, wenn das Polynom (A' als **Divisor** gewählt wird, zuerst den Quotienten 1, und wenn man gleich den gemeinschaftlichen Factor 2 wegläſst, den Rest

$$(y-1)x-(2y^2+y+1)(=R_{n-1}).$$

Multiplicirt man hierauf das Polynom (A', welches jetzt **Dividend** wird, um **ganze** Quotienten zu erhalten, sogleich (da man einen zweigliedrigen Quotienten bekömmt) mit $(y-1)^2$; so erhält man nach der zweiten Division den Quotienten $(y-1)x+5y-y^2$, und den Rest

$$3y^3+10y^2+3y(=R_n),$$

welcher gleich Null gesetzt, sofort die Endgleichung gibt:

$$3y^3+10y^2+3y=0.$$

Für die Wurzeln dieser Gleichung findet man ganz einfach 0, -3 und $-\frac{1}{3}$.

Setzt man ferner den vorletzten Rest (R_{n-1}), d. i. den letzten Divisor gleich Null, so erhält man

$$(y-1)x-(2y^2+y+1)=0\,(a+bx=0),$$

und daraus

$$x=\frac{2y^2+y+1}{y-1}.$$

Aus dieser Gleichung hat man endlich, wenn für y nach und nach die Werthe 0, -3, $-\frac{1}{3}$ gesetzt werden, beziehungsweise $x=-1$, -4 und $-\frac{2}{3}$. Die Auflösungen für die gegebenen Gleichungen 1) und 2) sind demnach:

$$\left.\begin{matrix}x=-1\\ y=\pm 0\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=-4\\ y=-3\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}x=-\frac{2}{3}\\ y=-\frac{1}{3}\end{matrix}\right\}.$$

Beispiel 2.

Nehmen wir das im §. 37. vorkommende Beispiel, und eliminiren nach der gegenwärtigen Methode x aus den beiden Gleichungen:

$$x^3-7x+6=0\,(A=0),\quad 3x^2+3yx+y^2-7=0\,(A'=0),$$

um die Finalgleichung in y (d i. die Differenzengleichung für $x^3-7x+6=0$) zu finden. Man erhält nach einer

zweimaligen Division, als ersten Rest:

$$2(y^2-7)x + y^3 - 7y + 18,$$

welcher nun Divisor wird; multiplicirt man daher den zweiten Dividend (A'), da man abermals zwei Mal dividiren muſs, mit $4(y^2-7)^2$, so erhält man nach der zweiten Division den Rest ohne x, oder wenn dieser Null gesetzt wird, die gesuchte Endgleichung:

$$y^6 - 42y^4 + 441y^2 - 400 = 0,$$

wie wir diese auch sowohl im angezogenen §. 37., wie auch im §. 43. gefunden haben

Was ferner die Auflösungen der beiden gegebenen Gleichungen betrifft, so sind die Wurzeln der Finalgleichung, wie man leicht findet, wenn man $y^2 = z$ setzt: $z = 16, 25, 1$, also wegen $y = \pm\sqrt{z}$:

$$y = \pm 4, \quad \pm 5 \quad \text{und} \quad \pm 1.$$

Diese Werthe nach und nach in die (aus dem vorletzten Rest entstehende) Gleichung

$$x = \frac{-y^3 + 7y - 18}{2(y^2-7)}$$

substituirt, geben beziehungsweise: $x = -3, 1, -3, 2, 1, 2$; so, daſs man die Auflösungen hat:

$$\left.\begin{matrix}x=-3\\ y=+4\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}x=+1\\ y=-4\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}x=-3\\ y=+5\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}x=+2\\ y=-5\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}x=1\\ y=1\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}x=+2\\ y=-1\end{matrix}\right\}.$$

§. 74.

Nachdem wir auf diese Weise den zur Auflösung der Gleichungen $A = 0$ und $A' = 0$ einzuschlagenden Weg im Allgemeinen angegeben haben, müssen wir noch einige wesentliche Fälle, welche dabei eintreten können, insbesondere erörtern.

1. Das System der Gleichungen $R_n = 0$, $R_{n-1} = 0$ kann, wenn man zur Erzielung ganzer Quotienten die Factoren f, f_1, $f_2 \ldots$, welche offenbar kein x mehr enthalten, also nur noch Functionen von y (oder bei Zahlengleichungen numerische Gröſsen) seyn können, eingeführt hat, auch Auflösungen enthalten, welche dem Systeme $A = 0$, $A' = 0$ fremd sind.

Denn aus der Gleichung (1 des vorigen Paragraphes folgt, dafs alle Auflösungen von $R=o$, $A'=o$ auch der Gleichung $fA=o$ zukommen; da aber diese letzte in jene beiden $f=o$ und $A=o$ zerfällt, so enthalten die Gleichungen $R=o$, $A'=o$ nicht nur die Auflösungen von $A=o$, $A'=o$, sondern zugleich auch jene von $f=o$, $A'=o$.

Eben so folgt aus der Gleichung (2, dafs die Auflösungen von $R_1=o$ und $R=o$ auch der Gleichung $f_1A'=o$, welche aber in jene $f_1=o$ und $A'=o$ zerfällt, Genüge leisten, so, dafs sich unter den Auflösungen von $R_1=o$, $R=o$ nicht blofs jene des Systems $A'=o$, $R=o$, sondern auch die von $f_1=o$ und $R=o$ befinden. Da aber nach dem Vorigen die Auflösungen von $A'=o$, $R=o$ schon alle Auflösungen von $A=o$, $A'=o$ und von $f=o$, $A'=o$ in sich schliefsen; so enthalten endlich die Auflösungen von $R_1=o$, $R=o$ auch jene der drei Systeme:

$$A=o,\ A'=o,\quad f=o,\ A'=o\quad \text{und}\quad f_1=o,\ R=o.$$

Setzt man diese Schlüsse fort, indem man sie nach und nach auf die Gleichungen (3, (4 . . . ($n+1$ ausdehnt; so findet man endlich, dafs das letzte System $R_n=o$, $R_{n-1}=o$ nicht nur die sämmtlichen Auflösungen von $A=o$, $A'=o$, sondern zugleich auch jene der Systeme $f=o$, $A'=o$, $f_1=o$, $R=o$, . . . $f_n=o$, $R_{n-1}=o$ enthält oder in sich schliefst.

Findet man nun z. B. aus $f_1=o$ (wo, wie gesagt, f_1 nur y enthalten kann) für y die Werthe p, p' . . . und mit diesen aus $R=o$ für x: q, q' . . . *); so sind die Auflösungen:

*) Dieses letztere ist jedoch nicht immer der Fall, sondern es verschwinden öfter für $y=p, p'$. . . alle mit x verbundenen Glieder in R, so, dafs man daraus für x nichts findet. In diesem Falle liefert die Gleichung $f=o$ gar keine, mithin auch keine fremdartigen Auflösungen; auch erscheint dann der Factor f nicht in der Endgleichung $R_n=o$

Aus diesem Grunde hat die Einführung des Factors f_n in den Rest oder Divisor R_{n-2} (wenn er nämlich Dividend wird), welcher jenem des ersten Grades unmittelbar vorhergeht, niemals einen Einflufs auf die Auflösungen von $A=o$, $A'=o$. Dieses wird auch durch das vorige Beisp. 1 bestätigt; denn (der eingeführte Factor) $y-1=o$ gesetzt, gibt $y=1$; mit diesem Werthe aber verschwindet in

$p, q, p', q', \ldots$ welche mit in dem Systeme $R_n = 0$, $R_{n-1} = 0$ enthalten sind, als jenem $A = 0$, $A' = 0$ fremdartig, wegzulassen. Dasselbe gilt auch von den Factoren $f_2, f_3 \ldots$ und den entsprechenden Resten $R_1, R_2 \ldots$ unter diesen angeführten Umständen.

Anmerk. Da sich (mit Hilfe der symmetrischen Functionen §. 40. — 42.) beweisen läfst, dafs der Grad der aus der Elimination einer der beiden Unbekannten zwischen zwei höhern Gleichungen entstehenden Finalgleichung, nicht gröfser als das Product der beiden Ordnungsexponenten dieser Gleichungen seyn kann (er ist genau diesem Producte gleich, wenn jede Gleichung vollständig ist) *); so läfst sich oft schon mit Berücksichtigung dieser Eigenschaft, auf das Vorhandenseyn eines fremden Factors in der Endgleichung $R_n = 0$ schliefsen.

der Gleichung $(y-1)x-(2y^2+y+1)=0$ ($R=0$) das Glied in x, so, dafs daraus für x kein Werth gefunden wird. Dieser Fall tritt also bei allen Gleichungen des zweiten Grades ein; man kann nämlich bei diesen niemals fremdartige Auflösungen erhalten.

*) Dieser schöne, von *Bézout* (geb. zu Nemours 1730; gest. zu Paris 1783) herrührende Satz, kann nach *Poisson* auch auf folgende Art erwiesen werden.

Der Grad der Final- oder Endgleichung wird offenbar nicht herabgebracht oder vermindert, wenn man in den Coefficienten $P_1, P_2 \ldots, P'_1, P'_2 \ldots$ der beiden Gleichungen $A=0$ und $A'=0$ (§. 72.) nur immer das Glied mit der höchsten Potenz von y beibehält, also die Gleichungen so annimmt:

$$x^n + ayx^{n-1} + by^2x^{n-2} + \ldots + ty^{n-1}x + uy^n = 0$$
$$x^m + a'yx^{m-1} + b'y^2x^{m-2} + \ldots + t'y^{m-1}x + u'y^m = 0$$

oder, was dasselbe ist:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n + a\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + b\left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} + \ldots + t\left(\frac{x}{y}\right) + u = 0$$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^m + a'\left(\frac{x}{y}\right)^{m-1} + b'\left(\frac{x}{y}\right)^{m-2} + \ldots + t'\left(\frac{x}{y}\right) + u' = 0,$$

in welchen $\left(\frac{x}{y}\right)$ die unbekannte Gröfse, und $a, b \ldots u, a', b' \ldots u'$ Zahlen sind. Bezeichnet man nun mit $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Wurzeln der erstern, und mit $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$ die der letztern Gleichung; so hat man auch (§. 27):

$$\left(\frac{x}{y}-\alpha\right)\left(\frac{x}{y}-\beta\right)\left(\frac{x}{y}-\gamma\right)\ldots = 0 \text{ und}$$
$$\left(\frac{x}{y}-\alpha'\right)\left(\frac{x}{y}-\beta'\right)\left(\frac{x}{y}-\gamma'\right)\ldots = 0$$

Beispiel.

Für die Gleichungen

$$yx^2 - 3yx - (y^2 - 2) = 0 \ (A = 0)$$

$$(y^2 - 3y + 2)x^2 + (y-1)x - (3y - 1) = 0 \ (A' = 0)$$

nehme man, um diesen Fall zu erläutern, das erste Polynom (A) zum Dividend, und multiplicire dasselbe mit

$$y^2 - 3y + 2 \ (=f);$$

so entsteht nach der ersten Division der Rest:

$$-y(3y^2 - 8y + 5)x - (y^4 - 3y^3 - 3y^2 + 7y - 4) \ (=R).$$

Um ferner bei der nächsten Division (von A' durch R) ganze Quotienten und Reste zu erhalten, muſs man, da

$$3y^2 - 8y + 5 = (y-1)(3y-5) \text{ und}$$
$$y^2 - 3y + 2 = (y-1)(y-2)$$

ist, das zweite Polynom (A') noch (wegen der zweimaligen Division) mit dem Factor

$$y^2(y-1)(3y-5)^2 \ (=f_1 = f_n)$$

multipliciren. Man erhält hierauf nach der zweiten Division den von x unabhängigen Rest:

$$y^9 - 8y^8 + 12y^7 + 16y^6 + y^5 - 170y^4 + 322y^3 - 294y^2$$
$$+ 148y - 32 \ (R_1 = R_n),$$

welcher Null gesetzt, sofort die Endgleichung gibt.

Da man nun bei der ersten Division den Factor

oder

$$(x - \alpha y)(x - \beta y)(x - \gamma y) \ldots = 0 \quad (1$$
$$(x - \alpha' y)(x - \beta' y)(x - \gamma' y) \ldots = 0 \quad (2.$$

Substituirt man aber in der Gleichung (1 für x nach und nach die Wurzeln von jener (2, d. i. $x = \alpha' y$, $x = \beta' y$, $x = \gamma' y \ldots$, so erhält man, da für jede dieser Substitutionen das Polynom (1 Null wird, die m Gleichungen:

$$y^m(\alpha' - \alpha)(\alpha' - \beta)(\alpha' - \gamma) \ldots = 0$$
$$y^m(\beta' - \alpha)(\beta' - \beta)(\beta' - \gamma) \ldots = 0$$
$$y^m(\gamma' - \alpha)(\gamma' - \beta)(\gamma' - \gamma) \ldots = 0$$

u. s. w.

welche zusammen alle Auflösungen von y liefern, und deren Product nothwendig die besagte Finalgleichung in y bildet, weil diese für alle, und nur für diese Werthe von y Null wird, für welche die vorigen n Factoren verschwinden; es ist aber dieses Product offenbar vom m^{ten} Grade, was zu beweisen war.

$$y^2 - 3y + 2 = (y-1)(y-2)$$

eingeführt hat, so kann die Endgleichung die fremden Factoren $y-1$ und $y-2$ enthalten; man findet indefs, dafs $y=1$ zu keinem Werthe von x im zweiten Polynome (A') führt, weil dafür alle Glieder mit x verschwinden. Für $y=2$ ist jedoch dieses nicht der Fall; und in der That findet sich, wie man sich leicht überzeugt, in der Endgleichung der Factor $y-1$ nicht, wohl aber jener $y-2$, durch welchen diese dividirt, sofort die wahre Finalgleichung:

$$y^8 - 6y^7 + 16y^5 + 33y^4 - 104y^3 + 114y^2 - 66y + 16 = 0$$

gibt.

Der in den zweiten Dividend (A') eingeführte Factor $(f_1 = f_n)$ hat auf die Endgleichung (s. die vorletzte Note) keinen Einflufs.

Anmerk. Nimmt man bei der ersten Division, des eben behandelten Beispieles, das zweite Polynom (A') zum Dividend; so erhält man sogleich die wahre Endgleichung, ohne einen fremden Factor.

§. 75.

2. Hat man im Laufe der Rechnung, zur Vereinfachung derselben, in einem Divisor, dessen entsprechender Dividend D heifsen soll, den Factor F, welcher eine Function von y ist, abgekürzt oder weggelassen; so mufs man zu den am Ende erhaltenen Auflösungen, noch jene rechnen, welche aus dem Systeme der Gleichungen $F=0$, $D=0$ hervorgehen, um sofort alle Auflösungen vollständig zu erhalten. Will man die vollständige Endgleichung in y haben, so mufs man die am Ende der Rechnung erhaltene, noch mit F auf die so vielte Potenz, als der Grad des Polynoms D in Bezug auf x Einheiten hat, erhoben, multipliciren. Dasselbe gilt auch von jedem andern weggelassenen Factor F', F'' etc.

Beispiel.

Es seyen die gegebenen, aufzulösenden Gleichungen:

$$x^3 - 4yx^2 + 5y^2x - 2y^3 = 0 \ (A = 0),$$
$$x^3 - 4x^2 + (6 - y)x - 2y^2 = 0 \ (A' = 0).$$

Nimmt man das Polynom der ersten Gleichung wieder zum Dividend, jenes der zweiten zum Divisor; so erhält man nach der ersten Division den Rest (als zweiten Divisor):

$$-4(y-1)x^2 + (5y^2 + y - 6)x - 2y^2(y-1),$$

welcher sofort den Factor $y - 1$ ($= F$) besitzt; kürzt man durch diesen ab, so wird der vereinfachte zweite Divisor: $-4x^2 + (5y + 6)x - 2y^2$, und das zweite Polynom (A') ist sofort der entsprechende Dividend (D).

Nach vollendeter Rechnung, die nun ganz einfach ist und weiter nichts Bemerkenswerthes darbietet, findet man die Endgleichung, wenn man sogleich den gemeinschaftlichen Factor -64 wegläſst:

$$2y^6 - 27y^5 + 108y^4 - 108y^3 = 0 \ldots (1$$

und den vorletzten Rest, welcher x noch in der ersten Potenz erhält, wenn man diesen gleich Null setzt ($a + bx = 0$):

$$(17y^2 - 36y + 36)x - (10y^3 + 12y^2) = 0,$$

und daraus $\quad x = \dfrac{2y^2(5y + 6)}{17y^2 - 36y + 36} \ldots (2$

Das System dieser beiden letzten Gleichungen (1 und (2 gibt die Auflösungen:

$y = 0, 0, 0, 6, 6, \frac{3}{2}$, und respective $x = 0, 0, 0, 6, 6, 3$.

Dazu kommen nun noch jene, welche aus dem Systeme

$$y - 1 = 0 \quad \text{und} \quad x^3 - 4x^2 + (6 - y)x - 2y^2 = 0$$

entspringen, nämlich $y = 1$ und $x = 1, 1, 2$, so, daſs man als **vollständige** Auflösung der gegebenen Gleichungen folgende Systeme hat:

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \text{3 Mal}, \quad \left.\begin{matrix} x=6 \\ y=6 \end{matrix}\right\} \text{2 M.}, \quad \left.\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}\right\} \text{2 M.}, \quad \left.\begin{matrix} x=3 \\ y=\frac{3}{2} \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}\right\}.$$

Um endlich die **vollständige Finalgleichung** (im Falle diese verlangt wird) zu erhalten, wird man jene (1, da der genannte Divisor (D) in Bezug auf x vom dritten Grade ist, noch mit $(y - 1)^3$ multipliciren (der Grund dieser Potenzerhebung des weggelassenen Factors $(y - 1)$ läſst

sich nun leicht einsehen). Man kann sich von ihrer Richtigkeit und der Vollständigkeit der Auflösungen dann auch überzeugen, wenn man oben den zweiten Divisor durch den gemeinschaftlichen Factor $(y-1)$ nicht abkürzt.

§. 76.

3. Verschwinden in dem vorletzten Reste des ersten Grades $a+bx$ (wobei a und b, wie bereits bekannt, im Allgemeinen Functionen von y sind) für irgend einen aus der Finalgleichung für y gefundenen Werth, z. B. für $y=\gamma$, sowohl a als auch b, wird folglich dieser ganze Rest identisch gleich Null, so dafs aus der Gleichung $a+bx=0$ oder $x=-\frac{a}{b}$ für $y=\gamma$, $x=\frac{0}{0}$ folgt; so ist diefs ein Beweis, dafs diesem Werthe $y=\gamma$ mehrere Werthe von x entsprechen, welche also unmöglich aus dem Reste des ersten Grades gefunden werden können. In diesem Falle sucht man die entsprechenden Werthe von x aus dem vorhergehenden oder jenem Reste zu bestimmen, welcher in Bezug auf x vom zweiten Grade ist, indem man diesen gleich Null, und in dieser Gleichung $y=\gamma$ setzt. Verschwindet auch dieser, welches dann anzeigen würde, dafs dem Werthe $y=\gamma$ mehr als zwei Werthe von x zukommen; so setzt man wieder den nächst vorhergehenden Rest, d. i jenen vom dritten Grade gleich Null, und sucht daraus für $y=\gamma$ die drei Werthe zu bestimmen; u. s. w. Verschwinden also der Reihe nach für diesen Werth von $y=\gamma$ alle Reste bis ausschliefslich zu jenem, welcher in Bezug auf x vom n^{ten} Grade ist; so setzt man diesen gleich Null, darin $y=\gamma$, und bestimmt sofort aus dieser Gleichung die dem Werthe $y=\gamma$ zukommenden oder correspondirenden n Werthe von x.

Beispiel.

Für die Gleichungen:

$$x^2+(y+2)x-6y^2-4y=0 \ (A=0)$$
$$x^2+3x-y^2-5y-4=0 \ (A'=0)$$

erhält man, wenn wieder das erste Polynom (A) zum Dividend genommen wird, als ersten Rest:

$$(y-1)x - 5y^2 + y + 4 \; (R).$$

Wird hierauf das zweite Polynom (A'), als neuer Dividend (wenn man nämlich übersehen sollte, daſs dieser erste Rest (R) den gemeinschaftlichen Factor $y-1$ besitzt, oder durch diesen absichtlich nicht abkürzen will), mit $(y-1)^2$ multiplicirt, so erhält man nach einer zweimaligen Division den von x unabhängigen Rest:

$$24y^4 + 2y^3 - 52y^2 + 2y + 24 \; (R_1 = R_n),$$

welcher gleich Null gesetzt, die Endgleichung liefert, aus der man für y sofort die Werthe erhält: $y = -\frac{3}{4}, \; -\frac{4}{3}, \; 1, \; 1.$

Aus dem Reste des ersten Grades (R) folgt aber, wenn dieser Null gesetzt wird:

$$x = \frac{5y^2 - y - 4}{y-1};$$

es ist daher für $y = -\frac{3}{4}$: $x = \frac{1}{4}$, für $y = -\frac{4}{3}$: $x = -\frac{8}{3}$, und für $y = 1$: $x = \frac{0}{0}$, ein Beweis, daſs dem Werthe $y = 1$ mehrere Werthe von x entsprechen. Geht man also mit diesem Werth von $y = 1$ in den Rest des zweiten Grades, d. i. in den vorhergehenden Divisor (A'), welcher Null gesetzt, sofort die Gleichung liefert:

$$x^2 + 3x - 10 = 0;$$

so erhält man daraus (für diesen Werth von $y = 1$) $x = 2$ und -5.

Die sämmtlichen Auflösungen für dieses Beispiel sind demnach:

$$\left.\begin{matrix} x = +\frac{1}{4} \\ y = -\frac{3}{4} \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x = -\frac{8}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x = +2 \\ x = -5 \\ y = +1 \end{matrix}\right\} \left(\text{d. i.} \left.\begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 \end{matrix}\right\} \text{und} \left.\begin{matrix} x = -5 \\ y = +1 \end{matrix}\right\} \right)$$

Anmerk. Trägt man Sorge, alle in den als Divisoren geltenden Polynomen, gemeinschaftlichen Factoren, unter der Vorsicht wegzustreichen, daſs man diese am Ende gemäſs des vorigen Paragraphes wieder gehörig in Rechnung bringt; so kommen jene Werthe von y, für welche der Rest des ersten Grades, oder überhaupt mehrere vorhergehende, verschwinden, in der Endgleichung niemals vor.

So besitzt in diesem Beispiele der erste Rest (R) den gemeinschaftlichen Factor $y-1$; kürzt man durch denselben früher ab, bevor man diesen Rest zum Divisor nimmt, so erhält man zuletzt die Endgleichung $24y^2+50y+24=0$, in welcher sofort der Factor $(y-1)^2$, der (wenn er Null gesetzt wird) jenen Werth $y=1$ liefert, für welchen der Rest des ersten Grades verschwindet, nicht mehr vorkommt. Diese unvollständige Endgleichung gibt jetzt bloſs die Werthe $y=-\frac{3}{4}$ und $-\frac{4}{3}$, für welche, wie vorhin, aus dem Reste des ersten Grades (diesen gleich Null gesetzt) $x=\frac{1}{4}$ und $-\frac{8}{3}$ folgt. Der weggelassene Factor gibt, wenn er Null gesetzt wird, $y=1$, und dafür wird aus dem betreffenden Dividend (A') (§. 75.), wenn er gleich Null gesetzt wird, $x=2$ und -5. Man sieht daraus zugleich die vollkommene Uebereinstimmung in dem Verfahren dieser beiden letzten Fälle 2. und 3. Auch kann zur Uebung noch das Beispiel des vorigen Paragraphs auf die in dem gegenwärtigen Paragraphe angegebene Weise behandelt werden.

§. 77.

4. Der von x unabhängige Rest kann auch erstens entweder absolut gleich Null, oder zweitens gleich einer algebraischen oder numerischen Gröſse ohne y seyn.

Im ersten Falle enthalten die beiden Polynome A und A' schon an und für sich, ohne daſs man erst der Gröſse y besondere Werthe geben darf, einen gemeinschaftlichen Factor in x; und es sind sofort die gegebenen Gleichungen $A=0$, $A'=0$ unbestimmt. Denn es sey F dieser gemeinschaftliche Factor und $A=FB$, $A'=FB'$; so werden offenbar die beiden Gleichungen $A=0$, $A'=0$, wenn F eine Function von x und y ist, für alle unzähligen aus der Gleichung $F=0$ für x und y hervorgehenden Werthe realisirt. Ist F bloſs eine Function von x, so hat man zwar eine begrenzte Anzahl Werthe von x, aber doch noch unendlich viele Werthe für y.

Im zweiten Falle, in welchem eine bestimmte oder numerische Zahl gleich Null seyn müſste, stehen die beiden gegebenen Gleichungen im Widerspruche, und lassen also keine Auflösung zu.

Beispiel 1.

Für die Gleichungen:

$$x^2 - (3y - 1)x + 2y^2 - y = 0 \quad (A = 0)$$
$$x^2 - (4y - 2)x + 3y^2 - 2y = 0 \quad (A' = 0)$$

erhält man als ersten Rest:

$$(y - 1)x - y(y - 1),$$

und dieser ist, wenn man den gemeinschaftlichen Factor $y - 1$ wegläſst, also $x - y$ zum zweiten Divisor nimmt, in seinem Dividend (A') genau enthalten, so, daſs kein Rest weiter bleibt, und also $x - y$ der gemeinschaftliche Factor zwischen beiden Polynomen (A) und (A') ist. Man hat in der That:

$$A = (x - y)(x - 2y + 1) \quad \text{und} \quad A' = (x - y)(x - 3y + 2),$$

und es werden daher die gegebenen Gleichungen für alle Werthe von x und y befriediget, welche aus der Gleichung $x - y = 0$ hervorgehen; deren gibt es aber offenbar unendlich viele.

Beispiel 2.

Sind die Gleichungen gegeben:

$$x^2 - (2y - 3)x + y^2 - 3y + 2 = 0 \quad (A),$$
$$x^2 - (2y + 3)x + y^2 + 3y + 2 = 0 \quad (A'),$$

so erhält man (wenn stets das Polynom (A) zum Dividend genommen wird) als ersten Rest:

$$6x - 6y,$$

und als zweiten von x unabhängigen Rest: $+2$. Da dieser nun nicht Null werden oder verschwinden kann, so sind die beiden gegebenen Gleichungen mit einander unvereinbar, und es gibt für sie sofort keine Auflösung.

§. 78.

Ist man im Stande die beiden Polynome A und A' der gegebenen Gleichungen $A = 0$, $A' = 0$ in einfache Factoren zu zerlegen, welche allgemein genommen Functionen von x und y seyn werden; so können die sämmtlichen Auflösun-

gen ganz einfach gefunden werden. So lassen sich z. B. durch eine solche Zerlegung der Polynome, die Gleichungen $x^2+(y+2)x-6y^2-4y=0$ und $x^2+3x-y^2-5y-4=0$ des §. 76. auf folgende Art darstellen:

$$(x-2y)(x+3y+2)=0,$$
$$(x-y-1)(x+y+4)=0.$$

Verbindet man nun jeden Factor der ersten Gleichung mit jedem der zweiten, so erhält man folgende vier Systeme von Gleichungen:

$$\left.\begin{matrix}x-2y=0\\x-y-1=0\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x-2y=0\\x+y+4=0\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x+3y+2=0\\x-y-1=0\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x+3y+2=0\\x+y+4=0\end{matrix}\right\}$$

und diese nach der Reihe aufgelöst, geben sofort folgende Systeme der Auflösungen:

$$\left.\begin{matrix}x=2\\y=1\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}x=-\frac{8}{3}\\y=-\frac{4}{3}\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}x=+\frac{1}{4}\\y=-\frac{3}{4}\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}x=-5\\y=+1\end{matrix}\right\};$$

wie wir sie auch oben im angeführten Paragraphe gefunden haben.

Anmerk. 1. Die Theorie der symmetrischen Functionen bietet ebenfalls ein Mittel dar, die Elimination einer der beiden unbekannten Gröſsen aus zwei Gleichungen zu bewerkstelligen; indeſs ist die Anwendung dieser Eliminationsmethode in der Regel langwieriger, als die hier vorgetragene. Diese Methode beruht im Wesentlichen auf dem Satze, daſs wenn man mehrere Gleichungen $P_1=0$, $P_2=0$, $P_3=0\ldots$ von denselben unbekannten Gröſsen hat, deren Wurzeln respective α_1, $\beta_1\ldots$, α_2, $\beta_2\ldots$, α_3, $\beta_3\ldots$ u. s. w. sind, und man eine einzige Gleichung haben will, welche die nämlichen Wurzeln α_1, α_2, $\alpha_3\ldots$, β_1, β_2, $\beta_3\ldots$ u. s. w. und sonst keine besitzt: dazu nur das Product

$$P_1\times P_2\times P_3\ldots$$

gleich Null gesetzt werden darf.

Anmerk. 2. Ein weiteres bemerkenswerthes Eliminationsverfahren ist das *Euler*'sche *). (*Leonhard Euler*, Professor der

*) Man findet dasselbe im XIX. Capitel *(de intersectione Curvarum)* des zweiten Bandes seiner: »*Introductio in Analysin Infinitorum*, 2 *T. Lausannae* 1748.« 4. *Lacroix Élémens d'Algèbre* (11. *Edit. Paris* 1815, *p.* 265). *Crelle's* Lehrb. der Arithmetik und Algebra. Berlin 1825, S. 699 u. s. f.; und in vielen anderen Schriften.

Mathematik, Mitglied der kaiserl. Academie der Wissenschaften zu St. Petersburg, gewesener Director der königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin etc. etc.; geboren zu Basel 1707, gestorben zu Petersburg 1783.) Dieses besteht in Kürze darin, dafs man von den beiden gegebenen Gleichungen:

$$Px^m + Qx^{m-1} + Rx^{m-2} + \ldots + V = 0,$$
$$px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} + \ldots + v = 0,$$

die erste mit $px^{n-1} + ax^{n-2} + bx^{n-3} + \ldots + t$, und die zweite mit $Px^{m-1} + Ax^{m-2} + Bx^{m-3} + \ldots + T$ multiplicirt, die beiden Producte, und sodann in der entstehenden Gleichung auch die gleichnamigen Coefficienten einander gleich setzt (wodurch man also die Bedingung stellt, dafs die unbestimmten Coefficienten $a, b \ldots t, A, B \ldots T$ so bestimmt werden sollen, dafs sich alle Glieder, welche x enthalten, aufheben, und daher nur eine Gleichung ohne x übrig bleibt), und aus den entstehenden $n+m-1$ Gleichungen (die erste identische $Pp = Pp$ nicht mit gerechnet) die $n-1+m-1=n+m-2$ unbestimmten Gröfsen $a, b \ldots t, A, B \ldots T$, die weder unter einander noch mit sich selbst multiplicirt vorkommen, nach einer der bekannten Methoden (für Gleichungen des ersten Grades), z. B. der *Bézout*'schen, eliminirt. Da man nun eine Gleichung mehr hat, als unbestimmte Gröfsen vorhanden sind; so bleibt zuletzt eine Gleichung übrig, welche nur die Coefficienten der gegebenen beiden Gleichungen und kein x mehr enthält, also das Resultat der Elimination von x aus den gegebenen Gleichungen ist.

§. 79.

Was nun endlich die Bestimmung von mehr als zwei unbekannten Gröfsen aus mehreren Gleichungen betrifft, so wollen wir, um die Ideen festzusetzen, und da bei bestimmten Gleichungen oder Aufgaben immer eben so viele Gleichungen als unbekannte Gröfsen gegeben sind, drei Gleichungen mit den Unbekannten x, y, z voraussetzen. Wird jede dieser Gleichungen, wie in §. 72., nach der unbekannten Gröfse x geordnet, wobei die Coefficienten P_1, P_2 ... noch Functionen von y und z seyn werden, und nach der vorgetragenen Methode zwischen der ersten und zweiten, dann ersten und dritten, oder zweiten und dritten x eliminirt; so erhält man zwei Gleichungen mit den beiden Un-

bekannten y, z, welche wieder nach dem Obigen behandelt, die Werthe von y und z liefern, mit denen man sodann aus einer der drei ursprünglichen Gleichungen die correspondirenden Werthe von x bestimmen kann.

Man sieht deutlich genug, daſs es bei was immer für einer Anzahl von Gleichungen mit eben so vielen unbekannten Gröſsen, nur immer und wiederholt darauf ankommt, zwischen zwei Gleichungen, welche nach der nämlichen unbekannten Gröſse geordnet sind, diese letztere zu eliminiren; man wird aber auch eben so gut die groſse Schwierigkeit und Weitläufigkeit einsehen, welche bei diesen Rechnungen Statt finden können *).

Anmerk. Zur näherungsweisen Berechnung der irrationalen Wurzeln bedient man sich im Allgemeinen derselben Methoden, welche oben für die approximative Bestimmung der Wurzeln von Gleichungen mit Einer Unbekannten entwickelt wurden. Die *regula falsi*, welche sich überhaupt auf (algebraische oder transcendente) Gleichungen mit jeder beliebigen Anzahl von unbekannten Gröſsen ausdehnen läſst, liefert auch hier in den meisten Fällen eines der bequemsten und brauchbarsten Verfahren; wir wollen hier ihre Anwendung auf Gleichungen von zwei Unbekannten noch kurz erörtern.

Es seyen zur Auflösung die beiden Gleichungen gegeben:

$$X = Ax^{\alpha}y^{\beta} + Bx^{\gamma}y^{\delta} + \ldots = 0,$$

$$X' = A'x^{\alpha'}y^{\beta'} + B'x^{\gamma'}y^{\delta'} + \ldots = 0,$$

und man nehme an, daſs für die Substitutionen von $x = s_1$, $y = \sigma_1$, $x = s_2$, $y = \sigma_2$ und $x = s_3$, $y = \sigma_3$, X beziehungsweise in F_1, F_2, F_3, und eben so X' in F_1', F_2', F_3' übergehe, und daſs diese Substitutionen die vorliegenden Gleichungen schon nahe auf Null bringen, also die Fehler der Substitutionen $x - s_1 = d_1$, $y - \sigma_1 = \delta_1$, $x - s_2 = d_2$,

*) Auſser den oben angezogenen Werken kann man über diesen Gegenstand noch nachsehen: Garnier *Discussion des Racines ... et Élimination entre deux Équations de degrés quelconques à deux inconnues etc.* 2. *Edit. Paris* 1813. Dessen »*Analyse Algébrique.*« 2. *Edit. Paris* 1814. Abhandlungen der Berliner Academie, Bd. XXV., Jahrg. 1769: »Ueber die Elimination von *Lagrange*.« Bézout: »*Théorie général des équations algébriques.*« *Paris* 1779. *Journal de l'École Polytechnique*, 11 *Cahier* (Beweis von *Poisson*).

$y - \sigma_2 = \delta_2$, ... schon hinreichend klein sind, um bei einer blofsen Näherungsrechnung die zweiten und höhern Potenzen derselben vernachläfsigen zu können. Diefs vorausgesetzt, erhält man durch Substitution von $x = s_1 + d_1$ und $y = \sigma_1 + \delta_1$ in die beiden obigen Gleichungen ganz einfach (da auch die Verbindungen von $d_1\,\delta_1$ ausgelassen werden):

$$\begin{aligned} F_1 = {} & A s_1^\alpha \sigma_1^\beta + B s_1^\gamma \sigma_1^\delta + \ldots \\ & + (A\alpha s_1^{\alpha-1} \sigma_1^\beta + B\gamma s_1^{\gamma-1} \sigma_1^\delta + \ldots) d_1 \\ & + (A\beta s_1^\alpha \sigma_1^{\beta-1} + B\delta s_1^\gamma \sigma_1^{\delta-1} + \ldots) \delta_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F'_1 = {} & A' s_1^{\alpha'} \sigma_1^{\beta'} + B' s_1^{\gamma'} \sigma_1^{\delta'} + \ldots \\ & + (A'\alpha' s_1^{\alpha'-1} \sigma_1^{\beta'} + B'\gamma' s_1^{\gamma'-1} \sigma_1^{\delta'} + \ldots) d_1 \\ & + (A'\beta' s_1^{\alpha'} \sigma_1^{\beta'-1} + B'\delta' s_1^{\gamma'} \sigma_1^{\delta'-1} + \ldots) \delta_1. \end{aligned}$$

Bezeichnet man Kürze halber die in den Klammern stehenden Polynome der Reihe nach durch P, Q, P', Q', setzt für d_1 und δ_1 die obigen Werthe, und berücksichtigt endlich, dafs zufolge der gegebenen Gleichungen die erste Zeile in F_1 und F'_1 Null ist; so erhält man:

$$-F_1 = P(x - s_1) + Q(y - \sigma_1),$$
$$-F'_1 = P'(x - s_1) + Q'(y - \sigma_1);$$

ferner genau eben so:

$$-F_2 = P(x - s_2) + Q(y - \sigma_2),$$
$$-F'_2 = P'(x - s_2) + Q'(y - \sigma_2),$$
und
$$-F_3 = P(x - s_3) + Q(y - \sigma_3),$$
$$-F'_3 = P'(x - s_3) + Q'(y - \sigma_3).$$

Bestimmt man aus diesen sechs Gleichungen x und y, indem man dabei P, P', Q, Q' eliminirt, so erhält man:

$$x = \frac{(s_2 - s_1)(F_3 F'_1 - F_1 F'_3) + (s_3 - s_1)(F_1 F'_2 - F_2 F'_1)}{(F_1 F'_2 - F_2 F'_1) + (F_2 F'_3 - F_3 F'_2) + (F_3 F'_1 - F_1 F'_3)} + s_1 \quad (1$$

$$y = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)(F_3 F'_1 - F_1 F'_3) + (\sigma_3 - \sigma_1)(F_1 F'_2 - F_2 F'_1)}{(F_1 F'_2 - F_2 F'_1) + (F_2 F'_3 - F_3 F'_2) + (F_3 F'_1 - F_1 F'_3)} + \sigma_1 \quad (2$$

als genauere Werthe für x und y.

In Bezug auf die wiederholte Anwendung dieser Formeln gilt dasselbe, was oben in §. 66. (Note) bei der Anwendung der *regula falsi* auf Gleichungen mit Einer Unbekannten bemerkt wurde.

Beispiel. Es seyen aus den beiden Gleichungen

$$X = x^3 + xy^2 - 5 = 0 \quad \text{und} \quad X' = y^3 + yx^2 - 3 = 0$$

die Werthe von x und y näherungsweise zu berechnen.

Man findet ganz leicht

$$\left.\begin{array}{l}\text{für } x = s_1 = 1{\cdot}53\\ \text{und } y = \sigma_1 = 0{\cdot}93\end{array}\right\}: \begin{array}{l}F_1 = -\,{\cdot}095126,\\ F'_1 = -\,{\cdot}018606;\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{für } x = s_2 = 1{\cdot}55\\ \text{und } y = \sigma_2 = {\cdot}94\end{array}\right\}: \begin{array}{l}F_2 = +\,{\cdot}093455,\\ F'_2 = +\,{\cdot}088934;\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{für } x = s_3 = 1{\cdot}54\\ \text{und } y = \sigma_3 = {\cdot}92\end{array}\right\}: \begin{array}{l}F_3 = -\,{\cdot}044280,\\ F'_3 = -\,{\cdot}039440;\end{array}$$

und wenn man diese Werthe in die obigen Formeln (1 und (2 substituirt, so erhält man die ersten verbesserten Werthe:

$$x = 1{\cdot}543387 \text{ und } y = {\cdot}925967.$$

Eben so ist weiters

$$\left.\begin{array}{l}\text{für } x = s_1 = 1{\cdot}543387\\ \text{und } y = \sigma_1 = {\cdot}925967\end{array}\right\}: \begin{array}{l}F_1 = -\,{\cdot}00026216,\\ F'_1 = -\,{\cdot}00036850;\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{für } x = s_2 = 1{\cdot}543395\\ \text{und } y = \sigma_2 = {\cdot}926106\end{array}\right\}: \begin{array}{l}F_2 = +\,{\cdot}00019492,\\ F'_2 = +\,{\cdot}00034307;\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{für } x = s_3 = 1{\cdot}543394\\ \text{und } y = \sigma_3 = {\cdot}926041\end{array}\right\}: \begin{array}{l}F_3 = +\,{\cdot}00000540,\\ F'_3 = +\,{\cdot}00001814;\end{array}$$

und wenn man diese Werthe abermals in den obigen Formeln (1 und (2 substituirt, so erhält man die genauern Werthe:

$$x = 1{\cdot}54339467 \text{ und } y = {\cdot}92603695,$$

wofür bereits $X = -\,{\cdot}000000818$ und $X' = -\,{\cdot}0000000022$ der Wahrheit ($= 0$) schon sehr nahe ist.

Wollte man die Genauigkeit noch weiter treiben, und bei einer dritten Substitution $s_1 = 1{\cdot}54339482$, $\sigma_1 = {\cdot}92603691$, $s_2 = 1{\cdot}54339478$, $\sigma_2 = {\cdot}92603686$ und $s_3 = 1{\cdot}54339480$, $\sigma_3 = {\cdot}92603688$ setzen, wofür $F_1 = {\cdot}0^6 2699$, $F'_1 = {\cdot}0^6 2201$, $F_2 = -\,{\cdot}0^6 1934$, $F'_2 = -\,{\cdot}0^6 1423$ und $F_3 = {\cdot}0^7 239$, $F'_3 = {\cdot}0^7 141$ würde; so fände man dadurch noch genauer:

$$x = 1{\cdot}54339479768 \text{ und } y = {\cdot}92603687859;$$

mit diesen Werthen wird $X = {\cdot}0^8 171$ und $X' = {\cdot}0^9 5$, so, daſs also erst in der neunten und zehnten Decimalstelle eine Abweichung Statt findet.

Viertes Capitel.

Von den Reihen im Allgemeinen.

§. 80.

Erklärungen.

1. Eine Folge von Gröſsen, nach einem bestimmten Gesetze gebildet, heiſst eine Reihe; die Gröſsen selbst werden Glieder der Reihe genannt.

2. Wir werden die Glieder einer Reihe durch a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$, a_{n+1}, ... bezeichnen, also die Stelle, welche jedes Glied in der Reihe einnimmt, durch den angehängten Zeiger angeben. Laufen die Glieder ohne Ende fort, so heiſst die Reihe eine unendliche.

3. Sind die einzelnen Glieder selbst wieder Reihen, so erhält man Doppelreihen, welche mit den einfachen analog, auf folgende Art bezeichnet werden:

$$\begin{array}{l} a_{1,1},\ a_{1,2},\ a_{1,3},\ \ldots\ a_{1,n}, \\ a_{2,1},\ a_{2,2},\ a_{2,3},\ \ldots\ a_{2,n}, \\ a_{3,1},\ a_{3,2},\ a_{3,3},\ \ldots\ a_{3,n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1},\ a_{m,2},\ a_{m,3},\ \ldots\ a_{m,n}, \end{array}$$

dabei bilden die horizontalen mit den verticalen Reihen die Doppelreihe. Eben so kann man 2, 3, ... r fache Reihen haben.

4. Ein allgemeiner Ausdruck, mittelst welchen jedes Glied einer Reihe, wie a_n, entweder durch mehrere vorhergehende Glieder a_{n-1}, a_{n-2}, ... ausgedrückt, oder als bloſse Function von n dargestellt wird, heiſst das allgemeine Glied der Reihe; im ersten Falle wird es durch Recursion, und im letztern unabhängig (independent) erhalten.

5. Ein Ausdruck S_n hingegen, welcher, wenn man darin $n = 1, 2, \ldots m$ setzt, die Summe des ersten, der beiden ersten u. s. w., der m ersten Glieder der Reihe an-

gibt, heifst das summatorische Glied der Reihe, oder die Summenformel für dieselbe. Ist a_n das allgemeine Glied einer Reihe, so bezeichnet man das summatorische Glied derselben Reihe oft auch durch $\int(a_n)$.

6. Kann man sich bei der Berechnung von

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

dem wahren Werthe einer Reihe um so mehr nähern, je gröfser man n nimmt, d. i. je mehr erste Glieder man beibehält, und kann man dadurch bei einer unendlichen Reihe dem wahren Werthe überhaupt so nahe kommen als man nur immer will; so sagt man die Reihe convergire oder sie sey summirbar. Im Gegentheil wird sie divergent, in gewissen Fällen auch unbestimmt genannt. Oder mit andern Worten, gibt es bei dem unendlichen Wachsen von n eine bestimmte endliche Grenze G, welcher sich S_n unendlich nähert, so ist die Reihe convergent und G ihre Summe. Gibt es keine solche Grenze, so ist die Reihe divergent.

7. Läfst sich jedes Glied einer Reihe aus einem oder mehreren vorhergehenden Gliedern nach einem und demselben Gesetze bilden oder herleiten, so wird die Reihe eine wiederholende oder recurrirende genannt.

§. 81.

Wir wollen nun sogleich, bevor wir auf die besondern Reihen übergehen, folgende auf alle Reihen überhaupt sich erstreckende Aufgabe auflösen.

Aufgabe.

Aus dem summatorischen Glied einer Reihe das allgemeine Glied und die Reihe selbst zu finden.

Auflösung.

Da man offenbar das n^{te} Glied einer Reihe erhält, wenn man von der Summe der ersten n Glieder dieser Reihe die Summe aus den ersten $n-1$ Gliedern abzieht; so hat man

$a_n = S_n - S_{n-1}$. Aus diesem n^{ten} oder allgemeinen Gliede erhält man dann ferner die Reihe selbst, indem man in diesem nach und nach $n = 1, 2, 3 \ldots m$ setzt, und so das $1^{ste}, 2^{te}, 3^{te}, \ldots m^{te}$ Glied der Reihe bestimmt.

Beispiel 1.

Es sey $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ das summatorische Glied einer Reihe; so ist $S_{n-1} = \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ (wenn man nämlich in S_n statt n, $n-1$ setzt), folglich das allgemeine Glied:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\text{oder} \quad a_n = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}.$$

Aus diesem allgemeinen Gliede hat man ferner für $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ der Reihe nach die Glieder:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 \ldots$$

welche sofort die gesuchte Reihe bilden.

Beispiel 2.

Es sey das summatorische Glied einer Reihe:

$$S_n = \frac{n}{a(a+nd)}.$$

Dafür ist

$$a_n = \frac{n}{a(a+nd)} - \frac{n-1}{a(a+nd-d)} = \frac{1}{[a+(n-1)d][a+nd]},$$

und aus diesem allgemeinen Gliede erhält man für $n = 1, 2, 3 \ldots$ die Reihe selbst:

$$\alpha) \ldots \frac{1}{a(a+d)} + \frac{1}{(a+d)(a+2d)} + \frac{1}{(a+2d)(a+3d)} + \ldots = S_n.$$

Setzt man in der Summenformel S_n, $n = \infty$, so erhält man für die Summe dieser Reihe α), wenn sie ohne Ende fortläuft: $S_\infty = \frac{1}{ad}$.

a) Setzt man in der Reihe α), um daraus besondere Reihen zu finden, $a = 1$ und $d = 1$; so erhält man:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Für $n=\infty$ wird die Summe der unendlichen Reihe $=1$.

b) Setzt man dagegen $a=1$ und $d=2$, so folgt:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

Für $n=\infty$ wird die Summe der unendlichen Reihe $=\frac{1}{2}$.

Auf dieselbe Art lassen sich noch unzählige besondere Reihen aus jener α) ableiten.

Beispiel 3.

Es sey das summatorische Glied einer Reihe:

$$S_n=\frac{n[2a+(n+1)d]}{2a(a+d)(a+nd)[a+(n+1)d]}.$$

Dafür wird, nach demselben Vorgange, und nach einer einfachen Reduction:

$$a_n=\frac{1}{[a+(n-1)d][a+nd][a+(n+1)d]};$$

folglich ist die Reihe selbst:

$$\beta)\ldots\ \frac{1}{a(a+d)(a+2d)}+\frac{1}{(a+d)(a+2d)(a+3d)}+\ldots+a_n=S_n.$$

Für $n=\infty$ wird die Summe der unendlichen Reihe:

$$S_\infty=\frac{1}{2ad(a+d)}.$$

a) Für $a=1$ und $d=1$ hat man aus dieser Reihe β):

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Die Summe der unendlichen Reihe findet man $=\frac{1}{4}$.

Eben so kann man aus β) noch unzählig viele andere specielle Reihen ableiten.

Beispiel 4.

Es sey endlich noch die Summenformel einer Reihe:

$$S_n=\frac{(A+B+C+\ldots)(A+2B+4C)\ldots(A+nB+n^2C+\ldots)-1}{(A+B+C+\ldots)(A+2B+4C)\ldots(A+nB+n^2C+\ldots)},$$

so ist dafür, wie man leicht findet:

$$\gamma)\ldots\ a_n=\frac{-1+A+nB+n^2C+n^3D+\ldots}{(A+B+C+\ldots)(A+2B+4C+\ldots)\ldots(A+nB+n^2C+\ldots)}$$

Aus diesem allgemeinen Gliede kann wieder leicht die Reihe selbst hergeleitet werden.

a) Für $C = D = \ldots = 0$ hat man

$$a_n = \frac{A - 1 + nB}{(A+B)(A+2B)(A+3B)\ldots(A+nB)};$$

oder, wenn man, um eine einfachere Form zu erhalten, $A = a - d + 1$ und $B = d$ setzt:

$$a_n = \frac{a + (n-1)d}{(1+a)(1+a+d)(1+a+2d)\ldots[1+a+(n-1)d]}$$

als allgemeines Glied der Reihe

$$\frac{a}{1+a} + \frac{a+d}{(1+a)(1+a+d)} + \frac{a+2d}{(1+a)(1+a+d)(1+a+2d)} + \ldots$$

aa) Setzt man in dieser letzten Reihe $a = 1$ und $d = 1$, so entsteht die Reihe:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2.3} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{4}{2.3.4.5} + \ldots + \frac{n}{2.3\ldots(n+1)}$$
$$= \frac{2.3\ldots(n+1) - 1}{2.3\ldots(n+1)}.$$

Es ist wieder leicht zu sehen, daſs sich je nach der verschiedenen Annahme von A, B, C, ... aus γ) unzählig verschiedene Reihen ableiten lassen, deren Summen sämmtlich gegeben sind.

Zusatz.

Aus dieser Ableitung des allgemeinen Gliedes einer Reihe aus dem summatorischen, folgt zugleich der nachstehende Satz: Hat das summatorische Glied einer Reihe die Form

$$S_n = An + Bn^2 + Cn^3 + \ldots + Pn^{m+1} \text{ *)},$$

*) Weil die Summe einer jeden Reihe für $n = 0$ verschwinden muſs, indem man dafür die Summe von keinem Gliede hat; so kann das summatorische Glied kein von n freies Glied enthalten. Anders verhält es sich, wie es auch das obige Ergebniſs für a_n *a posteriori* zeigt, bei dem allgemeinen Gliede, in welchem n nicht nur den Werth Null, sondern selbst auch negative Werthe erhalten kann, indem man sich dabei nur die Reihe nach der entgegengesetzten Seite fortgesetzt denken darf. Da aber für jeden solchen Werth von n das betreffende Glied der Reihe entstehen

so ist das allgemeine Glied derselben Reihe von der Form:

$$a_n = a + bn + cn^2 + \ldots + pn^m.$$

Arithmetische Reihen.

a) Differenzen-Reihen.

§. 82.

Erklärung.

Zieht man in der Reihe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n,\ a_{n+1},\ \ldots$$

von irgend einem Gliede das nächst vorhergehende ab, so heifst dieser Unterschied die erste Differenz dieses letztern oder abgezogenen Gliedes, und wird durch Vorsetzung des Differenzzeichens Δ, welchem man noch, der folgenden Differenzen wegen, den Zeiger oder Ordnungsexponenten 1 beifügen kann, bezeichnet. Es ist nämlich

$$a_2 - a_1 = \Delta^1 a_1,\ a_3 - a_2 = \Delta^1 a_2,\ \ldots\ a_{n+1} - a_n = \Delta^1 a_n.$$

Auf diese Weise erhält man die erste Differenzreihe:

$$\Delta^1 a_1,\ \Delta^1 a_2,\ \Delta^1 a_3,\ \ldots\ \Delta^1 a_n,\ \Delta^1 a_{n+1},\ \ldots$$

Verfährt man in dieser wie in der ursprünglichen Reihe, so erhält man die ersten Differenzen der ersten Differenzen, d. i. die zweiten Differenzen der Glieder der ursprünglichen Reihe. Man schreibt nämlich:

$$\Delta^1 a_2 - \Delta^1 a_1 = \Delta^1(\Delta^1 a_1) = \Delta^2 a_1,\ \ldots$$
$$\Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = \Delta^1 \Delta^1 a_n = \Delta^2 a_n.$$

Diese der Reihe nach entstehenden zweiten Differenzen

mufs, so ist nicht nothwendig für $n = 0$ auch das entsprechende Glied $= 0$, sondern diefs findet nur in einigen besondern Fällen Statt. So ist z. B. in der Reihe 3, 4, 5..., wenn 3 das 1ste Glied ist, 2 das 0te; in jener 1, 3, 5, 7... ist —1 das dem Zeiger 0 entsprechende Glied.

bilden die zweite Differenzreihe:

$$\Delta^2 a_1,\ \Delta^2 a_2,\ \Delta^2 a_3,\ \ldots\ \Delta^2 a_n\ \ldots,$$

aus welcher sofort wieder durch dasselbe Verfahren die dritten Differenzen der Glieder der ursprünglichen Reihe entstehen oder gebildet werden, indem man hat:

$$\Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n = \Delta^1(\Delta^2 a_n) = \Delta^2(\Delta^1 a_n) = \Delta^3 a_n.$$

Auf die nämliche Art gelangt man zu den 4ten, 5ten, ... mten Differenzen der Glieder der ursprünglichen Reihe.

Sind die ersten Differenzen der Glieder einer Reihe einander gleich, oder was dasselbe ist, besteht die erste Differenzreihe aus durchgehends gleichen Gliedern, so heifst die ursprüngliche Reihe eine arithmetische der ersten Ordnung oder des ersten Grades. Eben so wird die Reihe eine arithmetische des 2ten, 3ten, ... mten Grades genannt, wenn beziehungsweise erst die 2ten, 3ten, ... mten Differenzen der Glieder dieser Reihe einander gleich sind, oder wenn die 2te, 3te, ... mte Differenzreihe aus durchaus gleichen Gliedern besteht.

Wir wollen uns zunächst mit der Auflösung von folgenden wichtigen Aufgaben beschäftigen: 1stens die Δ^m ~~und~~ a_n durch die Glieder a_1, a_2, a_3 ... der gegebenen Reihe, 2tens a_n und 3tens S_n durch das erste Glied a_1 und die auf einander folgenden Differenzen desselben: $\Delta^1 a_1$, $\Delta^2 a_1$... auszudrücken.

§. 83.

Aufgabe.

Eine beliebige Differenz irgend eines Gliedes der gegebenen Reihe $a_1, a_2, a_3 \ldots$, nämlich $\Delta^m a_n$ zu bestimmen.

Auflösung.

Es ist zufolge des vorhergehenden Paragraphes:

$$\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n = (-1)^1 (a_n - a_{n+1}).$$

Ferner

$$\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = a_{n+2} - a_{n+1} - (a_{n+1} - a_n)$$
$$= a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n;$$

also:

$$\Delta^2 a_n = (-1)^2 (a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2}).$$

Weiters ist

$$\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+2} - \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_{n+1} + \Delta^1 a_n$$
$$= \Delta^1 a_{n+2} - 2\Delta^1 a_{n+1} + \Delta^1 a_n$$
$$= a_{n+3} - a_{n+2} - 2(a_{n+2} - a_{n+1}) + a_{n+1} - a_n$$
$$= a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n;$$

folglich

$$\Delta^3 a_n = (-1)^3 (a_n - 3a_{n+1} + 3a_{n+2} - a_{n+3}).$$

Setzt man nun nach diesem deutlich ausgesprochenen Gesetze

$$\Delta^m a_n = (-1)^m \left[a_n - m a_{n+1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} a_{n+2} - \ldots \pm a_{n+m}\right]. \text{ (I}$$

so hat man ferner, wegen

$$\Delta^{m+1} a_n = \Delta^m a_{n+1} - \Delta^m a_n,$$

wenn man nach dieser Formel (I substituirt:

$$\Delta^{m+1} a_n = (-1)^m \left[a_{n+1} - m a_{n+2} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} a_{n+3} - + \ldots\right]$$
$$- (-1)^m \left[a_n - m a_{n+1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} a_{n+2} - + \ldots\right]$$
$$= (-1)^{m+1} \left[a_n - (m+1) a_{n+1}\right.$$
$$\left. + \frac{(m+1)m}{1\,.\,2} a_{n+2} - + \ldots \mp a_{n+m+1}\right].$$

Da nun das nämliche Resultat auch aus der vorigen Formel (I erhalten wird, wenn man in dieser statt m, $m+1$ setzt; so beweist diefs, dafs wenn die Formel (I für irgend einen Werth von m richtig ist, diese auch noch für den nächst folgenden $m+1$ gelten müsse. Nun ist sie aber, wie man sieht, für $m=2$ oder $m=3$ richtig, folglich ist sie es auch für $3+1=4$, und da diefs der Fall ist, wieder für $4+1=5$ u. s. w., d. h. die vorhin durch (gemeine) Induction gefundene Formel (I gilt für jeden ganzen positiven Werth von m.

Anmerk. 1. Um die Differenz $\Delta^m a_n$ durch vorhergehende oder niedrigere Differenzen auszudrücken, hat man auch, wie sich aus der vorigen Entwickelung der speciellen Fälle leicht

ergibt:

$$\Delta^m a_n = (-1)^1 [\Delta^{m-1} a_n - \Delta^{m-1} a_{n+1}]$$
$$= (-1)^2 [\Delta^{m-2} a_n - 2\Delta^{m-2} a_{n+1} + \Delta^{m-2} a_{n+2}] = \text{etc.}$$
$$= (-1)^r \Big[\Delta^{m-r} a_n - r\Delta^{m-r} a_{n+1}$$
$$+ \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} \Delta^{m-r} a_{n+2} - + \ldots \pm \Delta^{m-r} a_{n+r} \Big].$$

Für $r = m$ entsteht der obige Ausdruck (I selbst, weil $\Delta^0 a_n = a_n$ ist.

Anmerk. 2. Werden in der Formel (I die Glieder der Reihe in umgekehrter Ordnung geschrieben, so erhält man auch mit der einfachen Bezeichnung der Binomial-Coefficienten (§. 14.):

$$\text{I}') \ldots \Delta^m a_n = a_{n+m} - \binom{m}{1} a_{n+m-1} + \binom{m}{2} a_{n+m-2}$$
$$- \binom{m}{3} a_{n+m-3} + \ldots \pm a_n.$$

Anmerk. 3. Wie man sieht, wird die $m+1^{\text{te}}$ Differenz auch gefunden, indem man von jedem Gliede der Entwickelung (I, der m^{ten} Differenz, noch ein Mal die Differenz, und zwar so nimmt, dafs die Coefficienten, als unveränderliche Gröfsen, gleich vor das Differenzzeichen gesetzt werden, und dieses sich also nur unmittelbar auf die Glieder a_n, $a_{n+1} \ldots$ bezieht. Es ist nämlich vom Zeichen $(-1)^m$ vorläufig abstrahirt:

$$\Delta(\Delta^m a_n) = \Delta \Big[a_n - \binom{m}{1} a_{n+1} + \binom{m}{2} a_{n+2} - \binom{m}{3} a_{n+3} + \ldots \Big]$$
$$= \Delta a_n - \binom{m}{1} \Delta a_{n+1} + \binom{m}{2} \Delta a_{n+2} - \ldots$$
$$= a_{n+1} - a_n - \binom{m}{1} (a_{n+2} - a_{n+1})$$
$$+ \binom{m}{2} (a_{n+3} - a_{n+2}) - \text{etc.}$$
$$= (-1)^1 \Big[a_n - (m+1) a_{n+1} + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} a_{n+2} - \ldots \Big];$$

man erhält also endlich, mit Berücksichtigung des weggelassenen Factors $(-1)^m$, auf diese Weise für $\Delta^{m+1} a_n$ genau wieder den oben für diese Differenz gefundenen Ausdruck.

§. 84.

Aufgabe.

Das allgemeine Glied einer Reihe a_n durch

das erste a_1, und die Differenzen von a_1 auszudrücken.

Auflösung.

Aus den Entwickelungen des vorigen Paragraphs hat man unmittelbar:

$$a_2 = a_1 + \Delta^1 a_1 \text{ *)} \ldots (\alpha;$$

$$a_3 = a_2 + \Delta^1 a_2 = a_1 + \Delta^1 a_1 + \Delta^1 a_1 + \Delta^2 a_1 \text{ **)}$$
$$= a_1 + 2\Delta^1 a_1 + \Delta^2 a_1 \ldots (\beta;$$

$$a_4 = a_3 + \Delta^1 a_3 = a_2 + \Delta^1 a_2 + \Delta^1 a_2 + \Delta^2 a_2$$
$$= a_2 + 2\Delta^1 a_2 + \Delta^2 a_2$$
$$= a_1 + \Delta^1 a_1 + 2\Delta^1 a_1 + 2\Delta^2 a_1 + \Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1 \text{ ***)}$$
$$= a_1 + 3\Delta^1 a_1 + 3\Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1 \ldots (\gamma;$$

u. s. w.

Allgemein wird nach diesem in (α, (β, (γ sich aussprechenden Gesetze:

$$a_n = a_1 + (n-1)\Delta^1 a_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}\Delta^2 a_1$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 a_1 + \ldots + \Delta^{n-1} a_1 \ldots \text{(II}$$

Dabei kann die allgemeine Giltigkeit dieser Formel für jeden ganzen positiven Werth von n auf folgende Weise nachgewiesen werden.

Es ist (wegen $\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n$) $a_{n+1} = a_n + \Delta^1 a_n$, und wenn man diese Formel (II für irgend einen Werth von n gelten läſst, auch

$$a_{n+1} = \left[a_1 + \binom{n-1}{1}\Delta^1 a_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 a_1 + \ldots + \Delta^{n-1} a_1\right]$$
$$+ \Delta\left[a_1 + \binom{n-1}{1}\Delta^1 a_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 a_1 + \ldots + \Delta^{n-1} a_1\right]$$

oder (§. 83., Anmerk. 3.)

$$= \left\{\begin{array}{l} a_1 + (n-1)\Delta^1 a_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}\Delta^2 a_1 + \ldots + \Delta^{n-1} a_1 \\ + \qquad \Delta^1 a_1 + (n-1)\Delta^2 a_1 + \ldots + \Delta^n a_1 \end{array}\right\}$$

d. i. $$a_{n+1} = a_1 + n\Delta^1 a_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 a_1 + \ldots + \Delta^n a_1;$$

*) da $\Delta^1 a_1 = a_2 - a_1$ ist.

**) da $\Delta^2 a_1 = \Delta^1 a_2 - \Delta^1 a_1$ ist.

***) da $\Delta^3 a_1 = \Delta^2 a_2 - \Delta^2 a_1$ ist.

ein Resultat, welches auch unmittelbar aus der Formel (II erhalten wird, wenn man darin statt n, $n+1$ schreibt. Da also diese aus den Werthen von $n=2$, 3, 4 durch Induction erschlossene Formel (II, wie wir jetzt deutlich sehen, auch für $4+1=5$, und daher wieder für $5+1=6$ u. s. w. gilt; so ist ihre allgemeine Giltigkeit sofort für jeden ganzen positiven Werth von n erwiesen.

§. 85.

Aufgabe.

Das summatorische Glied S_n der Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

zu finden.

Auflösung.

Es ist (§. 80., Erkl. 5.)

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1 + \Delta^1 a_1 = 2a_1 + \Delta^1 a_1,$$
$$S_3 = S_2 + a_3 = 2a_1 + \Delta^1 a_1 + a_1 + 2\Delta^1 a_1 + \Delta^2 a_1 \; {}^{*)}$$
$$= 3a_1 + 3\Delta^1 a_1 + \Delta^2 a_1.$$

Setzt man nach diesem sich ergebenden Gesetze:

$$S_n = n a_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^1 a_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^2 a_1 + \ldots + \Delta^{n-1} a_1 \ldots \text{(III}$$

so erhält man wegen

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1},$$

wenn man diese Formel für S_n indeſs als richtig annimmt, und auch für a_{n+1} den Werth aus der Formel (II substituirt:

$$S_{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} n a_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^1 a_1 + \ldots + \Delta^{n-1} a_1 \\ a_1 + n \Delta^1 a_1 + \ldots + \Delta^n a_1 \end{array} \right\}$$
$$= (n+1) a_1 + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} \Delta^1 a_1 + \ldots + \Delta^n a_1.$$

*) wenn man für a_3 den Werth aus (β des vorigen Paragraphs substituirt.

Gilt also die Formel (III für irgend einen Werth von n, so gilt sie auch noch für den nächst folgenden $n+1$; diese hat also, da sie für $n=2, 3, 4$ richtig ist, allgemein für jeden ganzen positiven Werth von n Giltigkeit.

Anmerk. 1. Da für eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung (§. 82.) die 2ten, 3ten..., für eine der zweiten Ordnung die 3ten, 4ten..., für eine Reihe der mten Ordnung die $(m+1)$ten, $(m+2)$ten... Differenzen Null sind; so folgt, daſs die Formeln (II und (III, als die allgemeinen Ausdrücke für das allgemeine und summatorische Glied einer jeden arithmetischen Reihe, immer abbrechen, und je nach dem Grade der Reihe aus $2, 3, \ldots (m+1)$ Gliedern bestehen. Es ist nämlich für eine arithmetische Reihe der mten Ordnung:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,\Delta^1 a_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\,\Delta^2 a_1 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{1\,.\,2\,.\,\ldots\,.\,m}\,\Delta^m a_1;$$
$$S_n = n a_1 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,\Delta^1 a_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\Delta^2 a_1 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1\,.\,2\ldots(m+1)}\,\Delta^m a_1 \; *).$$

Denkt man sich in den Binomialfactoren die Multiplicationen verrichtet, und dann alles nach Potenzen von n geordnet; so erhalten diese beiden Ausdrücke offenbar die Form:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a + bn + cn^2 + \ldots\ldots + pn^m, \\ S_n &= An + Bn^2 + Cn^3 + \ldots + Pn^{m+1}, \end{aligned}\right\} \text{(A}$$

zu welchem Resultate wir auch schon im §. 81. (Zusatz) auf einem andern Wege gelangt sind. Wie man zugleich diese Kenntniſs der Form von a_n und S_n zur Berechnung des allgemeinen und summatorischen Gliedes einer vorgelegten Reihe benützen kann, werden wir weiter unten in einem Beispiele zeigen.

*) Diese beiden Formeln sind zwar für alle sowohl regel- wie unregelmäſsige Reihen ohne Ausnahme richtig, aber für die Nichtarithmetischen aus dem Grunde von keinem Nutzen, weil sie für solche Reihen nicht anders, als durch das Nullwerden eines der Schluſsfactoren der Binomial-Coefficienten abbrechen können; welches aber offenbar, wenn z. B. das mte oder die Summe aus m Gliedern einer solchen Reihe verlangt wird, fordert, daſs die ersten m Glieder dieser Reihe schon gegeben seyen.

Anmerk. 2. Aus der Entstehungsart der ersten der vorigen Gleichungen (*A* folgt offenbar, weil nämlich, je nach der Beschaffenheit der Reihe, die Gröfsen $\Delta^1 a_1$, $\Delta^2 a_1 \ldots$ die mannigfaltigsten Werthe besitzen können, dafs auch mehrere der Coefficienten a, b, $c \ldots$, selbst alle, bis ausschliefsend zum letzten p, Null seyn können. Daraus folgt also, dafs jeder Ausdruck von der Form $a + bn + cn^2 + \ldots + pn^m$, in welchem auch mehrere der ersten Glieder, ja selbst alle bis zum letzten fehlen können, als das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe der m^{ten} Ordnung angesehen werden kann.

a) Daraus ergibt sich nun unmittelbar, dafs die Potenzen der natürlichen Zahlen 1^m, 2^m, 3^m, ... n^m eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung bilden.

b) Eben so folgt auch ferner, dafs die m^{ten} Potenzen der Glieder der nachstehenden Reihe

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ \ldots\ a + (n-1)d,\ \ldots$$

ebenfalls eine arithmetische Reihe des m^{ten} Grades ausmachen; denn das allgemeine Glied derselben erhält die Form $[a + (n-1)d]^m = [(a-d) + dn]^m = \alpha + \beta n + \gamma n^2 + \ldots + \pi n^m$. So ist z. B. 3^2, 6^2, 9^2, 12^2, ..., d. i. 9, 36, 81, 144, ... eine arithmetische Reihe des zweiten Grades; denn man hat dafür 27, 45, 63, ... als erste, und 18, 18, ... als zweite Differenzreihe.

c) Ueberhaupt bilden, wie man aus der Form von a_n in (*A* sieht, die m^{ten} Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe der r^{ten} Ordnung eine arithmetische Reihe des mr^{ten} Grades.

d) Werden die gleichnamigen Glieder zweier oder mehrerer arithmetischen Reihen mit einander durch Addition oder Subtraction verbunden, so entsteht wieder eine arithmetische Reihe, deren Grad mit dem höchsten der verbundenen Reihen correspondirt. Denn ist $a + bn + \ldots + pn^m$ das allgemeine Glied der einen Reihe des m^{ten} Grades, und wenn $r > m$, $a' + b'n + \ldots + p'n^m + \ldots + tn^r$ das der andern Reihe des r^{ten} Grades; so ist das allgemeine Glied der durch Addition oder Subtraction aus diesen Reihen gebildeten:

$$(a' \pm a) + (b' \pm b)\,n + \ldots + (p' \pm p)\,n^m + \ldots + tn^r,$$

welches offenbar einer arithmetischen Reihe der r^{ten} Ordnung zukommt.

Daraus folgt also auch, dafs man sich das allgemeine Glied $a_n = a + bn + cn^2 + \ldots + pn^m$ einer arithmetischen Reihe der m^{ten} Ordnung als durch Summirung der allgemeinen Glie-

der von arithmetischen Reihen der 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten}, ... m^{ten} Ordnung entstanden denken kann.

e) Werden die correspondirenden Glieder mehrerer arithmetischen Reihen, welche respective von den Ordnungen p, q, r, ... sind, mit einander multiplicirt; so entsteht, wie man wieder leicht findet, eine arithmetische Reihe des $p+q+r+\ldots^{ten}$ Grades.

f) Endlich ersieht man auch noch aus den obigen Ausdrücken für a_n und S_n, dafs zur Bestimmung des allgemeinen und summatorischen Gliedes einer arithmetischen Reihe des m^{ten} Grades, oder um diese beliebig fortsetzen zu können, überhaupt $m+1$ Bestimmungsstücke gegeben seyn müssen; am gewöhnlichsten und einfachsten werden dafür die $m+1$ ersten Glieder der Reihe genommen.

Beispiele.

§. 86.

1. Um für die Reihe 2, 4, 9, 17, 28, 42... das allgemeine und summatorische Glied zu finden, hat man zuerst, wenn die Differenzen gesucht werden: 2, 5, 8, 11, 14... als erste, und 3, 3, 3, 3... als zweite Differenzenreihe; woraus also hervorgeht, dafs die gegebene Reihe eine arithmetische der zweiten Ordnung ist.

Da nun

$$a_1 = 2, \quad \Delta^1 a_1 = 2, \quad \Delta^2 a_1 = 3, \quad \Delta^3 a_1 = \Delta^4 a_1 = \ldots = 0$$

ist; so erhält man nach der obigen Formel (II:

$$a_n = 2 + (n-1)2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2}3 = \frac{3n^2 - 5n + 6}{2}$$

und nach jener (III:

$$S_n = 2n + \frac{n(n-1)}{2}2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \,.\, 3}3 = \frac{n(n^2 - n + 4)}{2}.$$

a) Um auch eine Anwendung der Ausdrücke *A*) (Anm. 1) des vorigen Paragraphes, durch welche blofs die Form von a_n und S_n gegeben ist, zu machen, wollen wir dasselbe Beispiel noch auf eine zweite Art behandeln.

Da die gegebene Reihe eine arithmetische der zweiten Ordnung ist, so hat das allgemeine Glied (nach Gl. *A*()

die Form $a_n = a + bn + cn^2$. Um die drei unbestimmten Gröfsen oder Coefficienten a, b, c, zu bestimmen, wird man den Umstand zur Bildung dreier Gleichungen benützen, dafs a_n für $n = 1, 2, 3$ beziehungsweise das erste, zweite, dritte Glied der gegebenen Reihe liefern, also die Werthe 2, 4 und 9 erhalten mufs. Man hat nämlich:

$2 = a + b + c$, $4 = a + 2b + 4c$ und $9 = a + 3b + 9c$.

Aus diesen drei Gleichungen findet man ganz einfach, z. B. mittelst der Eliminations-Methode: $c = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{5}{2}$ und $a = 3$; es ist also, wenn diese Werthe in dem vorigen Ausdruck von a_n substituirt werden, das gesuchte allgemeine Glied:

$$a_n = 3 - \frac{5n}{2} + \frac{3n^2}{2} = \frac{3n^2 - 5n + 6}{2},$$

wie zuvor.

b) Das summatorische Glied dieser Reihe hat die Form (zweite Gl. von A)):

$$S_n = An + Bn^2 + Cn^3.$$

Um die zur Bestimmung der unbestimmten Coefficienten A, B, C nöthigen drei Gleichungen aufzustellen, bemerke man, dafs für $n = 1, 2, 3$, S_n beziehungsweise die Werthe 2, 6, 15, als die respectiven Summen S_1, S_2, S_3 der gegebenen Reihe, erhalten müsse. Es ist nämlich:

$2 = A + B + C$, $6 = 2A + 4B + 8C$, $15 = 3A + 9B + 27C$;

und aus diesen Gleichungen folgt wieder ganz einfach:

$$C = \tfrac{1}{2},\quad B = -\tfrac{1}{2} \text{ und } A = 2.$$

Diese Werthe, in dem vorigen Ausdruck von S_n substituirt, geben für das summatorische Glied unserer Reihe:

$$S_n = 2n - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{2} = \frac{n(n^2 - n + 4)}{2},$$

wie vorhin.

2. Die Summenformel für die Reihe $1^3, 2^3, 3^3 \ldots n^3$, d. i. der Reihe 1, 8, 27, 64, 125... zu finden, hat man 7, 19, 37, 61... als erste, 12, 18, 24... als zweite und 6, 6... als dritte Differenzreihe, welche sofort aus gleichen Gliedern besteht; die gegebene Reihe ist nämlich

eine arithmetische des dritten Grades (vergl. Anmerk. 2, *a*) des vorigen Paragraphes).

Da nun hier

$$a_1 = 1, \quad \Delta^1 a_1 = 7, \quad \Delta^2 a_1 = 12 \text{ und } \Delta^3 a_1 = 6$$

ist, und alle folgenden, höhern Differenzen Null sind; so gibt die Formel (III. (§. 85.):

$$S_n = n + \frac{n(n-1)}{2}7 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}12 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}6,$$

oder, wie man nach einer einfachen Reduction findet:

$$S_n = \left[\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\right]^2 \text{ *)}.$$

b) Summen- oder figurirte Zahlenreihen.

§. 87.

Erklärung.

Kehrt man das im §. 82. erwähnte Verfahren um, und nimmt anstatt der wiederholten Differenzen die Summen der Glieder einer Reihe; so erhält man Summenreihen. Diese unterscheiden sich von den Differenzenreihen in nichts als in der Art ihrer Entstehung oder Bildung. Nimmt man nämlich irgend eine Reihe mit gleichen Gliedern und bildet die Summe aus dem ersten, aus dem ersten und zweiten, aus dem ersten, zweiten und dritten Gliede, u. s. w., so erhält man dadurch eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung. Verfährt man in dieser neuen Reihe auf die nämliche Art, so entsteht daraus wieder eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung, u. s. f. Man hat z. B., wenn man die Reihe 1, 1, 1, 1 . . . zum Grunde legt:

1 1 1 1 1 . . . Reihe mit gleichen Gliedern.
1 2 3 4 5 . . . arithm. Reihe der ersten Ordnung.

*) Zur Uebung kann man aus den in diesen Beispielen gefundenen summatorischen Gliedern, nach §. 81., die betreffenden allgemeinen Glieder, und daraus die Reihen selbst wieder herleiten.

1	3	6	10	15 . . .	arithm. Reihe der zweiten Ordnung.	
1	4	10	20	35 . . .	» » » dritten »	

u. s. w.

Man sieht leicht, daſs jede dieser Reihen, wenn davon das erste Glied weggelassen wird, die erste Differenzreihe der nächstfolgenden; wenn die zwei ersten Glieder ausgelassen werden, die zweite Differenzreihe der zweitfolgenden Reihe ist, u. s. w.

Die Zahlen 1, 3, 6, 10, 15... der dritten Reihe, welche also eine arithmetische der zweiten Ordnung ist, werden Dreieck- oder Trigonalzahlen (auch Triangularzahlen) genannt, weil man z. B. jede Anzahl von Puncten, die mit irgend einem Gliede dieser Reihe übereinstimmt, in gleichseitige Dreiecke ordnen kann.

Die Zahlen oder Glieder der vierten Reihe 1, 4, 10..., welche von der dritten Ordnung ist, werden dreiseitige Pyramidalzahlen genannt, weil man z. B. eine, oder vier, oder zehn Kugeln u. s. w. in regelmäſsige dreiseitige Pyramiden schlichten kann.

Legt man dagegen die Reihe 1, 2, 2, 2... zum Grunde, so erhält man eben so:

1	2	2	2	2	2	2	. . .
1	3	5	7	9	11	13	. . .
1	4	9	16	25	36	49	. . .
1	5	14	30	55	91	140	. . .

u. s. w.

Hier heiſsen aus einem ähnlichen Grunde die Zahlen 1, 4, 9, ... der dritten oder arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung Quadrat- oder Tetragonalzahlen; die Zahlen oder Glieder der vierten Reihe hingegen, die wieder von der dritten Ordnung ist, bilden die vierseitigen Pyramidalzahlen.

Legt man allgemein die Reihe 1, d, d, d..., wo d was immer für eine ganze positive Zahl bedeuten kann, zum Grunde, so erhält man die Reihen:

1	d	d	d	d . . .
1	$1+d$	$1+2d$	$1+3d$	$1+4d$. . .
1	$2+d$	$3+3d$	$4+6d$	$5+10d$. . .
1	$3+d$	$6+4d$	$10+10d$	$15+20d$. . .

Die sämmtlichen aus der dritten Reihe für verschiedene Werthe von d entspringenden Reihen, welche sofort alle arithmetisch des zweiten Grades sind, werden Vieleck- oder Polygonalreihen, ihre Glieder Vieleck-, vielseitige oder Polygonalzahlen genannt. Die aus der vierten Reihe hervorgehenden Reihen hingegen, welche sämmtlich von der dritten Ordnung sind, heifsen Pyramidalreihen, ihre Glieder Pyramidalzahlen. Die durch wiederholte Summirung entstandenen Reihen zusammengenommen heifsen figurirte Zahlenreihen, so, dafs auch die Glieder der zweiten Reihe figurirte Zahlen der ersten Ordnung, jene der dritten Reihe figurirte Zahlen der zweiten Ordnung u. s. w. genannt werden.

§. 88.

Die Polygonalzahlen, oder figurirte Zahlen der zweiten Ordnung.

Man hat also nach dem im vorigen Paragraphe Gesagten für die Reihe der Polygonalzahlen:

$$1,\ 2+d,\ 3+3d,\ 4+6d,\ 5+10d,\ \ldots$$

und für diese findet man nach den Formeln (II und (III (§. 84. und 85.) ganz einfach:

$$a_n = \frac{(2-d)\,n + d\,n^2}{2}$$

$$\text{und}\quad S_n = \frac{(3-d)\,n + 3n^2 + d\,n^3}{6}.$$

Für $d = m - 2$ erhält man die mEck- oder mseitigen Zahlen; diese bilden also die Reihe:

$$1,\ m,\ 3m-3,\ 6m-8,\ 10m-15,\ \ldots$$

für welche man sofort hat:

$$a_n = \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}$$

und $$S_n = \frac{(m-2)n^3 + 3n^2 - (m-5)n}{2.3}.$$

Man erhält also, wenn nach und nach $m = 3, 4, 5, 6, \ldots$ gesetzt wird, für die

3 Eckzahlen: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, . . .

dafür $a_n = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ und $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$;

4 Eckzahlen: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, . . .

dafür $a_n = n^2$ und $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$;

5 Eckzahlen: 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, . . .

dafür $a_n = \frac{n(3n-1)}{1 \cdot 2}$ und $S_n = \frac{n^2(n+1)}{1 \cdot 2}$;

u. s. w.

§. 89.

Die Pyramidalzahlen, oder figurirte Zahlen der dritten Ordnung.

Die Reihe der Pyramidalzahlen ist nach §. 87:

$$1,\ 3+d,\ 6+4d,\ 10+10d,\ 15+20d,\ \ldots$$

und für diese findet man wieder aus den erwähnten Formeln (II und (III:

$$a_n = \left(\frac{3-d}{6}\right)n + \tfrac{1}{2}n^2 + \frac{d}{6}n^3$$

und $$S_n = \left(\frac{4-d}{12}\right)n + \left(\frac{12-d}{24}\right)n^2 + \left(\frac{2+d}{12}\right)n^3 + \frac{d}{24}n^4.$$

Setzt man nach und nach $d = 1, 2, 3, \ldots m-2$, so erhält man beziehungsweise für die

3seitigen Pyramidalzahlen: 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, . . .

dafür $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ und $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$;

4seitigen Pyramidalzahlen: 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, . . .

dafür $a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ und $S_n = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 4}$;

5seitigen Pyramidalzahlen: 1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, . . .

dafür $a_n = \frac{n^2(n+1)}{1\,.\,2}$ und $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$;

. .

mseitigen Pyramidalzahlen: 1, $m+1$, $4m-2$, $10m-10$, . . .

dafür $a_n = \left(\frac{5-m}{6}\right)n + \frac{n^2}{2} + \left(\frac{m-2}{6}\right)n^3$

und $S_n = \left(\frac{6-m}{12}\right)n + \left(\frac{14-m}{24}\right)n^2 + \frac{m}{12}n^3 + \left(\frac{m-2}{24}\right)n^4$.

Allgemein lassen sich für die figurirte Zahlenreihe der r^{ten} Ordnung das allgemeine und summatorische Glied, wie man ohne Mühe findet, so darstellen:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots[n+(r-2)]}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots r}\,[r+(n-1)(m-2)], \\ S_n &= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots[n+(r-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots r(r+1)}\,[r+1+(n-1)(m-2)], \end{aligned}\right\}\ldots(B$$

wobei m die vorige Bedeutung hat.

So erhält man z. B. für die vierseitigen Pyramidalzahlen, welche zu den figurirten Zahlenreihen der dritten Ordnung gehören, $m=4$, $r=3$, also

$$a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3} \text{ und } S_n = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{1\,.\,3\,.\,4},$$

wie vorhin.

Ueberhaupt kann man nun leicht aus diesen allgemeinen Formeln (*B* für die auf einander folgenden Ordnungen der figurirten Zahlenreihen, indem man nach und nach $r=2, 3, 4, \ldots$ setzt, die allgemeinen und summatorischen Glieder [und zwar bequemer noch als aus jenen (I und (II] herleiten.

§. 90.

Die figurirten Zahlen überhaupt.

Aus dem Vorhergehenden erhält man nun für die auf einander folgenden Reihen der figurirten Zahlen ganz leicht:

$$1+1+1+1+\ldots+1 = n$$

$$1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}$$

$$1+3+6+10+\ldots+\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$1+4+10+20+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

. .

$$1+m+\frac{m(m+1)}{1\,.\,2}+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(m-1)}$$

$$=\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,m}.$$

Eben so kann man mit den erzeugenden Reihen

$1+2+2+\ldots$, $1+3+3+\ldots$ etc., $1+d+d+\ldots$

zu Werke gehen *).

Anmerk. Bildet man Brüche, deren Zähler die Einheit, und Nenner die auf einander folgenden figurirten Zahlen sind, wie z. B. $\frac{1}{1}+\frac{1}{n}+\frac{1\,.\,2}{n(n+1)}+\frac{1\,.\,2\,.\,3}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$, so erhält man die sogenannten umgekehrten figurirten Zahlen **).

§. 91.

Aufgaben.

Um von den Summenreihen eine Anwendung zu zeigen, wollen wir die nachstehenden Aufgaben auflösen.

*) Man sieht jetzt auch, dafs die im ersten Capitel bei den Gesetzen der Multiplication der Functionsreihen als mechanisches Hilfsmittel angeführten Zahlenreihen nichts anders, als die auf einander folgenden figurirten Reihen sind; und man könnte nun leicht auch jene Reihe bilden, welche zur Verification der Summe der Coefficienten der n^{ten} Potenz eines Polynoms dienen kann.

Uebrigens haben die figurirten Zahlenreihen heut zu Tage bei weitem nicht mehr jene Wichtigkeit, die ihnen von ältern Geometern beigelegt wurde. Sie sind, mit geringer Ausnahme, mehr ein arithmetisches Spielzeug, als von sonstigem grofsen Nutzen.

**) Wie die Summen dieser Bruchreihen: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$, $\frac{2}{1\,.\,2}+\frac{2}{2\,.\,3}+\frac{2}{3\,.\,4}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)}$, u. s. w. zu finden sind, so wie über mehreres andere hieher Gehörige, kann man auch nachsehen *Crelle's* Lehrb. der Arithm. und Algebra (12. Abschnitt).

Aufgabe 1.

Eine dreiseitige Kugelpyramide besteht aus n horizontalen Schichten; es soll die Anzahl der Kugeln, welche in der untersten Schichte oder Basis liegen, so wie jene der ganzen Pyramide angegeben werden.

Auflösung.

Da nach der Beschaffenheit einer solchen Pyramide in der ersten Schichte eine, in der zweiten drei, in der dritten sechs Kugeln u. s. w. liegen, diese Zahlen also die Reihe 1, 3, 6, 10, . . . bilden; so gibt das n^{te} Glied der Reihe der Dreieckzahlen (§. 88.) die Kugelzahl der Basis, und das summatorische Glied dieser Reihe, welches sofort mit dem allgemeinen Gliede der Reihe der dreiseitigen Pyramidalzahlen (§. 89.) identisch ist, die Anzahl der Kugeln der ganzen Pyramide. Man hat nämlich

$$\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \text{ Kugeln in der Basis, und}$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ Kugeln in der ganzen Pyramide.}$$

Sind bereits die obersten $(m-1)$ Schichten der vollständigen Pyramide weggenommen worden, so, daſs in einer Seite der obersten Schichte der abgestutzten Pyramide m, und in einer Seite der Basis, wie vorhin, n Kugeln liegen; so enthält diese abgekürzte Pyramide, wie man leicht findet, noch

$$\frac{n(n+1)(n+2) - m(m^2-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ Kugeln.}$$

Aufgabe 2.

Eine vierseitige Kugelpyramide besteht aus n Schichten; die Kugelzahl der Basis und der ganzen Pyramide zu finden.

Auflösung.

Da die Schichten Quadrate bilden, welche, von oben herabgezählt, beziehungsweise 1, 4, 9, . . . Kugeln ent-

halten; so gibt das n^{te} oder allgemeine Glied der Reihe der Quadratzahlen (§. 88.) die Kugelzahl der Basis, und das summatorische Glied dieser Reihe, welches zugleich wieder mit dem allgemeinen Gliede der Reihe der vierseitigen Pyramidalzahlen (§. 89.) übereinstimmt, die Kugelzahl der ganzen Pyramide. Man hat sofort

n^2 Kugeln in der Basis, und

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}$ Kugeln in der ganzen Pyramide.

Eben so leicht findet man die Kugelzahl für die abgestumpfte Pyramide, wenn bereits mehrere Kugelschichten von oben weggenommen worden sind.

Aufgabe 3.

Es sind Kugeln in einen länglichten Haufen so geschlichtet, daſs die Basis ein Rechteck und das Ganze ein dreiseitiges Prisma bildet, in welchem die beiden sogenannten Grundflächen schief abgeschnitten sind; und zwar liegt zu oberst *eine* Reihe von m Kugeln, welche die horizontale Kante bildet; dann kommen *zwei* Reihen, jede zu $m+1$ Kugeln; hierauf folgen *drei* Reihen, deren jede $m+2$ Kugeln enthält u. s. f., bis endlich die Basis, welche die n^{te} Schichte bildet, aus n Reihen, und jede davon aus $m+n-1$ Kugeln besteht; man soll die Anzahl aller in diesem Haufen befindlichen Kugeln bestimmen.

Auflösung.

Da es sich offenbar hier um die Bestimmung des summatorischen Gliedes der Reihe

$$m, \; 2(m+1), \; 3(m+2), \; . \; . \; . \; n(m+n-1),$$

welche eine arithmetische der zweiten Ordnung ist, handelt; so hat man nach der Formel (III, §. 85., wegen $a_1 = m$, $\Delta^1 a_1 = m+2$ und $\Delta^2 a_1 = 2$, $(\Delta^3 a_1 = \Delta^4 a_1 = \ldots = 0)$:

$$S_n = nm + \frac{n(n-1)}{2}(m+2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \, . \, 3} 2,$$

oder nach einer ganz einfachen Reduction:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+3m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

Auch läſst sich wieder der Rest der Kugeln leicht finden, wenn mehrere Schichten oben weggenommen werden.

c) Potenzreihen.

§. 92.

Da die Ableitung der Summenformel für die Reihe $1^m, 2^m, 3^m, \ldots n^m$, die wir (§. 85., Anmerk. 2., a)) als eine arithmetische der m^{ten} Ordnung bereits erkannt haben, zu einer bemerkenswerthen Entwickelung Anlaſs gibt; so wollen wir diese Formel, nämlich $\int(n^m)$ (§. 80., Erkl. 5.), obschon man jede vorkommende Reihe dieser Art nach Formel (III (§. 85.) summiren kann, insbesondere noch entwickeln.

Man setze also (§. 85., Anmerk. 1., Gl. A))

$$\begin{aligned} \int(n^m) &= 1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m \\ &= t_1 n^{m+1} + t_2 n^m + t_3 n^{m-1} + \ldots + t_{m+1} n \ldots (1 \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung erhält man auch, wenn man statt n, $n+1$ schreibt:

$$\begin{aligned} &= 1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m + (n+1)^m \\ &= t_1(n+1)^{m+1} + t_2(n+1)^m + t_3(n+1)^{m-1} + \ldots + t_{m+1}(n+1); \end{aligned}$$

von dieser Gleichung die vorige abgezogen, gibt:

$$\begin{aligned} (n+1)^m = {} & t_1\left[(n+1)^{m+1} - n^{m+1}\right] + t_2\left[(n+1)^m - n^m\right] \\ & + t_3\left[(n+1)^{m-1} - n^{m-1}\right] + \ldots + t_{m+1}\left[(n+1) - n\right], \end{aligned}$$

oder, wenn man entwickelt, alles nach n ordnet und dabei die Binomial-Coefficienten ganz einfach, wie in §. 14., bezeichnet:

$$n^m + \binom{m}{1} n^{m-1} + \binom{m}{2} n^{m-2} + \binom{m}{3} n^{m-3} + \ldots + 1 = t_1 \binom{m+1}{1} n^m$$

$$+ \left.\begin{matrix} t_1\binom{m+1}{2} \\ t_2\binom{m}{1} \end{matrix}\right\} n^{m-1} + \left.\begin{matrix} t_1\binom{m+1}{3} \\ t_2\binom{m}{2} \\ t_3\binom{m-1}{1} \end{matrix}\right\} n^{m-2} + \left.\begin{matrix} t_1\binom{m+1}{4} \\ t_2\binom{m}{3} \\ t_3\binom{m-1}{2} \\ t_4\binom{m-2}{1} \end{matrix}\right\} n^{m-3} + \ldots + \left.\begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ . \\ . \\ t_{m+1} \end{matrix}\right\}$$

Da nun die Coefficienten t_1, t_2, ... von n ganz unabhängig sind, so hat man nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten (§. 2.):

$$t_1(m+1) = 1; \quad \text{also} \quad t_1 = \frac{1}{m+1}.$$

$$t_1 \frac{(m+1)m}{2} + t_2 m = m;$$

und daraus, wenn der für t_1 bereits gefundene Werth substituirt wird, $t_2 = \frac{1}{2}$.

$$t_1 \frac{(m+1)m(m-1)}{2 \cdot 3} + t_2 \frac{m(m-1)}{2} + t_3(m-1) = \frac{m(m-1)}{2};$$

daraus $t_3 = \frac{m}{12}$.

Eben so ist, wenn man gleich substituirt:

$$(m-2)t_4 = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{3 \cdot 4} - \frac{m(m-1)(m-2)}{24};$$

und daraus $t_4 = 0$.

Setzt man die obige Entwickelung weiter fort, so findet man noch auf dieselbe Weise:

$$t_5 = -\frac{m(m-1)(m-2)}{120 \cdot 2 \cdot 3}; \quad t_6 = 0;$$

$$t_7 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{252 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}; \text{ u. s. f.}$$

Die letzte aus der Vergleichung der Coefficienten von n^0 entspringende Gleichung

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots + t_{m+1} = 1$$

kann zur Verification der gefundenen Werthe von t_1, t_2, ... dienen.

Diese für die Coefficienten gefundenen Werthe in der obigen Gleichung (1 substituirt, geben endlich:

$$\int(n^m) = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2}n^m + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}\binom{m}{1} n^{m-1} - \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{4}\binom{m}{3} n^{m-3}$$
$$+ \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{6}\binom{m}{5} n^{m-5} - \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{8}\binom{m}{7} n^{m-7}$$
$$+ \frac{5}{66} \cdot \frac{1}{10}\binom{m}{9} n^{m-9} - \text{etc.} \ldots \text{(2}$$

dabei darf für specielle Werthe von m die Reihe nur so weit fortgesetzt werden, als es, ohne dafs n Exponenten erhält, die kleiner als $+1$ sind, möglich wird (Form. 1.).

Die in dieser Entwickelung vorkommenden Zahlen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, ... heifsen Bernoullische Zahlen, weil sie von *Jakob Bernoulli* (geb. zu Basel 1654; gest. 1705) *) zuerst sind angegeben worden. *Ars conjectandi, opus posthumum. Basil.* 1713. (S. die Note am Schlusse des eilften Capitels.) Bezeichnet man diese der Reihe nach durch B_1, B_2, B_3, ..., so hat man:

C) ... $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, $B_4 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{5}{66}$, $B_6 = \frac{691}{2730}$, u. s. w. **)

*) Wir führen hier gleich die Genealogie dieser ganzen berühmten Baseler Familie der Mathematiker, in welcher das ausgezeichnetste mathematische Talent gleichsam erblich war, in Kürze an.

Johann Bernoulli, Bruder des *Jakob,* geb. zu Basel 1667; gest. ebendaselbst 1748. *Nicolaus Bernoulli,* Neffe des letztern, geb. zu Basel 1687; gest. ebenda 1759. *Nicolaus Bernoulli,* ältester Sohn des *Johann,* geb. zu Basel 1695; gest. zu Petersburg 1726. *Daniel Bernoulli,* zweiter Sohn des *Johann,* geb. zu Gröningen 1700; gest. zu Basel 1782. *Johann Bernoulli*, Bruder der beiden vorigen, geb. zu Basel 1710; gest. ebendaselbst 1790. *Johann Bernoulli,* Sohn des letztern, geb. zu Basel 1744; gest. zu Berlin 1807. *Jakob Bernoulli,* Bruder des vorigen, geb. zu Basel 1759; gest. zu Petersburg 1789.

**) Bis zu B_{15} findet man diese berechnet in *Euler's* Anleitung zur Differenzialrechnung im fünften Capitel des zweiten Theiles (deutsche Uebersetzung von *Joh. Michelson.* Berlin 1790. 3 Thle. S. 137). Ihr zuerst von *Moivre* aufgefundenes Gesetz liegt in den folgenden Gleichungen:

$$3B_1 = \tfrac{1}{2};\quad 5B_2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 1B_1^2;\quad 7B_3 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 2B_1B_2;$$

$$9B_4 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot 2B_1B_3 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 1B_2^2;$$

$$11B_5 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot 2B_1B_4 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 2B_2B_3;$$

$$13B_6 = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} \cdot 2B_1B_5 + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 2B_2B_4 + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 1B_3^2;\ \text{u. s. w.}$$

welches somit hinreichend klar ist.

Anmerk. 1. Mit Hilfe der Formel für $\int(n^m)$ ist man auch im Stande, die summatorischen Glieder von Reihen zu finden, deren allgemeine Glieder gegeben, und nur rationale ganze Functionen von n sind.

Ist z. B. $a_n = A + Bn + Cn^2$ das allgemeine Glied irgend einer Reihe, so sind offenbar die Glieder dieser Reihe:

$$\begin{aligned} a_1 &= A + 1B + 1^2C, \\ a_2 &= A + 2B + 2^2C, \\ a_3 &= A + 3B + 3^2C, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= A + nB + n^2C, \end{aligned}$$

folglich ist die Summe derselben oder

$$\int(A + Bn + Cn^2)$$
$$= nA + B(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + C(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2),$$

oder nach der eingeführten Bezeichnung und wegen

$$n = 1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0,$$

auch

$$\int(A + Bn + Cn^2) = A\int(n^0) + B\int(n) + C\int(n^2).$$

Auf die nämliche Art erhält man allgemein:

$$\int(A + Bn + Cn^2 + \ldots + Pn^m)$$
$$= A\int(n^0) + B\int(n) + C\int(n^2) + \ldots + P\int(n^m) \quad . \; . \; (3$$

Anmerk. 2. Die Summenformel für $\int(n^m)$ kann auch auf folgende Art abgeleitet werden.

Es ist (§. 81.)

$\int(n^m) - \int(n-1)^m = n^m$, also auch $\int(n^m) - n^m = \int(n-1)^m$, oder wenn man $(n-1)^m$ in der Voraussetzung entwickelt, daſs m eine ganze positive Zahl ist, auch:

$$\int(n^m) - n^m = \int\Big[n^m - \binom{m}{1}n^{m-1} + \binom{m}{2}n^{m-2}$$
$$- \binom{m}{3}n^{m-3} + \ldots \mp \binom{m}{1}n \pm 1\Big],$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (3 der nächst vorhergehenden Anmerkung:

$$\int(n^m) - n^m = \int(n^m) - \binom{m}{1}\int(n^{m-1}) + \binom{m}{2}\int(n^{m-2})$$
$$- \binom{m}{3}\int(n^{m-3}) + \ldots \mp \binom{m}{1}\int(n) \pm \int(n^0).$$

Bestimmt man daraus $\int(n^{m-1})$, und schreibt zugleich durchaus $m+1$ statt m; so erhält man:

$$\int(n^m) = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{m}{2}\int(n^{m-1}) - \frac{m(m-1)}{2\,.\,3}\int(n^{m-2}) + \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{1}{m+1}\int(n^0) \;.\;.\; (4$$

Setzt man in dieser Formel, in welcher die Summe der höchsten Potenz durch jene der vorhergehenden Potenzen ausgedrückt ist, statt m nach und nach $m-1$, $m-2$, $m-3$, ..., so erhält man eben so $\int(n^{m-1})$, $\int(n^{m-2})$, . . . auf diese Weise ausgedrückt, welche Werthe dann successive in diese Gleichung (4 substituirt und gehörig reducirt, offenbar die obige Formel (2 für $\int(n^m)$ geben müssen. Es ist also, was wir um eines fernern Gebrauches willen ausdrücklich bemerken wollen, die Formel (4 mit jener (2 identisch, oder vielmehr, jene Formel (2 entsteht aus dieser (4 durch das erwähnte Verfahren *).

*) Auf dem nämlichen Wege, welchen wir oben zur Entwickelung der Formel (2 eingeschlagen haben, kann man auch das summatorische Glied der Reihe

$$a^m + (a+d)^m + (a+2d)^m + \ldots + [a+(n-1)\,d]^m,$$

die wir ebenfalls [§. 85., Anmerk. 2., *b*)] als eine **arithmetische der m^{ten} Ordnung** erkannt haben, ableiten. Der Anfänger kann diese Ableitung als ein gutes Uebungs-Problem ansehen und dasselbe auflösen; wir wollen bloſs das Resultat davon hersetzen.

Setzt man wieder

$$\int(a+(n-1)\,d)^m = t_1\,n^{m+1} + t_2\,n^m + t_3\,n^{m-1} + \ldots + t_{m+1}\,n,$$

so findet man:

$$t_1 = \frac{d^m}{m+1};$$

$$t_2 = a\,d^{m-1} - \frac{m+1}{2}\,t_1;$$

$$t_3 = \frac{m}{2}\,a^2\,d^{m-2} - \frac{m}{2}\,t_2 - \frac{(m+1)\,m}{2\,.\,3}\,t_1;$$

$$t_4 = \frac{m(m-1)}{2\,.\,3}\,a^3\,d^{m-3} - \frac{(m-1)}{2}\,t_3 - \frac{m(m-1)}{2\,.\,3}\,t_2$$
$$- \frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{2\,.\,3\,.\,4}\,t_1,$$

und nach diesem Gesetze weiter.

Nach einer Entwickelung, die im Gange von dem vorigen in etwas verschieden ist, findet man auch, wenn der Kürze wegen das letzte Glied der Reihe der ersten Ordnung $a+(n-1)\,d = l$ gesetzt wird;

§. 93.

Beispiele.

Setzt man in der im vorigen Paragraphe gefundenen Formel (2 nach und nach $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, so erhält man die summatorischen Glieder der ersten auf einander folgenden Potenzreihen, deren allgemeine Glieder n^0, n^1, n^2, . . . sind. Man hat nämlich:

$$\int(n^0) = n;\ \int(n^1) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2};$$

$$\int(n^2) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$\int(n^3) = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4};\ \text{u. s. w.}$$

(Vergl. damit §. 88. und §. 86., Beisp. 2.) Nach der Formel (4 z. B. (Anmerk. 2.) erhält man weiter:

$$\int(n^4) = \frac{n^5}{5} + 2\int(n^3) - 2\int(n^2) + \int(n^1) - \tfrac{1}{5}\int(n^0)$$

$$= \frac{n^5}{5} + \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{5}$$

$$= \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{2 \cdot 3 \cdot 5}.$$

$$\int(l^m) = \frac{l^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)d} + \tfrac{1}{2}(l^m - a^m)$$
$$+ B_1 \frac{d}{2}\binom{m}{1}(l^{m-1} - a^{m-1})$$
$$+ B_2 \frac{d^3}{4}\binom{m}{3}(l^{m-3} - a^{m-3})$$
$$+ B_3 \frac{d^5}{6}\binom{m}{5}(l^{m-5} - a^{m-5}) + \text{etc.},$$

wobei wieder B_1, B_2, B_3, . . . die auf einander folgenden, oben in C) angegebenen, Bernoullischen Zahlen bezeichnen.

Ueber gemischte Reihen, so wie über mehreres andere hieher Gehörige kann man mit Nutzen den 21sten über Reihen handelnden Abschnitt des 2ten Bandes von Dr. *Ephraim Salomon Unger's* Handbuch der mathematischen Analysis (Erfurt und Gotha 1825) nachsehen. Mehreres über Reihen findet man auch in *Littrow's* Elemente der Algebra und Geometrie (Wien 1827) im fünften Capitel.

Besondere Anwendung der Differenzenreihen.

§. 94.

So wie aus x^m, oder allgemeiner noch, wenn A einen von x unabhängigen Coefficienten, und m eine ganze positive Zahl bezeichnet, aus Ax^m eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung gebildet wird, wenn man für x nach und nach die Werthe setzt: a, $a+d$, $a+2d$, . . ., d. i. x in einer arithmetischen Reihe zunehmen läfst; eben so entstehen unter den nämlichen Bedingungen aus Bx^n, Cx^p u. s. w. beziehungsweise arithmetische Reihen der n^{ten}, p^{ten}, . . . Ordnung.

Ist nun $y = Ax^m + Bx^n + Cx^p \ldots$, wo x eine in arithmetischer Progression zunehmende Gröfse bedeutet, und ist m der gröfste vorkommende Exponent von x; so bilden offenbar die auf einander folgenden Werthe von y eine arithmetische Reihe, deren m^{ten} Differenzen beständig oder einander gleich sind, nämlich so, als wenn blofs das Glied Ax^m vorhanden wäre; weil die aus den Gliedern Bx^n, Cx^p, . . . von niederigerer Ordnung herrührenden Differenzen schon früher verschwinden, also auf die m^{te} Differenzreihe keinen Einflufs haben. (Vergl. auch §. 85., Anmerk. 2., *d*))

Wäre z. B. $y = Ax^2 + Bx$, so würden, wenn man $x = a$, $a+d$, $a+2d$, . . . setzte, die auf einander folgenden Werthe von y die Reihe bilden:

$$Aa^2 + Ba,\ A(a+d)^2 + B(a+d),\ A(a+2d)^2 + B(a+2d),$$
$$A(a+3d)^2 + B(a+3d), \ldots$$

aus welcher man sofort als erste Differenzreihe

$$A(2ad + d^2) + Bd,\ A(2ad + 3d^2) + Bd,$$
$$A(2ad + 5d^2) + Bd, \ldots$$

und als zweite Differenzreihe

$$2Ad^2,\ 2Ad^2, \ldots$$

erhält. Diese letzte Reihe von gleichen Gliedern ist aber die nämliche, welche erhalten wird, wenn blofs $y = Ax^2$ ist.

§. 95.

Die Differenzenreihen spielen in der Anwendung eine grofse Rolle, und sie können im gemeinen Leben auf die mannigfaltigste Weise benützt werden. Von vorzüglich grossem Nutzen jedoch sind diese bei der Verfertigung von Tafeln aller Art, weil man durch sie des vielen mühseligen Rechnens enthoben wird. Wir wollen dieses durch ein paar Beispiele zu erläutern suchen.

Beispiel 1.

Gesetzt man wollte eine Tafel der Kreisflächen für die beständig um $\frac{1}{4}$ Zoll zunehmenden Durchmesser von $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $1\frac{1}{4}$ u. s. w. aufwärts bis 100 Zoll construiren; so müfste man auf die gewöhnliche Art nach der Formel $y = \frac{\pi}{4} x^2$, 400 Substitutionen und Entwickelungen machen, welche Arbeit nicht mehr ganz unbedeutend ist. Benützt man dagegen bei dieser Rechnung die Eigenschaften der Differenzenreihen, so werden, da x in arithmetischer Progression zunimmt, die entsprechenden Werthe von y (§. 94.) eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung bilden. Da also die zweiten Differenzen einander gleich sind, folglich ein Glied davon hinreicht um diese zweite Differenzreihe, dann mit dieser die erste Differenzreihe, und endlich mit dieser wieder die ursprüngliche oder gesuchte Reihe, so weit man will, fortsetzen zu können; so ist es hinreichend, nach der Formel $y = \frac{\pi}{4} x^2$ blofs die drei ersten Werthe wirklich zu berechnen, um dadurch die drei ersten Glieder der gesuchten Reihe der Kreisflächen, daraus die zwei ersten Glieder der ersten, und endlich daraus wieder das erste Glied der zweiten Differenzreihe zu erhalten, um dann durch blofse Additionen die Reihen beliebig fortsetzen, also auch die gesuchten Werthe von y finden zu können. Berechnet man demnach, wenn die Werthe der Kreisflächen auf vier Decimalstellen verlangt werden, um diese mit gehöriger Sicherheit genau zu erhalten, die drei ersten

Werthe auf sechs Decimalstellen; so findet man respective: ·049087, ·196349, ·441786; daraus folgen ·147262 und ·245437 als die beiden ersten Glieder der *ersten*, und daraus wieder ·098175 als das *beständige* Glied der *zweiten* Differenzreihe. Läſst man also den Decimalpunct weg, und setzt nur immer die letzten bedeutenden Ziffern an, indem man zuletzt in den Resultaten von der Rechten zur Linken wieder die sechs Decimalziffern abschneidet; so stellt sich die Rechnung folgender Maſsen:

2. Differenz.	1. Differenz.	Gesuchte Reihe.
		49087
	147262	
98175		196349
	245437	
98175		441786
	343612	
98175		785398
	441787	
98175		1227185
	539962	
98175		1767147
	638137	
98175		2405284
	736312	
98175		3141596
	834487	
98175		3976083
	932662	
....		4908745
		
		

Schneidet man also, wie gesagt, in der gefundenen Reihe die sechs letzten Ziffern als Decimalstellen ab, und behält davon nur die ersten vier bei; so erhält man als Anfang der genannten Tabelle folgendes Bruchstück:

Durchmesser.	Kreisfläche.	Durchmesser.	Kreisfläche.
1/4	·0491	2	3·1416
1/2	·1963	2 1/4	3·9761
3/4	·4418	2 1/2	4·9087
1	·7854	2 3/4	5·9396
1 1/4	1·2272	3	7·0686
1 1/2	1·7671	3 1/4	8·2958
1 3/4	2·4053	3 1/2	9·6211
		...	

Da übrigens ein Rechnungsfehler allen folgenden Werthen mitgetheilt wird, so muſs man die auf diese Weise erhaltenen Resultate von Zeit zu Zeit prüfen, indem man in gewissen Entfernungen immer einen Werth direct nach der Formel berechnet, und diesen mit dem entsprechenden Gliede der Reihe vergleicht.

Beispiel 2.

Nehmen wir als zweites Beispiel an, daſs nach der Formel

$$\Delta t = \cdot 0^4 661738\, t - \cdot 0^5 81653\, t^2 + \cdot 0^7 181\, t^3$$

zum Behufe der Construction einer Tafel für die Dichtheit des Wassers bei den verschiedenen Temperatursgraden von $t = 1$ bis $t = 80^0$ alle Werthe von Δt für $t = 1, 2, 3, \ldots 80$ berechnet werden sollen. Da t nach einer arithmetischen Progression des ersten Grades zunimmt, so nehmen die Werthe von Δt, dem vorhergehenden Paragraphe zufolge, nach einer arithmetischen Reihe des dritten Grades zu, zu deren Bestimmung oder Fortsetzung (§. 85, Anmerk. 2., *f*)) sofort die vier ersten Glieder hinreichen. Durch wiederholtes Abziehen findet man nämlich hieraus die ersten drei Glieder der ersten, daraus die ersten zwei Glieder der zweiten, und endlich daraus das beständige Glied der dritten Differenzreihe. Diese setzt man beliebig weit fort, und bildet nun umgekehrt durch wiederholtes Summiren, da die ersten Glieder bereits gegeben sind, die zweiten, daraus die ersten, und endlich daraus die ursprüngliche oder gesuchte Reihe, eben so weit. Nur muſs man bei diesen Subtractionen und Additionen, die im algebraischen Sinne zu verstehen sind, auf die Zeichen der Glieder gehörig Rücksicht nehmen.

Für das gewählte Beispiel sind nun die aus der Formel berechneten vier ersten Werthe von Δt, wenn man bloſs wieder die letzten bedeutenden Ziffern angibt, und im Gedächtnisse hält, daſs man in den Endresultaten immer zehn Decimalziffern abzuschneiden hat;

580266, 998312, 1255224, 1352088;
daraus erhält man: 418046, 256912, 96864 für d. 1. Differenzreihe
— 161134, — 160048 » 2. »
+ 1086 für das constante Glied der dritten Differenzreihe.

Der Gang der Rechnung ist demnach folgender:

dritte Diff.	zweite Diff.	erste Diff.	Δt.	für $t =$
			+ 580266	1
		+ 418046	+ 998312	2
	— 161134	+ 256912	+ 1255224	3
1086	— 160048	+ 96864	+ 1352088	4
1086	— 158962	— 62098	+ 1289990	5
1086	— 157876	— 219974	+ 1070016	6
1086	— 156790	— 376764	+ 693252	7
1086	— 155704	— 532468	+ 160784	8
1086	— 154618	— 687086	— 526302	9
1086	— 153532	— 840618	— 1366920	10
1086	— 152446	— 993064	— 2359984	11
. . .				

Die erstern Werthe von Δt sind demnach:
$\cdot 0^4 580266$, $\cdot 0^4 998312$, $\cdot 0^3 1255224$, $\cdot 0^3 1352088$ u. s. w., für $t = 10$ z. B. ist $\Delta t = - \cdot 0^3 1366920$, wovon man sich auch leicht direct nach der Formel überzeugt,

Diese zwei Beispiele mögen indefs hinreichen, die Anwendung der Differenzenreihen auf solche Rechnungen zu zeigen. Wir werden weiter unten bei den Berechnungsmethoden der Logarithmen Gelegenheit haben, dieselben noch durch ein drittes Beispiel zu erläutern,

Das Interpoliren der Reihen.

§. 96.

Erklärung.

Eine Reihe interpoliren heifst zwischen je zwei Glieder derselben eine gegebene Anzahl von Gliedern dergestalt einschalten, dafs die dadurch entstehende neue Reihe mit der ursprünglichen oder Grundreihe zu einerlei Gattung und Ordnung gehört.

Um dieses Problem nun für die arithmetischen Reihen überhaupt aufzulösen, mufs man bemerken, dafs wenn von einer beliebigen Stelle angefangen die Glieder der gegebenen Reihe durch a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ... a_{n+m} ... bezeichnet werden, die auf einander folgenden zwischen a_n und a_{n+1} einzuschaltenden $r-1$ Glieder die Bezeichnung erhalten müssen: $a_{n+\frac{1}{r}}$, $a_{n+\frac{2}{r}}$, $a_{n+\frac{3}{r}}$, ... $a_{n+\frac{r-1}{r}}$; weil das nächste hierauf folgende Glied, welches von a_n gezählt das zweite der Grundreihe ist, in der That dadurch die Bezeichnung $a_{n+\frac{r}{r}} = a_{n+1}$ erhält, wie es seyn soll.

Man hat aber genau so, wie in §. 84.:

$$a_{n+1} = a_n + \Delta^1 a_n;$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \Delta^1 a_{n+1} = a_n + \Delta^1 a_n + \Delta^1 a_n + \Delta^2 a_n$$
$$= a_n + 2\Delta^1 a_n + \Delta^2 a_n;$$

$$a_{n+3} = a_{n+2} + \Delta^1 a_{n+2} = a_{n+1} + \Delta^1 a_{n+1} + \Delta^1 a_{n+1} + \Delta^2 a_{n+1}$$
$$= a_{n+1} + 2\Delta^1 a_{n+1} + \Delta^2 a_{n+1}$$
$$= a_n + 2(\Delta^1 a_n + \Delta^2 a_n) + \Delta^2 a_n + \Delta^3 a_n$$
$$= a_n + 3\Delta^1 a_n + 3\Delta^2 a_n + \Delta^3 a_n$$

u. s. w.; allgemein:

$$a) \; .. \; a_{n+m} = a_n + m\Delta^1 a_n + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2}\Delta^2 a_n + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\Delta^3 a_n + \ldots \;*)$$

Diese Formel, welche nicht blofs für ganze, sondern auch für gebrochene Werthe von m gilt **), bricht für jede

*) Man erhält diesen Ausdruck auch unmittelbar aus der Formel (II, §. 84., wenn man dort a_n statt a_1, ferner a_{n+m} statt $a_n = a_{1+(n-1)}$, also m statt $n-1$, $m-1$ statt $n-2$ u. s. w. setzt.

**) Das erstere ist für sich klar, und folgt aus der Entwickelung in §. 84. Das letztere kann auf folgende Art erwiesen werden.

Es sey a_n, a_{n+m}, a_{n+2m}, ... die ursprüngliche Reihe, die wir, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, vom zweiten Grade annehmen wollen; und a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ... a_{n+m-1}, a_{n+m} ... die durch Einschaltung von $m-1$ Gliedern, zwischen je zwei Glieder der gegebenen, entstehende interpolirte Reihe; so hat man, wenn die Differenzen der ersten Reihe durch Δ, und die der letz-

arithmetische Reihe ab, weil z. B. für eine Reihe der r^{ten} Ordnung, die Factoren $\Delta^{r+1} a_n$, $\Delta^{r+2} a_n$ u. s. w. gleich Null sind.

Setzt man nun in diesem Ausdruck $m = \frac{u}{v}$, so entsteht:

$$a_{n+\frac{u}{v}} = a_n + \frac{u}{v}\Delta^1 a_n + \frac{\frac{u}{v}\left(\frac{u}{v}-1\right)}{1\,.\,2}\Delta^2 a_n$$
$$+ \frac{\frac{u}{v}\left(\frac{u}{v}-1\right)\left(\frac{u}{v}-2\right)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^3 a_n + \ldots;$$

tern durch δ bezeichnet werden (§. 83.):

$\Delta^1 a_{n+m} = a_{n+2m} - a_{n+m}$

$$\Delta^1 a_n = a_{n+m} - a_n;\quad \Delta^2 a_n = a_{n+2m} - 2a_{n+m} + a_n.$$

Für die zweite Reihe, welche nun auch von der zweiten Ordnung seyn mufs, folgt nach der obigen Formel α), weil m eine ganze Zahl ist:

$$a_{n+m} - a_n = m\,\delta_1 a_n + \frac{m(m-1)}{2}\delta_2 a_n = \Delta^1 a_n \ldots (1$$

(mit Berücksichtigung nämlich der vorigen Gl.); ferner

$$a_{n+2m} = a_n + 2m\,\delta_1 a_n + m(2m-1)\,\delta_2 a_n, \text{ dann}$$
$$-2a_{n+m} = -2a_n - 2m\,\delta_1 a_n - m(m-1)\,\delta_2 a_n \text{ und}$$
$$a_n = a_n,$$

also $a_{n+2m} - 2a_{n+m} + a_n = \Delta^2 a_n = m^2\,\delta_2 a_n$.

Dieser Werth von $\delta_2 a_n = \frac{1}{m^2}\Delta^2 a_n$ in der vorigen Gleichung (1 substituirt, gibt, wenn man sogleich $\delta_1 a_n$ daraus bestimmt:

$$\delta_1 a_n = \frac{1}{m}\Delta^1 a_n - \frac{m-1}{2m^2}\Delta^2 a_n.$$

Wird endlich dieser Werth für $\delta_1 a_n$ in der Gleichung $a_{n+1} = a_n + \delta_1 a_n$ gesetzt, so erhält man

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{m}\Delta^1 a_n - \frac{(m-1)}{2m^2}\Delta^2 a_n,$$

nämlich genau dasselbe Resultat, welches unmittelbar aus der Formel α) folgt, wenn man in dieser $\frac{1}{m}$ statt m setzt. Es mufs aber auch in der That, wenn in der gegebenen Reihe a_n das erste, a_{n+m} das zweite Glied bildet u. s. w., jenes a_{n+1} sofort mit $a_{n+\frac{1}{m}}$ bezeichnet werden, weil es das $1+\frac{1}{m}^{\text{te}}$ Glied dieser nämlichen Reihe ist.

Auf dieselbe Art kann man den Beweis für jedes andere eingeschaltete Glied, und für jeden Grad der Reihe führen.

oder wenn man einrichtet und bemerkt, daſs beim Gebrauche, wie wir sogleich sehen werden, immer $u < v$ bleiben kann, auch:

$$a_{n+\frac{u}{v}} = a_n + \frac{u}{v}\,\Delta^1 a_n - \frac{u(v-u)}{1.2.v^2}\,\Delta^2 a_n$$

$$+ \frac{u(v-u)(2v-u)}{1.2.3.v^3}\,\Delta^3 a_n - \text{etc.}, \ldots \quad \text{(IV}$$

welches sofort die gesuchte Interpolationsformel ist.

Diese Formel bricht für jede arithmetische Reihe ab, und besteht, wenn diese vom m^{ten} Grade ist, aus $m+1$ Gliedern. Bei dem Gebrauche derselben bezeichnet man immer jene zwei Glieder der gegebenen Reihe, zwischen welchen gerade die Einschaltung vorgenommen wird, mit a_n und a_{n+1}. Ist die Anzahl der zwischen je zwei Glieder einzuschaltenden Glieder gleich r, so ist der Nenner des Bruches $\frac{u}{v}$, nämlich $v = r+1$, während der Zähler oder u nach und nach die Werthe $1, 2, 3, \ldots v-1$ erhält.

Wir wollen den Gebrauch dieser Formel im nächsten Paragraphe durch einige Beispiele erläutern.

§. 97.

Beispiele.

1. Um zwischen je zwei Glieder der Reihe 1, 16, 49, 100, ... zwei neue Glieder so einzuschalten, daſs dadurch der Grad der Reihe nicht geändert wird, hat man $v = 3$ und

$$\begin{array}{cccc} 1, & 16, & 49, & 100, \ldots \\ & 15, & 33, & 51, \ldots \\ & & 18, & 18, \ldots \end{array}$$

also für das Einschalten zwischen dem ersten und zweiten Glied

$$a_n = 1, \quad a_{n+1} = 16, \quad \Delta^1 a_n = 15, \quad \Delta^2 a_n = 18,$$
$$\Delta^3 a_n = \Delta^4 a_n = \ldots = 0;$$

folglich nach der obigen Formel (IV:

$$a_{n+\frac{1}{3}} = 1 + \tfrac{1}{3}.15 - \tfrac{1}{9}.18 = 1 + 5 - 2 = 4;$$

$$a_{n+\frac{2}{3}} = 1 + \tfrac{2}{3}.15 - \tfrac{1}{9}.18 = 1 + 10 - 2 = 9.$$

Für die beiden nächsten Glieder wird

$a_n = 16$, $a_{n+1} = 49$, $\Delta^1 a_n = 33$, $\Delta^2 a_n = 18$; mithin ist eben so:

$$a_{n+\frac{1}{3}} = 16 + \tfrac{1}{3}.33 - \tfrac{1}{9}.18 = 16 + 11 - 2 = 25,$$

$$a_{n+\frac{2}{3}} = 16 + \tfrac{2}{3}.33 - \tfrac{1}{9}.18 = 16 + 22 - 2 = 36;$$

was in der Regel einfacher ist, als mit dem ersten Werth von a_n die Glieder $a_{n+\frac{4}{3}}$ und $a_{n+\frac{5}{3}}$ zu suchen.

Für die beiden folgenden Glieder würde man $a_n = 49$ und $a_{n+1} = 100$ setzen, und wieder $a_{n+\frac{1}{3}}$ und $a_{n+\frac{2}{3}}$ bestimmen, u. s. w.

Die interpolirte Reihe ist demnach:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, . . .

welches bekanntlich wieder eine arithmetische der zweiten Ordnung, wie die gegebene, ist (§. 88.).

In der Anwendung auf physikalische oder naturwissenschaftliche Gegenstände überhaupt, kann man sich häufig mit dem gröfsten Nutzen der Interpolations-Methode auch bei solchen Folgen von, durch mühselige Rechnungen oder gewöhnlicher durch Beobachtungen gefundenen Gröfsen bedienen, welche streng genommen keine vollkommene arithmetische Reihen bilden, dabei aber doch so beschaffen sind, dafs wenn man diese als solche behandelt und die Differenzen sucht, irgend eine dieser Differenzenreihen, ohne einen Fehler zu begehen, der die gestattete Fehlergrenze des betreffenden Gegenstandes übersteigt, als aus gleichen Gliedern bestehend angenommen werden kann.

2. Wir wollen als erstes Beispiel hierzu annehmen, man hätte für die Elasticität des Wasserdampfes bei den Temperatursgraden 1, 3, 5, 7, 9, . . . aus Versuchen der Reihe nach die Zahlen gefunden: ·1422, ·1741, ·2122, ·2571, ·3101, ·3721, ·4445 u. s. w., und man wollte durch Interpolirung dieser Reihe die den Temperatursgraden 2, 4, 6, 8, . . . entsprechenden Zahlen bestimmen. Sucht man sofort die wiederholten Differenzen dieser Reihe, so findet man ·0319, ·0381, ·0449, ·0530, ·0620, ·0724, . . . als erste, ·0062, ·0068, ·0081, ·0090, ·0104, . . . als zweite,

·0006, ·0013, ·0009, ·0014, . . . als dritte Differenzreihe, u. s. w.

Läſst man nun die wenig mehr von einander verschiedenen dritten Differenzen als gleich groſs gelten, und nimmt in dieser Gegend dafür als Mittelzahl ·0012; so erhält man nach der obigen Formel, wegen $\rho = 2$, der Reihe nach:

$$\cdot 1422 + \frac{\cdot 0310}{2} - \frac{\cdot 0062}{8} + \frac{\cdot 0012}{16} = \cdot 1575,$$

$$\cdot 1741 + \frac{\cdot 0381}{2} - \frac{\cdot 0068}{8} + \frac{\cdot 0012}{16} = \cdot 1924,$$

$$\cdot 2122 + \frac{\cdot 0449}{2} - \frac{\cdot 0081}{8} + \frac{\cdot 0012}{16} = \cdot 2337,$$

$$\cdot 2571 + \frac{\cdot 0530}{2} - \frac{\cdot 0090}{8} + \frac{\cdot 0012}{16} = \cdot 2825,$$

u. s. w.,

welche Zahlen auch mit den Beobachtungen sehr wohl übereinstimmen. Ist man in der Reihe weiter gekommen, so kann man die Mittelzahl, welche die dritte oder beständige Differenz darstellt, so ändern, daſs sie mehr mit der in dieser Gegend der Reihe herrschenden dritten Differenz übereinstimmt.

3. Nehmen wir endlich als letztes Beispiel hierüber an, es solle mit Hilfe einer Tafel, welche die Briggischen oder gemeinen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 1200 auf zehn Decimalstellen enthält *), der Logarithmus von 114835 auf eben so viele Decimalstellen genau gefunden werden.

Da es sich bekanntlich (bei diesem Systeme) bloſs darum handelt, die Mantisse für *log.* 1148·35, welche zwischen den Mantissen von *log.* 1148 und *log.* 1149 liegt, zu finden; so hat man aus dieser genannten Tafel für die Mantissen der Logarithmen der Zahlen 1148, 1149, 1150, 1151, . . . der Reihe nach:

·0599418881, ·0603200287, ·0606978404, ·0610753236, ·0614524791, ·0618293073, u. s. w.

*) Eine solche Tafel, in welcher die Logarithmen von 1 bis 1200 selbst bis auf zwanzig Decimalstellen enthalten sind, befindet sich in *Callet's Tables portatives.*

Nimmt man die wiederholten Differenzen dieser Reihe, so ergibt sich als erste Differenzreihe:

$$\cdot 0^3 3781406,\ \cdot 0^3 3778117,\ \cdot 0^3 3774832,\ \cdot 0^3 3771555,\ \cdot 0^3 3768282,\ \ldots;$$

als zweite:

$$-\cdot 0^6 3289,\ -\cdot 0^6 3285,\ -\cdot 0^6 3277,\ -\cdot 0^6 3273,\ \ldots;$$

und als dritte Differenzreihe:

$$\cdot 0^9 4,\ \cdot 0^9 8,\ \cdot 0^9 4,\ \ldots$$

Denkt man sich zwischen den beiden ersten Gliedern der ersten Reihe 99 Glieder eingeschaltet, so, daſs in der Formel (IV $v = 100$ wird, und setzt $u = 35$; so wird für $a_n = \cdot 0599418881$ ($= log.\ 1148$), $a_{n + \frac{35}{100}}$ die Mantisse von $log.\ 1148\cdot 35$ seyn. Läſst man daher die dritten Differenzen als diejenigen gelten, die einander gleich sind, so hat man nach der genannten Formel:

$$a_{n + \cdot 35} = \cdot 0599418881 + \cdot 35 \times \cdot 0^3 3781406$$
$$+ \frac{35 \times 65}{20000} \times \cdot 0^6 3289 + \frac{35 \times 65 \times 165}{6000000} \times \cdot 0^9 4$$
$$= \cdot 0600742747;$$

dabei hat, wie man sieht, das letzte Glied mit der dritten Differenz ($= \cdot 0^{10} 26$) auf die zehnte Decimalstelle keinen Einfluſs mehr. Es ist sonach $log.\ 114835 = 5\cdot 0600742747$.

Es ist, um die Richtigkeit dieses Ergebnisses zu zeigen, auch $114835 = 193 \times 595$, also auch

$$log.\ 114835 = log.\ 193 + log.\ 595,$$

oder nach dieser Tafel

$$= 2\cdot 2855573090 + 2\cdot 7745169657 = 5\cdot 0600742747,$$

wie vorhin.

§. 98.

Ist überhaupt $y = f(x)$ irgend eine Function von x, welche jedoch unbekannt, also das Gesetz, nach welchem x von y abhängt, nicht bestimmt ist, und sind statt diesem bloſs einige Werthe von y für gewisse Werthe von x gegeben: kennt man z. B. für $x = x_1, x_2, x_3, \ldots$, wo-

bei diese Gröfsen gleich- oder ungleich weit von einander abstehen können, die zugehörigen Werthe von $y = y_1, y_2, y_3, \ldots$; so besteht das allgemeine Interpolationsproblem darin: für irgend einen zwischen x_1, x_2, x_3, ... liegenden Werth von x den entsprechenden Werth von y zu finden. Da man nun in einem solchen Falle dennoch irgend ein Gesetz der Abhängigkeit der Gröfse y von x, d. i. irgend eine Function f annehmen mufs, um diese Zwischenwerthe, welche freilich nur näherungsweise richtig seyn werden, berechnen zu können, dieses aber auf unzählig verschiedene Arten geschehen kann, in so ferne man diese Function nur so annimmt, dafs erstlich für $x = x_1$, x_2, x_3, ...: $y = y_1, y_2, y_3, \ldots$ wird, und dann, wenn z. B. x_m zwischen x_2 und x_3 liegt, für $x = x_m$, y einen zwischen y_2 und y_3 fallenden Werth erhält, das angenommene Gesetz also wenigstens nicht unwahrscheinlich wird; so sieht man leicht, dafs dieses Problem, in der Allgemeinheit genommen, ein unbestimmtes ist. In einem solchen Falle wählt man unter allen Functionen, welche man anwenden kann und den genannten Bedingungen entsprechen oder Genüge leisten, die einfachste.

Beispiel.

Kennt man z. B. zufällig aus gewissen Beobachtungen oder Versuchen, die über die Ausdehnung des Wassers angestellt worden sind, für die Temperatursgrade nach der hunderttheiligen Scala: $x_1 = 10$, $x_2 = 13$, $x_3 = 18$, $x_4 = 20$ und $x_5 = 21$, die Volumina des Wassers: $y_1 = 1{\cdot}00019583$, $y_2 = 1{\cdot}00045878$, $y_3 = 1{\cdot}00113450$, $y_4 = 1{\cdot}00148596$ und $y_5 = 1{\cdot}00167875$, und soll aus diesen Daten das Volumen des Wassers für $x = 15$ Grad berechnet werden; so ist offenbar die Ausdehnung oder das Volumen y des Wassers eine gewisse Function von der Temperatur oder von x, obschon das Gesetz, nach welchem y von x abhängt, nichts weniger als bekannt ist. Setzt man daher, um den verlangten Zwischenwerth zu finden, da y_1, y_2, y_3, ... nicht gleich weit von einander abstehen, also diese Gröfsen

nicht als die auf einander folgenden Glieder einer Reihe angesehen werden können; und da ferner, wie man leicht sieht, die Volumsveränderungen des Wassers nicht den einfachen Temperatursgraden folgen:

$$y = a + bx + cx^2;$$

so hat man $y_1 = a + bx_1 + cx_1^2$, $y_2 = a + bx_2 + cx_2^2$, $y_3 = a + bx_3 + cx_3^2$, und aus diesen Gleichungen, wenn man a, b, c bestimmt und für x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 die gegebenen Werthe setzt:

$$y = 1{\cdot}00009113 - {\cdot}0^4 4890\,x + {\cdot}0^5 594\,x^2,$$

als einen genäherten Ausdruck für das Volumen des Wassers innerhalb der Grenzen von $x = 10$ bis $x = 18$ Grad. Setzt man nun in diesem $x = 15$, so findet man für das gesuchte Volumen $y = 1{\cdot}00069346$. Für $x = 20$ und 21 findet man ferner $y = 1{\cdot}00148813$ und $1{\cdot}00168245$; woraus man, da diese Werthe von den wahren oder beobachteten erst in der sechsten Decimalstelle abweichen, ungefähr auf die Genauigkeit des für $x = 15$ gefundenen Werthes von y schließen kann.

Genauer erhält man diesen Werth, wenn man ein Datum mehr in Rechnung bringt, und

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

setzt, wonach man, wie vorhin, wenn a, b, c, d aus den vier Gleichungen: $y_1 = a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3$, . . . $y_4 = a + bx_4 + cx_4^2 + dx_4^3$ bestimmt worden:

$$y = 1{\cdot}00012340 - {\cdot}0^4 5642\,x + {\cdot}0^5 6505\,x^2 - {\cdot}0^7 1387\,x^3$$

findet. Aus diesem Ausdruck folgt sofort für $x = 15$:

$$y = 1{\cdot}00069391.$$

Probirt man nach dieser Formel den noch gegebenen fünften Werth von y, und setzt $x = 21$, so erhält man dafür $y = 1{\cdot}00167843$, welcher von dem beobachteten oder gegebenen erst in der siebenten Decimalstelle abweicht.

§. 99.

Setzt man nun, im Falle die Werthe x_1, x_2, x_3, . . .

nicht gleich weit von einander abstehen, d. i. nicht äquidifferent sind:

$$y_1 = a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3 + \ldots,$$
$$y_2 = a + bx_2 + cx_2^2 + dx_2^3 + \ldots,$$
$$y_3 = a + bx_3 + cx_3^2 + dx_3^3 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

so erhält man durch das successive Abziehen der ersten von der zweiten, der zweiten von der dritten Gleichung u. s. f., wenn man die entstehenden Resultate, welche beziehungsweise durch $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, ... theilbar sind, wirklich durch diese Differenzen dividirt und der Kürze wegen

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = U_1, \quad \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = U_2 \text{ u. s. w. setzt:}$$

$$U_1 = b + c(x_1 + x_2) + d(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + \ldots,$$
$$U_2 = b + c(x_2 + x_3) + d(x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2) + \ldots,$$
$$U_3 = b + c(x_3 + x_4) + d(x_3^2 + x_3 x_4 + x_4^2) + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Zieht man auch hier wieder U_1 von U_2, U_2 von U_3 ab, u. s. f., und setzt

$$\frac{U_2 - U_1}{x_3 - x_1} = U'_1, \quad \frac{U_3 - U_2}{x_4 - x_2} = U'_2, \text{ etc.;}$$

so entsteht

$$U'_1 = c + d(x_1 + x_2 + x_3) + \ldots,$$
$$U'_2 = c + d(x_2 + x_3 + x_4) + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

daraus folgt wieder

$$U'_2 - U'_1 = d(x_4 - x_1) + \ldots,$$

wobei man

$$\frac{U'_2 - U'_1}{x_4 - x_1} = U''_1, \quad \frac{U'_3 - U'_2}{x_5 - x_2} = U''_2, \ldots$$

setzt, um die folgenden Differenzen zu machen, u. s. f.

Nimmt man nun, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, bloſs vier Glieder in y an, und setzt

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots (m;$$

so erhält man aus den vorigen Ausdrücken ohne Mühe:

$d = U''_{,}$,
$c = U'_{,} - U''_{,}(x_1 + x_2 + x_3)$,
$b = U_1 - U'_{,}(x_1 + x_2) + U''_{,}(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$,
$a = y_1 - U_1 x_1 + U'_{,} x_1 x_2 - U''_{,} x_1 x_2 x_3$;

folglich, wenn diese Werthe in dem vorigen Ausdruck (*m* substituirt werden:

$$y = y_1 + U_1(x - x_1) + U'_{,}[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2]$$
$$+ U''_{,}[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)x - x_1 x_2 x_3].$$

Da sich aber, wie leicht zu sehen, die Coefficienten von $U'_{,}$ und $U''_{,}$ in einfache oder Binomial-Factoren zerlegen lassen (m. s. §. 29.), so erhält man endlich, wenn man die Glieder sogleich durch Analogie fortsetzt, also annimmt, dafs der Ausdruck (*m* eine unbestimmte Anzahl von Gliedern enthält:

$$y = y_1 + U_1(x - x_1) + U'_{,}(x - x_1)(x - x_2)$$
$$+ U''_{,}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
$$+ U'''_{,}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + \text{etc.*}) \quad .. \text{(V}$$

Stehen die Werthe x_1, x_2, x_3, ... gleichweit von einander ab, d. h. sind sie äquidifferent, und setzt man $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = v$; so bilden die Werthe y_1, y_2, y_3, ... die Glieder einer Reihe, welche gleichweit von einander abstehen. Man hat daher (§. 82.):

$$U_1 = \frac{\Delta^1 y_1}{v},\ U_2 = \frac{\Delta^1 y_2}{v}\ldots;\ U'_{,} = \frac{\Delta^2 y_1}{1.2.v^2},\ U'_{2} = \frac{\Delta^2 y_2}{1.2.v^2}\ldots;$$
$$U''_{,} = \frac{\Delta^3 y_1}{1.2.3.v^3},\ U''_{2} = \frac{\Delta^3 y_2}{1.2.3.v^3}\ldots;\ \text{u. s. w.}$$

Setzt man endlich noch $x = x_1 + u$, wodurch $x - x_1 = u$, $x - x_2 = u - v$, $x - x_3 = u - 2v$ u. s. w. wird; so folgt, wenn diese und die vorigen Werthe in der Formel (V substituirt werden, daraus:

$$y = y_1 + \frac{u}{v}\Delta^1 y_1 + \frac{u(u-v)}{1.2.v^2}\Delta^2 y_1 + \frac{u(u-v)(u-2v)}{1.2.3.v^3}\Delta^3 y_1 + \ldots \text{(VI}$$

welches offenbar die obige Formel (IV (§. 96.) ist **).

*) Dieses ist die *Newton*'sche Interpolationsformel.

**) Da nun diese Formel entweder abbricht, wenn die Grös-

§. 100.

Da der Entwickelung einer Interpolationsformel vorzüglich die Bedingung zum Grunde liegt, dafs für $x = x_1$, x_2, x_3, . . . y respective die Werthe y_1, y_2, y_3, . . . erhalten soll; so kann man setzen:

$$y = X_1 y_1 + X_2 y_2 + X_3 y_3 + \ldots \quad (n$$

wenn nur X_1, X_2, X_3, . . . solche Functionen von x sind, dafs für $x = x_1$:

$$X_1 = 1, \quad X_2 = X_3 = X_4 = \ldots = 0;$$

für $x = x_2$:

$$X_2 = 1, \quad X_1 = X_3 = X_4 = \ldots = 0;$$

für $x = x_3$:

$$X_3 = 1, \quad X_1 = X_2 = X_4 = \ldots = 0;$$

u. s. w. Statt findet. Diese Eigenschaft ist aber offenbar vorhanden, wenn man setzt:

$$X_1 = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \ldots}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \ldots},$$

$$X_2 = \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \ldots}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \ldots},$$

$$X_3 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) \ldots}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4) \ldots},$$

u. s. w.

Das Gesetz, nach welchem diese Functionen gebildet

sen y_1, y_2, y_3, . . . genau eine arithmetische Reihe bilden, oder was das Gewöhnlichste ist, doch sehr gut convergirt, wenn diese Werthe nur beinahe eine solche Reihe ausmachen, in beiden Fällen aber die Berechnung des Werthes von y, welcher dem Werthe $x_1 + u$ zukommt, nach dieser Formel weit bequemer und sicherer, als nach jener (V wird; so sieht man, wie wichtig es bei Versuchen und Beobachtungen ist, diese, wenn es nur irgend seyn kann, in gleichen Abständen zu machen.

Wären in dem obigen Beispiele die Volumina des Wassers für gleichweit abstehende Thermometergrade, z. B. für $x_1 = 10$, $x_2 = 13$, $x_3 = 16$ und $x_4 = 19$ Grad gegeben, wofür man $y_1 = 1{\cdot}0^3 19583$, $y_2 = 1{\cdot}0^3 45878$, $y_3 = 1{\cdot}0^3 82908$ und $y_4 = 1{\cdot}0^2 130451$ hat; so würde man, wenn nur die bedeutenden Ziffern der acht Decimalstellen angesetzt werden, $\Delta^1 y_1 = 26295$, $\Delta^2 y_1 = 10735$, $\Delta^3 y_1 = -222$ finden, und sofort wegen $v = 13 - 10 = 3$, $u = x - x_1 = 15 - 10 = 5$, aus dieser Formel (VI für $x = 15$, $y = 1{\cdot}0^3 69386$ erhalten. Dieser Werth ist richtiger als die oben gefundenen, und dabei viel leichter berechnet worden.

werden, ist für sich klar; Zähler und Nenner eines jeden dieser Brüche bestehen aus so vielen Binomial-Factoren, als Gröfsen x_1, x_2, x_3, . . . vorhanden sind *). Werden diese Werthe, welche in der Anwendung bequem mittelst Logarithmen berechnet werden können, in dem obigen Ausdruck (α substituirt; so erhält man die von *Lagrange* herrührende Interpolationsformel **).

*) Dieses ist offenbar die einfachste Art, die Gröfsen X_1, X_2, . . . den obigen Bedingungen gemäfs auszudrücken. Da aber dieselben Bedingungen noch auf unzählige Arten erreicht werden können, indem man z. B. auch die Binomial-Factoren zu was immer für ganze Potenzen erheben, also z. B. schreiben kann: $X_1 = \frac{(x - x_2)^m (x - x_3)^n \ldots}{(x_1 - x_2)^m (x_1 - x_3)^n \ldots}$, etc., oder indem man andere Functionen wählen, und z. B. setzen kann:

$$X_1 = \frac{\sin.m\,(x - x_2)\,\sin.n\,(x - x_3)\,\sin.p\,(x - x_4)\ldots}{\sin.m\,(x_1 - x_2)\,\sin.n\,(x_1 - x_3)\,\sin.p\,(x_1 - x_4)\ldots}\ \text{u.s.w.};$$

so wird auch dadurch wieder der Beweis geliefert, dafs das Problem der Interpolation ein unbestimmtes ist.

**) Mehreres über diesen Gegenstand findet man noch in *Laplace's* Wahrscheinlichkeitsrechnung; *Lacroix's* grofsem Werke (in 4) der Differential- und Integralrechnung, drittem Bande; *Gergonne's* Annalen der Mathem., T. 6, u. s. w. Auch findet man für gewisse Fälle ein bemerkenswerthes Interpolations-Verfahren im zweiten Bande (S. 279) des von Dr. *Eduard Schmidt* herausgegebenen trefflichen »Lehrbuches der mathematischen und physischen Geographie.« Göttingen 1830. Ueber die Interpolation solcher Reihen, deren Glieder Producte von äquidifferenten Factoren sind, wie z. B. der Reihe:

$$1,\ \alpha,\ \alpha(\alpha+\beta),\ \alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta),\ \ldots$$

kann man unter andern in *Klügel's* mathematischem Wörterbuche, im zweiten Bande, nachsehen.

Fünftes Capitel.

Von den vorzüglichsten Umwandlungen der Functionen einer Variablen.

§. 101.

Erklärung.

Eine Function umwandeln oder transformiren, heifst dieselbe ohne Veränderung ihres Werthes auf eine andere Form bringen; dabei behält man entweder die nämliche variable Gröfse bei, oder man substituirt dafür eine neue, welche mit der ersten in irgend einer angenommenen Beziehung steht.

Wir werden hier blofs von den wichtigsten Transformationen der ersten Art, mittelst welchen eine gegebene Function bequemer zu berechnen, oder hinsichtlich gewisser Eigenschaften leichter zu untersuchen ist, handeln; dagegen die Transformation durch Substitution, welche das Vereinfachen, vorzüglich aber das Rationalmachen irrationaler und in einigen Fällen das Entwickeln unentwickelter Functionen (§. 1., Erkl. 3.) zum Zwecke hat, sogleich am betreffenden Orte in ihrer Anwendung zeigen.

Zu den vorzüglichsten Transformationen der ersten Art gehören: I. das Zerlegen der rationalen ganzen Functionen in einfache oder quadratische Factoren; II. das Auflösen oder Zerlegen der rationalen gebrochenen Functionen in Partialbrüche; und III. das Auflösen oder Entwickeln der Functionen überhaupt in unendliche Reihen.

I. Zerlegung ganzer, rationaler Functionen in Factoren.

§. 102.

Die allgemeine Form einer jeden ganzen rationalen Function einer Variablen ist (§. 1., Erkl. 5.)

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

Setzt man demnach das Polynom, um dasselbe in die einfachen oder quadratischen Factoren aufzulösen, gleich Null, und sucht, wenn es bei den gegebenen Coefficienten möglich ist, nach dem dritten Capitel die Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ dieser Gleichung; so hat man für die gesuchte Zerlegung: $y = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots$ Da aber die Wurzeln reell oder imaginär, und im ersten Falle auch gebrochen seyn können; so haben die reellen einfachen Factoren die Form $a - bx$, so wie die von ein paar conjugirte imaginäre Wurzeln herrührende quadratische Factoren die Form $a + bx + cx^2$.

Beispiel.

Es sey $y = 36 - 42x - 20x^2 + 7x^3 - 6x^4$ die gegebene Function. Setzt man $6x^4 - 7x^3 + 20x^2 + 42x - 36 = 0$; so findet man für diese Gleichung die Wurzeln (§. 62.):

$$x = +\tfrac{2}{3}, \; -\tfrac{3}{2} \text{ und } 1 \pm \sqrt{-5};$$

es ist daher

$$x^4 - \tfrac{7}{6}x^3 + \tfrac{20}{6}x^2 + \tfrac{42}{6}x - \tfrac{36}{6}$$
$$= (x-\tfrac{2}{3})(x+\tfrac{3}{2})(x-1+\sqrt{-5})(x-1-\sqrt{-5}),$$

also auch:

$$y = (-2+3x)(3+2x)(6-2x+x^2).$$

II. Zerlegung rationaler, gebrochener Functionen in Partialbrüche.

§. 103.

Da man jede unecht gebrochene Function (§. 1., Erklärung 5.) durch eine vorläufige Division in eine ganze und eine echt gebrochene Function zerlegen kann; so werden wir bei den folgenden Untersuchungen immer echt gebrochene Functionen, bei welchen überdiefs Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Factor mehr besitzen sollen, voraussetzen.

Wäre z. B. die unecht gebrochene Function gegeben

$$y = \frac{1 + x - 5x^2 + 6x^3}{2 + 3x - 2x^2},$$

so wäre auch:

$$6x^3 - 5x^2 + x + 1 : -2x^2 + 3x + 2 = -3x - 2 + \frac{5 + 13x}{2 + 3x - 2x^2},$$

also $y = -(2 + 3x) + \dfrac{5 + 13x}{2 + 3x - 2x^2}$,

wobei die Bruchfunction jetzt offenbar echt gebrochen ist.

Um nun die gebrochene Function

$$y = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots + \alpha_n x^{n-1}}{\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \ldots + \beta_{n+1} x^n} = \frac{Z}{N}$$

in Partialbrüche zu zerlegen, mufs man fürs Erste den Nenner derselben in seine einfachen Factoren auflösen; je nach der Beschaffenheit dieser Factoren unterscheiden wir bei unserer Entwickelung folgende Fälle: Der Nenner N besteht A) aus lauter ungleichen einfachen Factoren, welche entweder a) sämmtlich reell, oder b) zum Theil auch imaginär sind; oder der Nenner N besitzt B) auch gleiche Factoren.

A) Wenn N aus lauter ungleichen einfachen Factoren besteht.

a) Wenn diese zugleich sämmtlich reell sind.

§. 104.

Es seyen $a_1 - b_1 x$, $a_2 - b_2 x$, ... $a_n - b_n x$ die nach §. 102. gefundenen einfachen oder Binomial-Factoren des

Nenners N, so daſs $N=(a_1-b_1x)(a_2-b_2x)\ldots(a_n-b_nx)$ ist. Man setze:

$$\frac{Z}{N}=\frac{A_1}{a_1-b_1x}+\frac{A_2}{a_2-b_2x}+\ldots+\frac{A_n}{a_n-b_nx};$$

wird diese Gleichung mit N multiplicirt und für Z der obige Werth substituirt, so erhält man die identische Gleichung:

$$\begin{aligned} m)\ldots \alpha_1+\alpha_2x+\ldots+\alpha_nx^{n-1} = \\ A_1(a_2-b_2x)(a_3-b_3x)\ldots(a_n-b_nx) \\ +A_2(a_1-b_1x)(a_3-b_3x)\ldots(a_n-b_nx) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +A_n(a_1-b_1x)(a_2-b_2x)\ldots(a_{n-1}-b_{n-1}x). \end{aligned}$$

Werden im zweiten Theile derselben die einzelnen Producte, deren jedes aus $n-1$ einfachen Factoren besteht, entwickelt, und wird alles nach steigenden Potenzen von x geordnet; so erhält man genau so, wie im ersten Theile, n Glieder, welche zu den Potenzen von $x^0, x^1, \ldots x^{n-1}$ gehören, so, daſs man durch die Vergleichung der gleichnamigen Coefficienten (§. 2.) n, d. i. genau so viele Gleichungen zur Bestimmung der angenommenen Zähler $A_1, A_2, \ldots A_n$ erhält, als solche unbestimmte Gröſsen vorhanden sind.

Beispiel 1.

Um die gebrochene Function $\frac{1}{1-x^2}$ in Partialbrüche zu zerlegen, hat man $1-x^2=(1+x)(1-x)$. Man setze also:

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{A_1}{1+x}+\frac{A_2}{1-x},$$

daraus folgt:

$$1=A_1(1-x)+A_2(1+x) \text{ oder } 1=(A_1+A_2)+(A_2-A_1)x;$$

also ist

$$A_1+A_2=1 \text{ und } A_2-A_1=0, \text{ folglich } A_2=\tfrac{1}{2},\ A_1=\tfrac{1}{2}.$$

Man hat daher endlich:

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{2(1-x)}.$$

Beispiel 2.

Für die Function

$$\frac{2+4x-x^2}{3-x-8x^2-4x^3},$$

bei welcher, wie man leicht findet, der Nenner aus den Factoren $(1+x)(3+2x)(1-2x)$ besteht, setze man

$$\frac{2+4x-x^2}{3-x-8x^2-4x^3}=\frac{A_1}{1+x}+\frac{A_2}{3+2x}+\frac{A_3}{1-2x}.$$

Durch das Wegschaffen der Brüche erhält man:

$$p) \ldots 2+4x-x^2=A_1(3+2x)(1-2x)$$
$$+A_2(1+x)(1-2x)+A_3(1+x)(3+2x),$$

oder auch

$$2+4x-x^2=\left.\begin{matrix}3A_1\\A_2\\3A_3\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}-4A_1\\-A_2\\+5A_3\end{matrix}\right\}x\left.\begin{matrix}-4A_1\\-2A_2\\+2A_3\end{matrix}\right\}x^2.$$

Aus dieser identischen Gleichung folgt nun:

$$3A_1+A_2+3A_3=2,$$

$$-(4A_1+A_2-5A_3)=4 \text{ und } -(4A_1+2A_2-2A_3)=-1,$$

und aus diesen Gleichungen endlich:

$$A_1=-1,\ A_2=\tfrac{25}{8},\ A_3=\tfrac{5}{8}.$$

Man hat also:

$$\frac{2+4x-x^2}{3-x-8x^2-4x^3}=-\frac{1}{1+x}+\frac{25}{8(3+2x)}+\frac{5}{8(1-2x)}.$$

Anmerk. 1. Auf die Eigenschaft gestützt, daſs erstens die unbestimmten Gröſsen $A_1, A_2, \ldots A_n$ von x ganz unabhängig sind, diese also, wenn sie bei was immer für einen Werth von x bestimmt werden, auch für alle übrigen Werthe von x gelten; und daſs zweitens im zweiten Theile der obigen Gleichung m) in jedem Gliede einer der Binomial-Factoren nicht vorkommt, dieser dagegen in allen übrigen Gliedern erscheint: kann man die Gröſsen A_1, $A_2, \ldots A_n$ unmittelbar aus der Gleichung m), ohne erst die angezeigten Multiplicationen verrichten zu müssen, auf folgende Art bestimmen.

Setzt man, um A_1 zu finden, den Factor a_1-b_1x (den betreffenden Nenner), welcher im ersten Gliede nicht, wohl aber in allen übrigen vorkommt, $=$ Null, d. i. $x=\frac{a_1}{b_1}$; so ver-

schwinden im zweiten Theile, das erste Glied ausgenommen, alle folgenden, und man hat sofort eine Gleichung mit der einzigen Unbekannten A_1. Auf die nämliche Art wird man, um der Reihe nach A_2, A_3, ... A_n zu bestimmen, nach und nach $a_2 - b_2 x$, $a_3 - b_3 x$, ... $a_n - b_n x$ gleich Null, d. i. $x = \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots \frac{a_n}{b_n}$ setzen, und dadurch immer eine Gleichung mit der einzigen betreffenden Unbekannten A_2, A_3, ... A_n erhalten.

So hat man im zweiten Beispiele aus der Gleichung p) für $1 + x$ (den Nenner von A_1) $= 0$: $x = -1$, also $2 - 4 - 1 = 3A_1$, und daraus $A_1 = -1$. Für $3 + 2x = 0$ oder $x = -\frac{3}{2}$ folgt $2 - 6 - \frac{9}{4} = -2A_2$, und daraus $A_2 = \frac{25}{8}$. Endlich ist für $1 - 2x$ (als Nenner von A_3) $= 0$ oder $x = \frac{1}{2}$: $2 + 2 - \frac{1}{4} = 6A_3$, also $A_3 = \frac{5}{8}$, wie oben. Dieses Verfahren läfst sich in allen hieher gehörigen Fällen mit dem gröfsten Vortheile anwenden.

Anmerk. 2. Findet man eine der Gröfsen A_1, A_2, ... A_n, z. B. A_p gleich Null, so ist diefs ein Zeichen, dafs der Factor $(a_p - b_p x)$ von N, welcher den Nenner von A_p bildet, auch in Z enthalten ist, so, dafs sich der gegebene Bruch $\frac{Z}{N}$ durch diesen gemeinschaftlichen Factor abkürzen läfst. Ein Beispiel hiezu ist der Bruch $\frac{3 - 4x + x^2}{2 - 5x + x^2 + 2x^3}$.

b) Wenn der Nenner auch imaginäre einfache Factoren besitzt.

§. 105.

In diesem Falle bilde man aus jedem Paar conjugirten einfachen Factoren den quadratischen, welcher, wenn $x = p \pm q\sqrt{-1}$ das betreffende Paar conjugirter Wurzeln ist (§. 28., Zus. 1.), die Form $(x - p)^2 + q^2 = a + bx + cx^2$ hat, nehme diesen als Nenner eines der Partialbrüche, und gebe ihm einen Zähler von der Form $A + Bx$.

Beispiel.

Um die Bruchfunction

$$\frac{2 - x^2}{-5 + 9x - 5x^2 + x^3}$$

in Partialbrüche zu zerlegen, hat man

$$N = -5 + 9x - 5x^2 + x^3 = (x-1)(x-2+\sqrt{-1})(x-2-\sqrt{-1})$$
$$= (x-1)(5-4x+x^2).$$

Man setze daher

$$\frac{2-x^2}{-5+9x-5x^2+x^3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A+Bx}{5-4x+x^2},$$

so wird:

$$2 - x^2 = A_1(5-4x+x^2) + A(x-1) + Bx(x-1),$$

und daraus erhält man, wenn man, anstatt nach der im vorigen Paragraphe gegebenen allgemeinen Regel zu verfahren, d. i. anstatt die Multiplicationen zu verrichten und nach x zu ordnen, die vorhin gemachte Bemerkung (Anmerk. 1.) benützt, für $x - 1 = 0$ oder $x = 1$: $1 = 2A_1$, also $A_1 = \frac{1}{2}$; für $x = 0$: $2 = \frac{5}{2} - A$, also $A = \frac{1}{2}$; und endlich, wenn man für A_1 und A die gefundenen Werthe in die obige Gleichung substituirt und reducirt: $\frac{3}{2}(x - x^2) = Bx(x-1)$, und daraus $B = -\frac{3}{2}$.

Es ist demnach

$$\frac{2-x^2}{-5+9x-5x^2+x^3} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1-3x}{2(5-4x+x^2)}.$$

Anmerk. Wollte man aber diesen letzten Bruch noch weiter zerlegen, so müſste man setzen

$$\frac{1-3x}{5-4x+x^2} = \frac{A_1}{x-2+\sqrt{-1}} + \frac{A_2}{x-2-\sqrt{-1}},$$

woraus man auf dieselbe Art

$$A_1 = \frac{5-3\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} \quad \text{und} \quad A_2 = \frac{-5-3\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}},$$

nämlich Alles imaginär fände.

B) Wenn *N* auch *gleiche* Factoren enthält.

§. 106.

1. Es sey $N = S(a-bx)^m$, wobei S, welche Gröſse wir in Bezug auf x von der $n-m^{\text{ten}}$ Ordnung annehmen, den Factor $a - bx$ nicht mehr enthalten soll. Um die aus den m gleichen Factoren $a - bx$ entspringenden Partialbrüche zu bestimmen, setze man:

$$\frac{Z}{N} = \frac{P}{S} + \frac{B_1}{(a-bx)^m} + \frac{B_2}{(a-bx)^{m-1}} + \ldots + \frac{B_m}{a-bx},$$

wobei also P höchstens von der Ordnung $n-m-1$ seyn darf. Durch das Wegschaffen der Brüche entsteht die Gleichung:

$$q) \ldots Z = P(a-bx)^m + B_1 S + B_2 S(a-bx) + \ldots \\ \ldots + B_m S(a-bx)^{m-1}.$$

Da nun sowohl der erste Theil dieser Gleichung oder Z in Bezug auf x von der $n-1^{\text{sten}}$ Ordnung ist, und auch der zweite Theil, wenn man multiplicirt und nach x ordnet, alle Potenzen x^0, x^1, ... bis x^{n-1} enthält, also in jedem Theile n Glieder vorkommen; so erhält man durch Vergleichung der gleichnamigen Coefficienten abermals n Gleichungen, von denen m zur Bestimmung der Gröſsen B_1, B_2, ... B_m, und die übrigen $n-m$, wenn man sogleich auch die Bruchfunction $\frac{P}{S}$ in ihre $n-m$ Partialbrüche zerlegen will, zur Bestimmung der betreffenden Zähler A_1, A_2, ... A_{n-m} dienen.

Beispiel.

Es sey die gebrochene Function

$$\frac{3-2x+4x^2}{x^4+x^3-x^2-x}$$

in Partialbrüche zu zerlegen. Da der Nenner aus den einfachen Factoren $x(x-1)(x+1)^2$ besteht, so setze man

$$\frac{3-2x+4x^2}{x^4+x^3-x^2-x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{x+1};$$

aus dieser Gleichung folgt:

$$r) \ldots 3-2x+4x^2 = A_1(x-1)(x+1)^2 + A_2 x(x+1)^2 \\ + B_1 x(x-1) + B_2 x(x-1)(x+1)$$

oder

$$3-2x+4x^2 = -A_1 \left.\begin{matrix} -A_1 \\ +A_2 \\ -B_1 \\ -B_2 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} A_1 \\ 2A_2 \\ B_1 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{matrix}\right\} x^3,$$

woraus man sofort erhält:

$$-A_1=3;\ -A_1+A_2-B_1-B_2=-2;\ A_1+2A_2+B_1=4;$$
$$A_1+A_2+B_2=0;$$

oder endlich, wenn man diese Gleichungen auflöst:

$$A_1=-3,\ A_2=\tfrac{5}{4},\ B_1=\tfrac{9}{2}\ \text{und}\ B_2=\tfrac{7}{4};$$

es ist daher

$$\frac{3-2x+4x^2}{x^4+x^3-x^2-x}=-\frac{3}{x}+\frac{5}{4(x-1)}+\frac{9}{2(x+1)^2}+\frac{7}{4(x+1)}.$$

Anmerk. Eine ähnliche Vereinfachung in der Berechnung der unbestimmten Zähler, wie die im §. 104., Anmerk. 1. angegebene, ist auch in dem gegenwärtigen Falle möglich; wir wollen das diefsfällige Verfahren sogleich wieder an dem eben behandelten Beispiele erläutern.

Setzt man in der Gleichung r) $x=0$, so wird, da die drei letzten Glieder verschwinden, $3=-A_1$ oder $A_1=-3$. Setzt man ferner $x-1=0$, also $x=1$; so entsteht $5=4A_2$ oder $A_2=\frac{5}{4}$. Für $x+1=0$ oder $x=-1$ erhält man $9=2B_1$, also $B_1=\frac{9}{2}$. Substituirt man endlich diese gefundenen Werthe für A_1, A_2 und B_1, und reducirt gehörig; so wird $\frac{7}{4}x(x^2-1)=B_2 x(x^2-1)$, also $B_2=\frac{7}{4}$; wie wir diese Werthe auch vorhin gefunden haben.

Wäre B_2 nicht der letzte zu bestimmende Zähler, sondern z. B. auch noch B_3 vorhanden, welcher also in der Gleichung r) nebst andern mit dem Factor $(x+1)^2$ verbunden seyn müfste; so würde man, da nach der Substitution und Reduction der Werthe von A_1, A_2 und B_1 die Gleichung r) durch den Factor $x+1$ theilbar seyn mufs (indem es der zweite Theil ist), durch diesen dividiren, wodurch B_2 von diesem Factor befreit wird, während ihn B_3 noch in der ersten Potenz behält, und dann $x+1=0$, d. i. wieder $x=-1$ setzen, um B_2 zu bestimmen. Dasselbe Verfahren wird blofs weiter wiederholt, wenn der Factor $x+1$ in einer noch höhern Potenz vorkommen sollte. Befinden sich auch in diesem vorliegenden Falle unter den einfachen Factoren des Nenners imaginäre; so bringt man, wie im vorigen, die betreffenden quadratischen Factoren in Rechnung.

So findet man z. B. für die Bruchfunction $\frac{1}{x^8+x^7-x^4-x^3}$:

$$N=x^3(x+1)^2(x-1)(x^2+1),$$

und für

$$\frac{Z}{N}=\frac{A_1}{x^3}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x}+\frac{B_1}{(x+1)^2}+\frac{B_2}{x+1}+\frac{C}{x-1}+\frac{D+Ex}{x^2+1}:$$

$A_1=-1$, $A_2=1$, $A_3=-1$, $B_1=\frac{1}{4}$, $B_2=\frac{9}{8}$, $C=\frac{1}{8}$, $D=-\frac{1}{4}$ und $E=-\frac{1}{4}$;

also:

$$\frac{1}{x^8+x^7-x^4-x^3}=-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{4(x+1)^2}$$
$$+\frac{9}{8(x+1)}+\frac{1}{8(x-1)}-\frac{1+x}{4(x^2+1)}.$$

2. Das Vorhergehende gibt nun auch von selbst das nöthige und einfachste Verfahren an die Hand, wenn der sich wiederholende Factor ein quadratischer oder trinomischer ist; wir wollen dasselbe sogleich durch ein Beispiel erläutern.

Beispiel.

Um die Bruchfunction

$$\frac{Z}{N}=\frac{4x-7x^2-2x^5}{(1+x^2)^3(5-2x^4)}$$

in Partialbrüche zu zerlegen, setze man

$$\frac{Z}{N}=\frac{A_1+B_1x}{(1+x^2)^3}+\frac{A_2+B_2x}{(1+x^2)^2}+\frac{A_3+B_3x}{1+x^2}+\frac{P}{5-2x^4};$$

so folgt, wenn man die Brüche wegschafft:

$$\begin{aligned}4x-7x^2-2x^5&=(A_1+B_1x)(5-2x^4)\\&+(A_2+B_2x)(1+x^2)(5-2x^4)\\&+(A_3+B_3x)(1+x^2)^2(5-2x^4)+P(1+x^2)^3.\end{aligned}$$

Setzt man nun in dieser Gleichung $1+x^2=0$, d. i. $x=\sqrt{-1}$, so erhält man

$$7+2\sqrt{-1}=3A_1+3B_1\sqrt{-1},$$

und daraus (durch gehörige Gleichsetzung der reellen und imaginären Glieder):

$$A_1=\tfrac{7}{3}\text{ und }B_1=\tfrac{2}{3}.$$

Werden diese Werthe in der vorigen Gleichung substituirt, die entstehenden Glieder mit jenen im ersten Theile der Gleichung reducirt, und wird hierauf die ganze Gleichung (was auch im ersten Theile ohne Rest möglich seyn

mufs) durch $1+x^2$ dividirt; so erhält man die Gleichung:

$$-\tfrac{35}{3}+\tfrac{2}{3}x+\tfrac{14}{3}x^2-\tfrac{2}{3}x^3=$$
$$(A_2+B_2x)(5-2x^4)+(A_3+B_3x)(1+x^2)(5-2x^4)+P(1+x^2)^2.$$

Setzt man in dieser wieder $1+x^2=0$ oder $x=\sqrt{-1}$, so entsteht:

$$-\tfrac{49}{3}+\tfrac{4}{3}\sqrt{-1}=3A_2+3B_2\sqrt{-1},$$

woraus sofort folgt:

$$A_2=-\tfrac{49}{9} \text{ und } B_2=\tfrac{4}{9}.$$

Werden diese Werthe wieder in der letzten Gleichung substituirt, die entstehenden Glieder mit jenen des ersten Theiles reducirt, so wird die ganze Gleichung abermals durch $1+x^2$ theilbar, und man erhält nach dieser Division die Gleichung:

$$\tfrac{140}{9}-\tfrac{14}{9}x-\tfrac{98}{9}x^2+\tfrac{8}{9}x^3=(A_3+B_3x)(5-2x^4)+P(1+x^2),$$

aus welcher sofort wieder, wenn man abermals $x=\sqrt{-1}$, also $1+x^2=0$ setzt,

$$\tfrac{238}{9}-\tfrac{22}{9}\sqrt{-1}=3A_3+3B_3\sqrt{-1},$$

und aus dieser Relation

$$A_3=\tfrac{238}{27} \text{ und } B_3=-\tfrac{22}{27}$$

folgt.

Mit diesen Werthen verwandelt sich die letzte Gleichung, wenn man reducirt und dann die ganze Gleichung wieder durch $1+x^2$ dividirt, in folgende:

$$-\tfrac{770}{27}+\tfrac{68}{27}x+\tfrac{476}{27}x^2-\tfrac{44}{27}x^3=P,$$

so, dafs nunmehr Alles bestimmt, und sofort

$$\frac{4x-7x^2-2x^5}{(1+x^2)^3(5-2x^4)}=\frac{7+2x}{3(1+x^2)^3}-\frac{49-4x}{9(1+x^2)^2}+\frac{238-22x}{27(1+x^2)}$$
$$-\frac{770-68x-476x^2+44x^3}{27(5-2x^4)}$$

ist.

§. 107.

Es wird nicht uninteressant seyn, wenn wir zur Bestimmung der Partialbrüche auch die *Euler*'sche Methode ganz kurz anführen. Wir unterscheiden dabei ebenfalls die zwei Hauptfälle *A*) und *B*).

A) Es sey wieder unter den obigen Bedingungen $\frac{Z}{N}$ die gegebene gebrochene Function, und $N = (a - bx) S$; wo S den Factor $a - bx$ nicht mehr, aber alle übrigen Factoren des Nenners enthalten soll. Um nun den Zähler A für den als Nenner dienenden Factor $a - bx$ zu finden, setze man

$$\frac{Z}{N} = \frac{A}{a - bx} + \frac{P}{S},$$

wo, wenn diese Zerlegung möglich seyn soll, P eine ganze Function von x seyn mufs. Aus dieser Gleichung folgt aber

$$Z = AS + P(a - bx) \quad \text{und} \quad P = \frac{Z - AS}{a - bx};$$

es mufs also $Z - AS$ durch $a - bx$ theilbar seyn, oder, was dasselbe ist, den Factor $a - bx$ enthalten. Es wird daher für jenen Werth von x, für welchen $a - bx = 0$ wird, d. i. für $x = \frac{a}{b}$, auch $Z - AS = 0$ seyn, woraus aber $A = \frac{Z}{S}$, und sofort zugleich die Regel für die Bestimmung des dem Factor $a - bx$ entsprechenden Zählers A folgt.

Ganz auf dieselbe Art bestimmt man auch die Zähler der übrigen Factoren; dabei erhält $a - bx$ nach und nach die Werthe der übrigen Factoren von N, wodurch nun auch S seinen Werth successive ändert.

B e i s p i e l.

Es sey die Bruchfunction

$$\frac{6 + 40x + 40x^2 + 10x^3}{6x + 11x^2 + 6x^3 + x^4}$$

in Partialbrüche aufzulösen.

Da der Nenner aus den Factoren $x(x+1)(x+2)(x+3)$ besteht, so hat man zur Bestimmung des Zählers für den Factor x: $S = (x+1)(x+2)(x+3)$ und $A = \frac{Z}{S}$ für $x = 0$ (d. i. den betreffenden Factor gleich Null gesetzt und daraus x bestimmt); folglich $A = \frac{6}{6} = 1$. Für den Factor $x + 1$ ist $S = x(x+2)(x+3)$ und $A = \frac{Z}{S}$ für $x = -1$ ($x + 1 = 0$);

also $A = \frac{-4}{-2} = 2$. Für den Factor $x+2$ ist $S = x(x+1)(x+3)$ und $A = \frac{Z}{S}$ für $x = -2\,(x+2=0)$; folglich $A = \frac{6}{2} = 3$. Für den Factor $x+3$ endlich hat man $S = x(x+1)(x+2)$ und $A = \frac{Z}{S}$ und zwar für $x = -3\,(x+3=0)$; also ist $A = \frac{-24}{-6} = 4$. Es ist demnach die gegebene Function:

$$\frac{Z}{N} = \frac{1}{x} + \frac{2}{1+x} + \frac{3}{2+x} + \frac{4}{3+x}.$$

§. 108.

B) Das im vorigen Paragraphe aufgestellte Verfahren kann offenbar nur gelten, wenn S den Factor $a-bx$ nicht mehr enthält, dieser Factor sich also in N nicht öfter als Einmal vorfindet; weil sonst, da Z und N der Voraussetzung gemäſs keinen gemeinschaftlichen Factor mehr enthalten, in dem Ausdrucke $P = \frac{Z-AS}{a-bx}$ der Factor $a-bx$ in Z nicht, wohl aber in AS enthalten wäre, wodurch $Z-AS$ nicht durch $a-bx$ theilbar, also P keine ganze Function von x seyn könnte.

Ist daher $N = (a-bx)^m S$, wo $a-bx$ in S nicht mehr vorkommt, so setze man:

$$\frac{Z}{N} = \frac{A_1}{(a-bx)^m} + \frac{A_2}{(a-bx)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{a-bx} + \frac{P}{S}.$$

Aus dieser Annahme folgt

$$Z = A_1 S + A_2 S(a-bx) + \ldots$$
$$\ldots + A_m S(a-bx)^{m-1} + P(a-bx)^m$$

oder auch

$$s) \ldots \frac{Z - A_1 S}{a-bx} = A_2 S + A_3 S(a-bx) + \ldots$$
$$\ldots + A_m S(a-bx)^{m-2} + P(a-bx)^{m-1}.$$

Da nun $A_2, A_3, \ldots A_m$ und P ganze Functionen von x seyn müssen, so muſs $Z - A_1 S$ durch $a-bx$ theilbar seyn, also den Factor $a-bx$ enthalten; für $a-bx=0$ oder

$x = \frac{a}{b}$ wird also auch $Z - A_1 S = 0$, demnach für diesen Werth von x: $A_1 = \frac{Z}{S}$.

Setzt man der Kürze wegen $\frac{Z - A_1 S}{a - bx} = Z_1$, so folgt aus s) ferner:

$$\frac{Z_1 - A_2 S}{a - bx} = A_3 S + A_4 S(a - bx) + \ldots$$
$$\ldots + A_m S(a - bx)^{m-3} + P(a - bx)^{m-2},$$

und da hier wieder derselbe Schlufs gilt, so mufs eben so für $x = \frac{a}{b}$, $Z_1 - A_2 S = 0$, d. i. $A_2 = \frac{Z_1}{S}$ seyn.

Auf dieselbe Art wird, wenn man $\frac{Z_1 - A_2 S}{a - bx} = Z_2$ setzt: $A_3 = \frac{Z_2}{S}$, in diesem Bruche aber $x = \frac{a}{b}$ genommen; u. s. w.

Beispiel.

Um die gebrochene Function

$$\frac{2 - x + 2x^2 - x^4}{x^3(1 + x)(1 - x)}$$

in Partialbrüche zu zerlegen, hat man, wenn zuerst die Brüche gesucht werden, welche aus dem Factor x^3 entspringen: $S = (1 + x)(1 - x)$ und $A_1 = \frac{Z}{S}$, für $x = 0$; also $A_1 = \frac{2}{1} = 2$. Ferner ist $Z_1 = \frac{Z - A_1 S}{a - bx} = \frac{-x + 4x^2 - x^4}{x}$ $= -1 + 4x - x^3$ und $A_2 = \frac{Z_1}{S}$, für $x = 0$; demnach $A_2 = \frac{-1}{1} = -1$. Endlich ist $Z_2 = \frac{Z_1 - A_2 S}{a - bx} = \frac{4x - x^2 - x^3}{x}$ $= 4 - x - x^2$ und $A_3 = \frac{Z_2}{S}$, für $x = 0$; also $A_3 = \frac{4}{1} = 4$.

Weiters hat man nach dem vorigen Paragraphe für den Factor $1 + x$: $S = x^3(1 - x)$ und $A = \frac{Z}{S}$, für $x = -1\,(x + 1 = 0)$; also $A = \frac{4}{-2} = -2$. Für den Factor $1 - x$ endlich ist $S = x^3(1 + x)$ und $A = \frac{Z}{S}$, für $x = 1\,(1 - x = 0)$; also

$A = \frac{2}{2} = 1$. Es ist daher

$$\frac{2 - x + 2x^2 - x^4}{x^3(1+x)(1-x)} = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} - \frac{2}{1+x} + \frac{1}{1-x}.$$

Anmerk. Man sieht leicht, daſs die in den §§. 104. und 106. (Anmerk.) angegebenen Abkürzungen, dem Wesen nach, mit diesem *Euler*'schen Verfahren übereinstimmen.

III. Entwickelung der Functionen in unendliche Reihen.

§. 109.

Um die Vortheile, welche die einfache Form der ganzen rationalen Functionen darbietet, auch auf die übrigen Functionen ausdehnen zu können, verwandelt man diese in unendliche Reihen, deren Glieder die besagte einfache Form besitzen. Gelingt es, die Reihe gut convergirend zu machen, so, daſs einige erste Glieder derselben schon nahe genug den Werth der ganzen Reihe geben; so ist der Zweck so gut wie möglich erreicht. Oft ist die Auflösung der Functionen in unendliche Reihen das letzte Zufluchtsmittel, um dieselben näherungsweise berechnen zu können.

Es werden also hauptsächlich jene Reihen zu betrachten seyn, welche erstens aus den rationalen gebrochenen Functionen, zweitens aus den irrationalen, und drittens aus den transcendenten Functionen entspringen können. Wir werden in diesem Capitel nur von den zuerst genannten Reihen handeln, und die letztern aus transcendenten Functionen entstehenden Reihen, in eigenen Capiteln besonders vortragen. Was die Reihen betrifft, welche aus irrationalen Functionen entstehen, so sind diese in dem, was in den §§. 11. und 13. vorgetragen wurde, schon enthalten. Denn jedes irrationale Polynom läſst sich auf die Form $(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots)^{\frac{m}{n}}$ bringen, und dieses, wie wir (§. 11.) gesehen haben, in eine Reihe von der Form $A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots$ auflösen.

Die aus gebrochenen Functionen entstehenden *recurrenten* oder *wiederkehrenden* Reihen.

§. 110.

Dafs sich eine jede rationale gebrochene Function in eine unendliche Reihe von der Form $A + Bx + Cx^2 + \ldots$ entwickeln lasse, ist schon im §. 3., *c*) gezeigt worden. Um aber die Bildungsgesetze und die sonstigen Eigenschaften dieser Reihen kennen zu lernen, wollen wir diese ausführlicher entwickeln, und machen sofort mit der einfachsten Form dieser Brüche den Anfang.

Es sey also $\frac{A_1}{a_1 + a_2 x}$ die gegebene, rationale, echt gebrochene Function. Man setze

$$\frac{A_1}{a_1 + a_2 x} = A + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots + t_n x^n + t_{n+1} x^{n+1} + \ldots,$$

so erhält man durch das Wegschaffen des Nenners:

$$A_1 = A a_1 + \left.\begin{matrix} t_1 a_1 \\ A a_2 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} t_2 a_1 \\ t_1 a_2 \end{matrix}\right\} x^2 + \ldots + \left.\begin{matrix} t_{n+1} a_1 \\ t_n a_2 \end{matrix}\right\} x^{n+1} + \ldots$$

also, da A, t_1, t_2, ... von x unabhängige Coefficienten sind (§. 2.):

$$a) \ldots A a_1 = A_1, \quad t_1 a_1 + A a_2 = 0, \quad t_2 a_1 + t_1 a_2 = 0, \ldots$$
$$t_{n+1} a_1 + t_n a_2 = 0,$$

und aus diesen Gleichungen erhält man die Werthe der angenommenen unbestimmten Coefficienten, und zwar:

$$A = \frac{A_1}{a_1}, \quad t_1 = -\frac{a_2}{a_1} A, \quad t_2 = -\frac{a_2}{a_1} t_1, \ldots t_{n+1} = -\frac{a_2}{a_1} t_n.$$

Man sieht hieraus, dafs vom zweiten angefangen, jeder folgende Coefficient erhalten wird, indem man den unmittelbar vorhergehenden mit dem beständigen Quotienten $-\frac{a_2}{a_1}$ multiplicirt. Die entstehende Reihe ist demnach (§. 80., Erklär. 7.) eine recurrirende, wiederkehrende oder rücklaufende. Der Quotient $-\frac{a_2}{a_1}$ heifst die Relations-Scala, welche hier Eingliederig ist; die

Reihe selbst wird eine recurrirende der ersten Ordnung genannt.

Man bemerkt leicht, daſs in α) die 2^te^, 3^te^, ... Gleichung ganz überflüssig und jede schon in der letzten oder allgemeinen enthalten ist, oder durch diese vertreten wird; auch kann man den ersten Coefficienten oder $A = \frac{A_1}{a_1}$ immer gleich hinschreiben. Dieſs berücksichtigend, läſst sich aus einer solchen Bruchfunction die recurrirende Reihe ganz kurz herleiten, wie wir sogleich an einem Beispiele zeigen wollen.

Beispiel.

Für die gebrochene Function $\frac{2}{1-x}$ setze man:

$$\frac{2}{1-x} = 2 + \ldots + t_n x^n + t_{n+1} x^{n+1} + \ldots,$$

so wird, wenn man die Gleichung mit dem Nenner $1-x$ multiplicirt:

$$2 = 2 + \ldots + (t_{n+1} - t_n) x^{n+1} + \ldots;$$

man hat also $t_{n+1} - t_n = 0$, und daraus $t_{n+1} = t_n$, als Gesetz der Bildung: es ist nämlich jeder folgende Coefficient seinem nächst vorhergehenden gleich. Dieses Gesetz fängt schon im zweiten Gliede an (weil der Zähler des Bruches sich nur auf x^0 erstreckt); die Relationsscale ist hier gleich $+1$. Die Reihe endlich ist:

$$\frac{2}{1-x} = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots$$

§. 111.

Für einen Bruch von der Form

$$\frac{A_1 + A_2 x}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2}$$

setze man, um nichts Ueberflüssiges zu schreiben:

$$\frac{A_1 + A_2 x}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2} = \frac{A_1}{a_1} + t_1 x + \ldots$$
$$\ldots + t_n x^n + t_{n+1} x^{n+1} + t_{n+2} x^{n+2} + \ldots.$$

so wird:

$$A_1 + A_2 x = A_1 + \left.\begin{matrix} t_1 a_1 \\ \frac{A_1}{a_1} a_2 \end{matrix}\right\} x + \ldots + \left.\begin{matrix} t_{n+2} a_1 \\ t_{n+1} a_2 \\ t_n a_3 \end{matrix}\right\} x^{n+2} + \ldots$$

Die Vergleichung der gleichnamigen Coefficienten gibt $t_1 a_1 + \frac{A_1}{a_1} a_2 = A_2$ und $t_{n+2} a_1 + t_{n+1} a_2 + t_n a_3 = 0$; aus der erstern Gleichung erhält man t_1, und aus der letztern das Gesetz der Bildung, oder

$$t_{n+2} = - \frac{a_2}{a_1} t_{n+1} - \frac{a_3}{a_1} t_n.$$

Die Relationsscale: $-\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_3}{a_1}$ ist hier zweigliederig, weſshalb auch die Reihe eine recurrirende Reihe der zweiten Ordnung genannt wird.

Beispiel.

Für die Function $\frac{1 - 2x}{-2 + x + x^2}$ hat man also:

$$\frac{1 - 2x}{-2 + x + x^2} = -\tfrac{1}{2} + t_1 x + \ldots$$
$$\ldots + t_n x^n + t_{n+1} x^{n+1} + t_{n+2} x^{n+2} + \ldots,$$

daher

$$1 - 2x = -1 - \left.\begin{matrix} 2t_1 \\ -\tfrac{1}{2} \end{matrix}\right\} x + \ldots + \left.\begin{matrix} -2t_{n+2} \\ + t_{n+1} \\ + t_n \end{matrix}\right\} x^{n+2} + \ldots$$

und $-2t_1 - \frac{1}{2} = -2$ oder $t_1 = \frac{3}{4}$; ferner $-2t_{n+2} + t_{n+1} + t_n = 0$, oder das Gesetz der Bildung $t_{n+2} = \frac{t_{n+1} + t_n}{2}$, d. h. es ist vom dritten angefangen (weil sich der Zähler bis auf x^1 erstreckt) jeder folgende Coefficient gleich der halben Summe der beiden nächst vorhergehenden. Man hat also:

$$\frac{1 - 2x}{-2 + x + x^2} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4} x + \tfrac{1}{8} x^2 + \tfrac{7}{16} x^3 + \tfrac{9}{32} x^4 + \ldots$$

§. 112.

Für einen Bruch von der Form $\frac{A_1 + A_2 x + A_3 x^2}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3}$, wobei auch A_2 oder A_3, und im Nenner a_2 oder a_3 Null

seyn können, entsteht eine Reihe der dritten Ordnung. Die Scale wird dreigliederig, und das Gesetz der Bildung fängt, wenn A_3 nicht etwa gleich Null ist, im vierten Gliede der Reihe an.

Beispiel.

Um die gebrochene Function vom Zähler $3 - 2x + x^2$ und Nenner $1 + 2x - 2x^3$ in eine recurrirende Reihe aufzulösen, setze man

$$\frac{3 - 2x + x^2}{1 + 2x - 2x^3} = 3 + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots$$
$$\ldots + t_n x^n + t_{n+1} x^{n+1} + t_{n+2} x^{n+2} + t_{n+3} x^{n+3} + \ldots$$ *),

so folgt, nachdem der Nenner weggebracht worden, durch die Vergleichung der Coefficienten:

$$t_1 + 6 = -2, \quad t_2 + 2t_1 = 1, \quad t_{n+3} + 2t_{n+2} - 2t_n = 0$$
$$\text{oder} \quad t_1 = -8, \quad t_2 = 17,$$

und als Gesetz der Bildung $t_{n+3} = 2t_n - 2t_{n+2}$ (hier ist die dreigliederige Scale: $-2 + 0 + 2$); man findet nämlich vom vierten Gliede angefangen jeden folgenden Coefficienten, indem man vom Zweifachen des dritt vorhergehenden das Doppelte des nächst vorhergehenden Coefficienten abzieht. Es ist also:

$$\frac{3 - 2x + x^2}{1 + 2x - 2x^3} = 3 - 8x + 17x^2 - 28x^3$$
$$+ 40x^4 - 46x^5 + 36x^6 - \ldots$$

§. 113.

Aus den bereits entwickelten Beispielen geht hervor, dafs die echt gebrochene Function

$$\frac{A_1 + A_2 x + \ldots + A_m x^{m-1}}{a_1 + a_2 x + \ldots + a_{m+1} x^m}$$

*) Diese Beispiele zeigen also, dafs man, um so kurz wie möglich zu verfahren, in der Reihe nur so viele erste Glieder als der Zähler, und eben so viele allgemeine Glieder anzunehmen hat, als der Nenner des Bruches Glieder besitzt; die zwischen den beiden äufseren etwa fehlenden Glieder in beiden Fällen mitgerechnet.

eine recurrirende Reihe der m^{ten} Ordnung hervorbringt, deren Relations-Scale mgliederig ist, und bei welcher das Gesetz der Bildung (wenn A_m nicht Null ist) im $m+1^{sten}$ Gliede anfängt.

Um endlich auch ein Beispiel von einer irrationalen Bruchfunction zu geben, sey $\frac{2-\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$ die gegebene Function. Setzt man, da der kleinste gemeinschaftliche Wurzelexponent $=6$ ist, $x^{\frac{1}{6}}=y$; so verwandelt sich die gegebene Function in $\frac{2-y^3}{1+2y^3+y^4}$, welche sofort leicht nach dem Vorhergehenden in eine recurrente Reihe aufgelöst werden kann. Führt man die Entwickelung aus, und substituirt zuletzt für y wieder den Werth in x zurück; so findet man:

$$\frac{2-\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}} = 2-5x^{\frac{3}{6}}-2x^{\frac{4}{6}}+10x+9x^{\frac{7}{6}}+2x^{\frac{8}{6}}-\text{etc.}$$

Anmerk. Hat die gegebene Bruchfunction die Form

$$\frac{A_1+A_2x+\ldots}{a_1x^m+a_2x^{m+1}+\ldots},$$

so zerlegt man diese in die zwei Factoren

$$\frac{1}{x^m}\cdot\frac{A_1+A_2x+\ldots}{a_1+a_2x+\ldots},$$

sucht für den letztern nach dem Vorigen die recurrirende Reihe, und multiplicirt endlich noch jedes Glied derselben mit dem Factor $\frac{1}{x^m}$.

§. 114.

Ist aber umgekehrt die recurrirende Reihe und das Gesetz ihrer Bildung, oder die Relations-Scale gegeben; so kann daraus die gebrochene Function gefunden werden, aus welcher die gegebene Reihe entstanden ist.

Denn ist $t_1+t_2x+t_3x^2+\ldots$ die recurrirende Reihe, und z. B. $t_{n+2}=\frac{B}{A}t_{n+1}-\frac{C}{A}t_n$ das Gesetz der Bildung, oder $\frac{B}{A}-\frac{C}{A}$ die Scale; so hat man sogleich aus der Glei-

chung $At_{n+2} - Bt_{n+1} + Ct_n = 0$ den Nenner, wenn man berücksichtigt, auf welche Weise in den obigen Beispielen immer die Glieder des Nenners mit den angenommenen allgemeinen Gliedern der Reihe durch die Multiplication verbunden werden; dieser ist nämlich $A - Bx + Cx^2$. Setzt man daher, in der Voraussetzung, dafs die gesuchte Function echt gebrochen ist:

$$\frac{A_1 + A_2 x}{A - Bx + Cx^2} = t_1 + t_2 x + \ldots,$$

d. i. gleich der gegebenen Reihe, und bringt den Nenner weg; so geben dann offenbar die beiden ersten, aus der Vergleichung der gleichnamigen Coefficienten entstehenden Gleichungen, die Werthe von A_1 und A_2.

Beispiel.

Es sey $-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x^3 + \ldots$ die recurrirende Reihe, und $t_{n+2} = \frac{1}{2}(t_{n+1} + t_n)$ das Gesetz ihrer Bildung (oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ die Relations-Scale). Diese Gleichung auf Null gebracht, gibt $2t_{n+2} - t_{n+1} - t_n = 0$, und daraus folgt der Nenner der gebrochenen Function: $2 - x - x^2$, oder auch, was gleichgiltig ist: $-2 + x + x^2$.

Setzt man daher (in der steten Voraussetzung, dafs die Function echt gebrochen ist)

$$\frac{A_1 + A_2 x}{-2 + x + x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \ldots,$$

so folgt:

$$A_1 + A_2 x = 1 - \left.\begin{matrix}\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}\end{matrix}\right\} x + \ldots,$$

und daraus $A_1 = 1$, $A_2 = -2$. Es ist daher die gebrochene Function, aus welcher die gegebene Reihe entsteht, d. i. der erzeugende Bruch:

$$\frac{1 - 2x}{-2 + x + x^2}.$$

(M. vergl. das Beisp. in §. 111.) Für den Nenner $2 - x - x^2$ würde man $A_1 = -1$ und $A_2 = 2$, also die Function $\frac{-1 + 2x}{2 - x - x^2}$ gefunden haben; welche mit der vorigen offenbar identisch ist.

Dieses einzige Beispiel ist hinreichend, um das Verfahren in allen Fällen der Art zu erläutern.

§. 115.

Die gebrochene Function kann selbst in dem Falle noch gefunden werden, wenn aufser der recurrirenden Reihe blofs die Anzahl der Theile oder Glieder bekannt ist, aus welchen die Relations-Scale besteht, weil dadurch auch die Form des Bruches gegeben ist.

Beispiel 1.

Um dieses sogleich an einem Beispiele zu zeigen, sey wieder die vorige recurrente Reihe

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{7}{16}x^3 + \ldots$$

nebst dem Umstande gegeben, dafs die Scale zweigliederig ist. Aus dieser Angabe schliefst man auf folgende Form der gebrochenen Function:

$$\frac{A_1 + A_2 x}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2},$$

welche sofort der gegebenen Reihe gleich seyn mufs. Wird dieser Bruch der genannten Reihe gleich gesetzt, und dann der Nenner weggeschafft, so erhält man:

$$A_1 + A_2 x = -\tfrac{1}{2}a_1 + (\tfrac{3}{4}a_1 - \tfrac{1}{2}a_2)x + (\tfrac{1}{8}a_1 + \tfrac{3}{4}a_2 - \tfrac{1}{2}a_3)x^2$$
$$+ (\tfrac{7}{16}a_1 + \tfrac{1}{8}a_2 + \tfrac{3}{4}a_3)x^3 + \ldots,$$

und aus dieser Gleichung:

$$A_1 = -\tfrac{1}{2}a_1, \quad A_2 = \tfrac{3}{4}a_1 - \tfrac{1}{2}a_2, \quad \tfrac{1}{8}a_1 + \tfrac{3}{4}a_2 - \tfrac{1}{2}a_3 = 0,$$
$$\tfrac{7}{16}a_1 + \tfrac{1}{8}a_2 + \tfrac{3}{4}a_3 = 0.$$

Sucht man alle übrigen Coefficienten durch irgend einen, am einfachsten durch a_1, auszudrücken; so läfst sich am Ende der Bruch durch a_1 abkürzen, ohne dafs man den Werth dieser Gröfse, die auch in der That unbestimmt ist, zu wissen braucht.

Aus den beiden letzten Gleichungen hat man ganz einfach, mittelst Elimination:

$$a_2 = -\tfrac{1}{2}a_1 \quad \text{und} \quad a_3 = -\tfrac{1}{2}a_1;$$

damit folgt aus den beiden ersten Gleichungen:

$$A_1 = -\tfrac{1}{2}a_1, \quad A_2 = a_1.$$

Diese Werthe in dem angenommenen Bruche substituirt, geben also für die gesuchte Bruchfunction:

$$\frac{-\frac{1}{2}a_1 + a_1 x}{a_1 - \frac{1}{2}a_1 x - \frac{1}{2}a_1 x^2} = \frac{1 - 2x}{-2 + x + x^2}$$

wie im vorigen Paragraph.

Anmerk. Obschon also in diesem Beispiele fünf unbekannte Gröfsen vorhanden zu seyn schienen, so waren es im Grunde doch nur vier, die sofort zu ihrer Bestimmung vier Gleichungen, also auch vier Glieder der gegebenen Reihe erforderlich machen.

Dafs man bei der Berechnung der Werthe von a_2, $a_3 \ldots$ A_1, $A_2 \ldots$ noch bequemer, als es im vorigen Beispiele geschehen ist, verfahren könne; soll in dem nachstehenden Beispiele gezeigt werden.

Beispiel 2.

Um für die recurrirende Reihe

$$\underset{1}{3} - \underset{2}{8x} + \underset{3}{17x^2} - \underset{4}{28x^3} + \underset{5}{40x^4} - \underset{6}{46x^5} + \ldots$$

deren Relations-Scale dreigliederig ist, die gebrochene Function, aus welcher sie entsteht, zu finden; hat man (da der Nenner immer ein Glied mehr als die Scale enthält) für die gesuchte Function die Form:

$$\frac{A_1 + A_2 x + A_3 x^2}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3}.$$

Denkt man sich diese der gegebenen Reihe, welche man der Einfachheit wegen vorläufig durch $t_1 + t_2 x + t_3 x^2 + \ldots$ bezeichnet, gleich gesetzt, und den Nenner durch Multiplication weggeschafft; so werden die Coefficienten in dem Produkte der beiden Functionsreihen $a_1 + a_2 x + \ldots$ und $t_1 + t_2 x + \ldots$ vom vierten angefangen (weil der Zähler des Bruches drei Glieder hat) sämmtlich gleich Null. ~~Nennt~~ Nimmt man also zur Bestimmung der drei unbekannten Gröfsen des Nenners (a_2, a_3, a_4) den vierten, fünften und sechsten Coefficienten, welche sich leicht nach §. 4. unabhängig bilden lassen; so wird, wenn man sogleich für t_1, t_2, $t_3 \ldots$ die Werthe aus der gegebenen Reihe, nämlich 3, —8, +17, ... die man leicht durch das Daruntersetzen der Zeiger erkennt, substituirt:

$$-28a_1 + 17a_2 - 8a_3 + 3a_4 = 0$$
$$40a_1 - 28a_2 + 17a_3 - 8a_4 = 0$$
$$-46a_1 + 40a_2 - 28a_3 + 17a_4 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man ganz einfach durch Elimination:

$$a_2 = 2a_1,\ a_3 = 0,\ \text{und}\ a_4 = -2a_1.$$

Zur Bestimmung der drei Unbekannten A_1, A_2, A_3 im Zähler, hat man eben so, wenn die drei ersten Coefficienten des Productes gebildet, und diese beziehungsweise den Coefficienten des Zählers $A_1 + A_2x + A_3x^2$ gleich gesetzt worden:

$$A_1 = 3a_1,\ A_2 = -8a_1 + 3a_2 = -8a_1 + 6a_1 = -2a_1,$$
$$A_3 = 17a_1 - 8a_2 + 3a_3 = 17a_1 - 16a_1 = a_1.$$

Die gesuchte Bruchfunction ist demnach (vergl. §. 112.):

$$\frac{3a_1 - 2a_1x + a_1x^2}{a_1 + 2a_1x - 2a_1x^3} = \frac{3 - 2x + x^2}{1 + 2x - 2x^3}.$$

Anmerk. Es ist leicht zu sehen, dafs zur Bestimmung der gebrochenen Function einer recurrirenden Reihe der m^{ten} Ordnung, von dieser letztern $2m$ auf einander folgende Glieder gegeben seyn müssen.

§. 116.

Bilden die Coefficienten einer recurrirenden Reihe für sich genommen eine arithmetische Reihe von was immer für einer Ordnung; so läfst sich mit Hilfe einer einfachen Transformation die Reihe so darstellen, dafs man daraus für jeden Fall die gebrochene oder erzeugende Function sehr leicht finden kann.

Es sey

$$S = A + t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 + \ldots + t_{n-1}x^{n-1} + t_nx^n + \ldots$$

eine solche recurrirende Reihe, die also auch eine gemischte genannt werden kann; man setze

$$x = \frac{z}{1+z} \quad \ldots (1$$

so wird (§. 110.):

$$x = z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 - \ldots$$

und wenn man von diesem Polynom nach §. 11., I. die auf einander folgenden Potenzen entwickelt*):

$$x^2 = z^2 - 2z^3 + 3z^4 - 4z^5 + \ldots$$
$$x^3 = z^3 - 3z^4 + 6z^5 - 10z^6 + \ldots$$
$$x^4 = z^4 - 4z^5 + 10z^6 - 20z^7 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Werthe in der obigen Reihe substituirt, geben:

$$S = A + t_1 z - \left.\begin{matrix} t_1 \\ + t_2 \end{matrix}\right\} z^2 \left.\begin{matrix} + t_1 \\ - 2t_2 \\ + t_3 \end{matrix}\right\} z^3 \left.\begin{matrix} - t_1 \\ + 3t_2 \\ - 3t_3 \\ + t_4 \end{matrix}\right\} z^4 \left.\begin{matrix} + t_1 \\ - 4t_2 \\ + 6t_3 \\ - 4t_4 \\ + t_5 \end{matrix}\right\} z^5 - \text{etc.}$$

Man sieht aber leicht (m. s. §. 83.) dafs die Coefficienten von z^2, z^3, z^4, ... nichts anderes als die erste, zweite, dritte, ... Differenzen von t_1 sind, so dafs man auch kürzer schreiben kann:

$$S = A + t_1 z + \Delta^1 t_1 z^2 + \Delta^2 t_1 z^3 + \Delta^3 t_1 z^4 + \ldots$$

oder, da aus der Gleichung 1) $z = \frac{x}{1-x}$ folgt, auch

$$S = A + t_1\left(\frac{x}{1-x}\right) + \Delta^1 t_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \Delta^2 t_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 + \Delta^3 t_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^4 + \ldots$$

Da nun der Voraussetzung zufolge, die Gröfsen t_1, t_2, t_3, ... eine arithmetische Reihe bilden, so erscheint unter den Differenzen $\Delta^1 t_1$, $\Delta^2 t_1$, ... einmal eine mit beständigen Gliedern, so, dafs dann der vorige Ausdruck abbricht oder geschlossen wird.

Beispiel 1.

Für die recurrirende Reihe

$$3 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots + nx^n + \ldots$$

*) Auch kann man, da

$$x^2 = \frac{z^2}{1 + 2z + z^2},\quad x^3 = \frac{z^3}{1 + 3z + 3z^2 + z^3} \text{ u. s. w.}$$

ist, diese Potenzen entwickeln, indem man nach den vorigen Paragraphen diese Bruchfunctionen in recurrirende Reihen auflöst.

hat man $A=3$, $t_1=1$, $\Delta^1 t_1=1$, $\Delta^2 t_1=\Delta^3 t_1=\ldots=0$; folglich die Reihe, oder

$$S=3+\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{(1-x)^2}=\frac{3-5x+3x^2}{1-2x+x^2}.$$

Beispiel 2.

Für die Reihe

$$1+4x+15x^2+40x^3+85x^4+156x^5+\ldots$$

hat man $A=1$, $t_1=4$, $\Delta^1 t_1=11$, $\Delta^2 t_1=14$, $\Delta^3 t_1=6$, welches zugleich die letzte ist, da die folgenden Differenzen gleich Null sind. Es ist also die Reihe, oder

$$S=1+\frac{4x}{1-x}+\frac{11x^2}{(1-x)^2}+\frac{14x^3}{(1-x)^3}+\frac{6x^4}{(1-x)^4}$$
$$=\frac{1+5x^2}{1-4x+6x^2-4x^3+x^4}.$$

§. 117.

Um zu untersuchen, ob eine vorliegende Reihe eine recurrirende sey, und, wenn dieses wirklich der Fall ist, ohne ein sonstiges Bestimmungsstück, die gebrochene oder erzeugende Function dafür zu finden; bemerke man Folgendes:

1. Ist eine recurrirende Reihe, die wir überhaupt durch S bezeichnen wollen, von der ersten Ordnung; so ist der erzeugende Bruch von der Form $A_1:(a_1+a_2x)$, oder es ist $S=\frac{A_1}{a_1+a_2x}$, mithin auch $\frac{1}{S}=\frac{a_1+a_2x}{A_1}=\frac{a_1}{A_1}+\frac{a_2}{A_1}x$: theilt man also die Einheit durch die gegebene Reihe, so muſs, im Falle diese eine recurrente der ersten Ordnung seyn soll, der Quotient die Form $p+qx$ erhalten.

2. Ist die recurrirende Reihe S von der zweiten Ordnung, so hat man eben so

$$S=\frac{A_1+A_2x}{a_1+a_2x+a_3x^2}, \text{ also auch } \frac{1}{S}=\frac{a_1+a_2x+a_3x^2}{A_1+A_2x},$$

oder: $$\frac{1}{S}=\frac{a_1}{A_1}+\frac{A_1a_2-A_2a_1}{A_1^2}x+\frac{A_1^2a_3-A_2(A_1a_2-A_2a_1)}{A_1^2(A_1+A_2x)}x^2,$$

wobei das letzte Glied aus dem Reste gebildet ist, welcher

entsteht, nachdem man im Quotienten bereits 2 Glieder gesucht hat.

Ist also die Reihe S eine recurrirende der zweiten Ordnung, so muſs der Quotient $1 : S$ aus zwei Gliedern von der Form $p + qx$ und dem Producte von x^2 in eine recurrirende Reihe der ersten Ordnung bestehen; oder es muſs, wenn man den Rest nach der zweiten Division, nachdem man nämlich im Quotienten bereits die beiden Glieder $p + qx$ gefunden hat, mit $S' x^2$ bezeichnet:

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S' x^2}{S}$$

seyn, und da also $\frac{S'}{S}$ eine recurrirende Reihe der ersten Ordnung seyn soll, so muſs nach dem Vorigen (1.) $\frac{S}{S'}$ einen Quotienten von der Form $p' + q'x$, ohne irgend einen Rest geben.

3. Durch Fortsetzung dieser Betrachtungen kommt man nun zu der folgenden, von *Lagrange* gegebenen Regel:

Man dividire die Einheit durch die gegebene Reihe $S = t_1 + t_2 x + t_3 x^2 + \ldots$, setze jedoch diese Division nur so weit fort, bis man im Quotienten zwei Glieder, die sofort von der Form $p + qx$ seyn werden, und einen Rest $S' x^2$ erhalten hat, wobei S' die Form $t'_1 + t'_2 x + \ldots$ besitzt. Sodann theile man S durch S', bis man im Quotienten abermals zwei Glieder von der Form $p' + q'x$ und einen Rest $S'' x^2$, wo S'' die Form $t''_1 + t''_2 x + \ldots$ hat, erhält. Ferner dividire man S' durch S'', bis man im Quotienten zwei Glieder von der Form $p'' + q'' x$ und einen Rest $S''' x^2$, wobei S''' von der Form $t'''_1 + t'''_2 x + \ldots$ ist, erhalten hat u. s. w. Kommt man nun durch dieses wiederholte Verfahren einmal auf einen solchen zweigliederigen Quotienten $P + Qx$ ohne einen Rest; so ist die gegebene Reihe S eine recurrirende, und zwar von der Ordnung der letzten Division.

Geht z. B. die dritte Division auf, so daſs man hat

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S'}{S} x^2; \quad \frac{S}{S'} = p' + q'x + \frac{S''}{S'} x^2;$$

und $\frac{S'}{S''} = p'' + q''x$;

so gibt diese letzte Gleichung: $\frac{S''}{S'} = \frac{1}{p'' + q''x}$.

Dieser Werth in die vorletzte Gleichung gesetzt, gibt ferner

$$\frac{S}{S'} = p' + q'x + \frac{x^2}{p'' + q''x} = \frac{(p' + q'x)(p'' + q''x) + x^2}{p'' + q''x}.$$

Wird durch das Umkehren dieses Bruches, $\frac{S'}{S}$ bestimmt und dieser Werth in die erste Gleichung gesetzt, so erhält man:

$$\frac{1}{S} = \frac{(p + qx)(p' + q'x)(p'' + q''x) + (p + qx + p'' + q''x)\,x^2}{(p' + q'x)(p'' + q''x) + x^2}$$

und daraus hat man endlich für S einen Bruch von der Form:

$$S = \frac{A_1 + A_2 x + A_3 x^2}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3},$$

welches offenbar die erzeugende Function einer recurrirenden Reihe der dritten Ordnung ist.

Beispiel.

Für die obige Reihe (§. 114.)

$$S = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{7}{16}x^3 + \tfrac{9}{32}x^4 + \ldots$$

ist $\frac{1}{S} = -2 - 3x$ nebst dem Rest:

$$(\tfrac{5}{2} + \tfrac{5}{4}x + \tfrac{15}{8}x^2 + \tfrac{25}{16}x^3 + \ldots)\,x^2 = S'x^2.$$

Ferner ist $\frac{S}{S'} = -\tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{5}x$ ohne irgend einen Rest; die vorliegende Reihe ist demnach eine recurrirende der zweiten Ordnung. Um die ~~zu~~ erzeugende Function zu finden, hat man:

$$\frac{S'}{S} = \frac{5}{-1 + 2x}, \text{ folglich } \frac{1}{S} = -2 - 3x + \frac{5x^2}{-1 + 2x} = \frac{2 - x - x^2}{-1 + 2x},$$

es ist also endlich $S = \frac{-1 + 2x}{2 - x - x^2} = \frac{1 - 2x}{-2 + x + x^2}$

wie oben im genannten Paragraph.

Anmerk. Erhält man für eine gegebene Reihe, durch das oben angeführte Verfahren fortwährend Reste, so ist diese Reihe

keine recurrirende, oder man müfste sie denn als eine solche Reihe ansehen wollen, deren Scale unendlich viele Glieder hat.

In vielen Fällen ist es dennoch vortheilhaft, die gegebene Reihe wenigstens als eine genäherte recurrirende Reihe anzusehen, die man nach Umständen von der 1sten, 2ten . . . Ordnung annimmt und dafür die Bruchfunction bestimmt; Beispiele hiezu werden in der Folge noch vorkommen.

Bestimmung des allgemeinen Gliedes einer recurrirenden Reihe.

§. 118.

Um das allgemeine Glied einer recurrirenden Reihe zu finden, betrachten wir jene Reihe, welche aus dem Bruche $A : (a - bx)^m$ entsteht. Es ist

$$\frac{A}{(a-bx)^m} = A(a-bx)^{-m}$$

$$= A\left[a^{-m} + m a^{-m-1} bx + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} a^{-m-2} b^2 x^2 + \ldots\right]$$

$$= A a^{-m}\left[1 + m\frac{b}{a}x + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}\frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{b^3}{a^3}x^3 + \ldots\right]$$

in welcher recurrirenden Reihe, die eine gemischte ist, nicht blofs das Bildungsgesetz:

$$t_{n+1} = \frac{(m+n-1)}{n}\frac{b}{a} t_n,$$

sondern zugleich auch das allgemeine oder n^{te} Glied:

$$1) \ldots t_n = A a^{-m} \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} x^{n-1}$$

erkannt wird.

Ist nun irgend eine recurrente Reihe gegeben, so kann man dafür nach den vorigen §§. 114.—117. die erzeugende oder gebrochene Function suchen, und diese wieder nach den §§. 104. und 106. in Partialbrüche zerlegen, welche, wenn der Nenner nicht etwa imaginäre einfache Factoren besitzt, sämmtlich unter der Form $A : (a - bx)^m$ begriffen sind. Entwickelt man ferner jede dieser Bruchfunctionen in eine Reihe, und sucht zu jeder derselben das allgemeine Glied 1); so mufs, gleich wie die Summe aus den einzelnen

Reihen der gegebenen recurrirenden Reihe gleich ist, auch die Summe der allgemeinen Glieder dieser Reihen, das allgemeine Glied der gegebenen Reihe erzeugen.

Beispiel 1.

Um für die mehrmal angeführte recurrirende Reihe $-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{7}{16}x^3+\ldots$ das allgemeine Glied zu finden, hat man zuerst dafür (§. 114 oder 115) die gebrochene Function:

$$\frac{1-2x}{-2+x+x^2},$$

und wegen $-2+x+x^2=(x-1)(x+2)$ nach §. 104., wenn man diese Bruchfunction in Partialbrüche zerlegt:

$$\frac{1-2x}{-2+x+x^2}=-\frac{1}{3(-1+x)}-\frac{5}{3(2+x)}.$$

Für den ersten dieser beiden Partialbrüche hat man durch Vergleichung mit dem allgemeinen Bruch $A:(a-bx)^m$, $A=-\frac{1}{3}$, $a=-1$, $b=-1$, $m=1$; und für den zweiten: $A=-\frac{5}{3}$, $a=2$, $b=-1$, $m=1$. Diese Werthe oben substituirt (man kann sich dabei auf das allgemeine Glied 1) beschränken) geben

$$-\frac{1}{3(-1+x)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^2+\ldots+\frac{1}{3}x^{n-1}+\ldots$$

$$-\frac{5}{3(2+x)}=-\frac{5}{6}+\frac{5}{12}x-\frac{5}{24}x^2+\ldots-\frac{5}{3}.\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}x^{n-1}$$

davon ist die Summe:

$$\frac{1-2x}{-2+x+x^2}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\ldots+\frac{1}{3}\left[1-\frac{5(-1)^{n-1}}{2^n}\right]x^{n-1}+\ldots$$

in welcher Reihe, als gegebene, sofort das allgemeine Glied gefunden ist.

Beispiel 2.

Auf die nämliche Weise findet man

$$\frac{2-2x^2}{9x+12x^2+4x^3}=\frac{2}{9x}$$

$$+\left\{\frac{-8}{27}+\frac{2}{27}x+\frac{8}{243}x^2-\ldots+(-2)^{n-1}\left(\frac{5n-13}{3^{n+2}}\right)x^{n-1}+\ldots\right\}$$

Anmerk. 1. Diese Methode zur Bestimmung des allgemei-

nen Gliedes, läſst sich sogar in jenem Falle anwenden, in welchem der Nenner der erzeugenden Function imaginäre einfache Factoren besitzt. Denn obschon dann a und A imaginär sind, so geben diese in der Reduction des allgemeinen Gliedes doch reelle Ausdrücke.

So ist z. B. (§. 105., Anmerk.) für

$$\frac{1-3x}{5-4x+x^2} = \frac{A_1}{x-2+\sqrt{-1}} + \frac{A_2}{x-2-\sqrt{-1}}$$

$A_1 = \frac{5-3\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}$ und $A_2 = \frac{-5-3\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}$; also nach der Vergleichung mit $\frac{A}{(a-bx)^m}$, für den ersten Partialbruch: $A = \frac{5-3\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}$, $a=-2+\sqrt{-1}$, $b=-1$, $m=1$; und für den zweiten: $A = \frac{-5-3\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}$, $a=-2-\sqrt{-1}$, $b=-1$, $m=1$. Werden diese Werthe für jeden der beiden Partialbrüche in dem obigen Ausdruck 1) substituirt, und die beiden entstehenden allgemeinen Glieder addirt; so erhält man nach einer ganz einfachen Reduction, als allgemeines Glied der aus der Function $\frac{1-3x}{5-4x+x^2}$ entspringenden recurrirenden Reihe:

$$\frac{(-1)^{2n-1}}{2 \,.\, 5^n}\left[5\left(\frac{(2+\sqrt{-1})^n-(2-\sqrt{-1})^n}{\sqrt{-1}}\right)\right.$$
$$\left.-3\left((2+\sqrt{-1})^n+(2-\sqrt{-1})^n\right)\right]x^{n-1}.$$

Da nun von den Entwicklungen $(2+\sqrt{-1})^n$ und $(2-\sqrt{-1})^n$ die Summe die Form $2P$, und die Differenz jene $2Q\sqrt{-1}$ hat, wo P und Q reelle Gröſsen bedeuten; so erhält der vorige Ausdruck allgemein die Form $\frac{(-1)^{2n-1}}{2 \,.\, 5^n}(10Q-6P)$, welche offenbar reell ist.

Anmerk. 2. Da sich der Coefficient des allgemeinen Gliedes 1), wenn $n>m$ gedacht wird, auch so darstellen läſst:

$$A a^{-m} \frac{m(m+1)\ldots(n-2)(n-1)\,n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1 \,.\, 2\ldots\ldots(m-1)\,m(m+1)\ldots(n-2)(n-1)}$$
$$= A a^{-m} \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1 \,.\, 2\ldots\ldots(m-1)},$$

und dieser, weil im Producte n^{m-1} als höchste Potenz

von n vorkommt (§. 85., Anmerk. 2), das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe der $m-1^{sten}$ Ordnung bildet; so folgt, dafs alle arithmetischen Reihen auch recurrirende sind; und zwar gehört eine arithmetische Reihe des r^{ten} Grades zu einer recurrirenden Reihe der $r+1^{sten}$ Ordnung.

Bestimmung des summatorischen Gliedes einer recurrirenden Reihe.

§. 119.

Für die unendliche recurrirende Reihe

$$S = t_1 + t_2 x + \ldots + t_n x^{n-1} + x^n (t_{n+1} + t_{n+2} x + \ldots \text{ in inf.})$$

ist offenbar die erzeugende Function

$$\frac{A_1 + A_2 x + \ldots}{a_1 + a_2 x + \ldots}$$

selbst der Summenausdruck. Um aber die Summenformel für eine endliche Anzahl, z. B. für die ersten n Glieder der Reihe zu finden, wird man für die vom $n+1^{sten}$ Gliede gerechnete unendliche Reihe, d. i. für $t_{n+1} + t_{n+2} x + \ldots$ die erzeugende Function

$$\frac{A'_1 + A'_2 x + \ldots}{a_1 + a_2 x + \ldots},$$

deren Nenner mit dem vorigen identisch seyn mufs, weil das Gesetz der Bildung für die ganze Reihe das nämliche ist, aufsuchen (§. 114.) und von dem erstern Bruche diesen letztern, welcher noch früher mit x^n zu multipliciren ist, abziehen. Die Coefficienten A'_1, A'_2, ... des letztern Bruches, werden genau so wie jene A_1, A_2, ... des erstern gefunden, nur dafs hier statt $t_1, t_2, \ldots : t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots$ zu substituiren kommt, wefshalb man auch, um diese Werthe zu erhalten, nach dem vorhergehenden Paragraphe das allgemeine Glied oder t_n zuerst bestimmen mufs.

Beispiel 1.

Um für die mehr genannte Reihe

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4} x + \tfrac{1}{8} x^2 + \tfrac{7}{16} x^3 + \ldots + \tfrac{1}{3}\left[1 - \frac{5(-1)^{n-1}}{2^n}\right] x^{n-1} + \ldots$$

auch das summatorische Glied zu finden, ist zuerst die Summe der ganzen unendlichen Reihe, vom ersten angefangen, oder die erzeugende Function (§. 118.):

$$\frac{1-2x}{-2+x+x^2}.$$

Für die Bestimmung der gebrochenen Function, welche die Reihe vom $n+1^{\text{sten}}$ Gliede angefangen gibt, hat man, den Factor x^n indefs noch weggelassen:

$$\frac{A'_1+A'_2 x}{-2+x+x^2}=t_{n+1}+t_{n+2}x+\ldots$$

oder, nach Hinwegschaffung des Nenners, $A'_1=-2t_{n+1}$, $A'_2=-2t_{n+2}+t_{n+1}$. Nun ist aber nach dem bereits bekannten allgemeinen Gliede der gegebenen Reihe

$$t_{n+1}=\tfrac{1}{3}\left[1-\frac{5(-1)^n}{2^{n+1}}\right] \text{ und } t_{n+2}=\tfrac{1}{3}\left[1-\frac{5(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}\right],$$

folglich auch $A'_1=-\tfrac{2}{3}\left[1-\frac{5(-1)^n}{2^{n+1}}\right]$, und nach einer einfachen Reduction $A'_2=-\tfrac{1}{3}\left[1+\frac{5(-1)^n}{2^n}\right]$.

Da aber das summatorische Glied

$$S_n=\frac{1-2x}{-2+x+x^2}-\frac{(A'_1+A'_2 x)x^n}{-2+x+x^2}$$

ist, so erhält man endlich, wenn gehörig substituirt wird:

$$S_n=\frac{1-2x+\frac{2}{3}\left(1-\frac{5(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n+\frac{1}{3}\left(1+\frac{5(-1)^n}{2^n}\right)x^{n+1}}{-2+x+x^2}$$

So erhält man z. B. für $n=4$:

$$S_4=1-2x+\tfrac{9}{16}x^4+\tfrac{7}{16}x^5:-2+x+x^2$$
$$=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4}x+\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{7}{16}x^3;$$

wie es seyn soll.

Beispiel 2.

Auf die nämliche Art hat man zur Bestimmung der Summenformel der im zweiten Beispiele des vorigen Paragraphen angeführten Reihe:

$$\frac{2}{9x}-\frac{8}{27}+\frac{2}{27}x+\ldots+(-2)^{n-1}\left(\frac{5n-13}{3^{n+2}}\right)x^{n-1}+\ldots$$

zuerst $\frac{2-2x^2}{9x+12x^2+4x^3}$ als Summe der ganzen unendlichen Reihe, vom ersten Gliede an gezählt, und da das hier angegebene allgemeine Glied das $(n+1)^{ste}$ in der Reihe ist

$$\frac{(-2)^{n-1}\left(\frac{5n-13}{3^n}\right)x^n-(-2)^n\left(\frac{5n-18}{3^{n+1}}\right)x^{n+1}}{9x+12x^2+4x^3}$$

(wie man nach einer einfachen Reduction leicht findet) als Summe dieser unendlichen Reihe vom $(n+1)^{sten}$ Gliede an gezählt; es ist daher das summatorische Glied der in Rede stehenden Reihe:

$$S_n=\frac{2-2x^2-(-2)^{n-1}\left(\frac{5n-13}{3^n}\right)x^n+(-2)^n\left(\frac{5n-18}{3^{n+1}}\right)x^{n+1}}{9x+12x^2+4x^3}.$$

Man findet in der That daraus z. B. für $n=4$:

$$\frac{2-2x^2+\frac{56}{81}x^4+\frac{32}{243}x^5}{9x+12x^2+4x^3}=\frac{2}{9x}-\frac{8}{27}+\frac{2}{27}x+\frac{8}{243}x^2;$$

wie es seyn soll.

Sechstes Capitel.

Von der Umkehrung der Reihen.

§. 120.

Erklärung.

Eine Reihe $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$, in welcher y als Function von x erscheint, umkehren, heiſst x als Function von y, und zwar wieder in einer nach Potenzen von y fortlaufenden Reihe darstellen.

Um aber die Reihe $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$ (1, in welcher A, B, $C \ldots$ gegebene, von x unabhängige Coefficienten sind, umzukehren, nimmt man für x eine Reihe nach steigenden Potenzen von y, z. B. $x = t_1 y + t_2 y^2 + t_3 y^3 + \ldots$, in welcher t_1, $t_2 \ldots$ noch unbestimmte Coefficienten sind, an, entwickelt daraus nach dem polynomischen Satze (§. 8. — 11.) jene Potenzen von x, welche in der gegebenen Reihe (1 vorkommen, und substituirt die dadurch erhaltenen Werthe von x, x^2, $x^3 \ldots$ in diese Reihe (1; so erhält man eine Gleichung zwischen zwei identischen nach y geordneten Functionsreihen, aus welcher man endlich nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten (§. 2.), im Falle die Form der angenommenen umgekehrten Reihe zulässig oder brauchbar ist, die Coefficienten t_1, t_2, $t_3 \ldots$ bestimmen kann.

Beispiel 1.

Um die Reihe $y = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ umzukehren, setze man

$$x = t_1 y + t_2 y^2 + t_3 y^3 + t_4 y^4 + \ldots;$$

so wird, wenn man in den Entwicklungen nur bis zur vierten Potenz von y geht:

$$x^2 = t_1^2 y^2 + 2 t_1 t_2 y^3 + (2 t_1 t_3 + t_2^2) y^4 + \ldots$$
$$x^3 = t_1^3 y^3 + 3 t_1^2 t_2 y^4 + \ldots$$
$$x^4 = t_1^4 y^4 + \ldots$$
$$\ldots\ldots$$

diese Werthe in der gegebenen Reihe substituirt, geben die Gleichung:

$$y = t_1 y + \left.\begin{matrix} t_2 \\ t_1^2 \end{matrix}\right\} y^2 + \left.\begin{matrix} t_3 \\ 2t_1 t_2 \\ t_1^3 \end{matrix}\right\} y^3 + \left.\begin{matrix} t_4 \\ 2t_1 t_3 \\ t_2^2 \\ 3t_1^2 t_2 \\ t_1^4 \end{matrix}\right\} y^4 + \ldots$$

aus welcher sofort folgt: $t_1 = 1$; $t_2 + t_1^2 = 0$, oder $t_2 = -1$; $t_3 + 2t_1t_2 + t_1^3 = 0$, oder $t_3 = 2 - 1 = 1$; $t_4 + 2t_1t_3 + t_2^2 + 3t_1^2 t_2 + t_1^4 = 0$, oder $t_4 = -2 - 1 + 3 - 1 = -1$ u. s. w. Die umgekehrte Reihe ist demnach:

$$x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \ldots$$

in welcher das Gesetz des Fortganges klar zu seyn scheint*).

Hier kann das gesuchte Resultat auch auf einem andern Wege erhalten werden. Es ist nämlich die gegebene Reihe $x + x^2 + x^3 + \ldots$ eine recurrirende, für welche, wie man nach dem Vorigen leicht findet, $\frac{x}{1-x}$ die erzeugende Function ist; man hat also

$$y = \frac{x}{1-x}, \text{ und daraus } x = \frac{y}{1+y} = y - y^2 + y^3 - y^4 + \ldots$$

wie zuvor, wobei aber nun das Bildungsgesetz keinem Zweifel mehr unterliegt.

Beispiel 2.

Um die Reihe

$$y = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

deren Gesetz klar ist, umzukehren, setze man wieder

$$x = t_1 y + t_2 y^2 + t_3 y^3 + t_4 y^4 + \ldots$$

woraus für x^2, x^3, x^4 ... die nämlichen Werthe wie im vorigen Beispiele folgen. Diese Werthe von x, x^2 ... in der gegebenen Reihe substituirt, geben

*) Man darf indefs aus einigen wenigen Gliedern nicht mit Bestimmtheit auf das Bildungsgesetz der Reihe schliefsen; und diefs ist mit eine der Hauptursachen, warum man in der Regel die Umkehrung der Reihen zu umgehen, und das Resultat auf einem andern Wege zu erreichen sucht.

$$y = t_1 y + \left.\begin{matrix} t_2 \\ \frac{1}{2}t_1^2 \end{matrix}\right\} y^2 + \left.\begin{matrix} t_3 \\ t_1 t_2 \\ \frac{1}{2.3}t_1^3 \end{matrix}\right\} y^3 + \left.\begin{matrix} t_4 \\ t_1 t_3 \\ \frac{1}{2}t_2^2 \\ \frac{1}{2}t_1^2 t_2 \\ \frac{1}{2.3.4}t_1^4 \end{matrix}\right\} y^4 + \ldots$$

Aus dieser Gleichung findet man durch Gleichsetzung der gleichnamigen Cofficienten, ganz einfach: $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$, $t_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} = \frac{1}{3}$, $t_4 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2.3.4} = -\frac{1}{4}$ u. s. f., so, dafs man für die gesuchte umgekehrte Reihe hat:

$$x = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \ldots$$

Um sich von der Richtigkeit der Rechnung zu überzeugen, darf man nur die erhaltene Reihe abermals umkehren; denn dadurch mufs offenbar wieder die ursprüngliche oder gegebene Reihe zum Vorschein kommen.

§. 121.

Sind die Exponenten von x in der gegebenen Reihe nach einem andern, als nach dem einfachen Gesetze der natürlichen Zahlen gebildet; so beobachten auch die Exponenten von y in der umgekehrten Reihe nicht mehr dieses einfache Gesetz.

Beispiel 1.

Setzt man z. B., um die Reihe

$$y = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3\ldots7} + \ldots$$

umzukehren, $x = t_1 y + t_2 y^2 + t_3 y^3 + t_4 y^4 + t_5 y^5 + \ldots$, bildet daraus x^3, x^5, x^7, . . . und verfährt im Uebrigen wie im vorigen Paragraphe; so findet man t_2, t_4, t_6, . . . nämlich alle, den geraden Potenzen von y entsprechenden Coefficienten gleich Null; so, dafs man eigentlich die umgekehrte Reihe folgender Gestalt annehmen soll:

$$x = t_1 y + t_2 y^3 + t_3 y^5 + t_4 y^7 + \ldots$$

Bei dieser Annahme findet man durch das angezeigte Verfahren zuerst

$$x^3 = t_1^3 y^3 + 3t_1^2 t_2 y^5 + (3t_1^2 t_3 + 3t_1 t_2^2) y^7 + \ldots$$
$$x^5 = t_1^5 y^5 + 5t_1^4 t_2 y^7 + \ldots$$
$$x^7 = t_1^7 y^7 + \ldots$$
u. s. w.

und damit, wenn man diese Werthe in die gegebene Reihe gehörig substituirt, nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten:

$$t_1 = 1,\ t_2 = \tfrac{1}{6},\ t_3 = \tfrac{3}{40},\ t_4 = \tfrac{5}{112} \text{ u. s. w.};$$

man kann daher die umgekehrte Reihe, um ein leicht zu übersehendes Gesetz hineinzubringen, auf folgende Weise darstellen:

$$x = y + \frac{1 \cdot y^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 y^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 y^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$$

Beispiel 2.

Um endlich noch die ganz unregelmäfsig scheinende Reihe

$$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3 \cdot 5} + \frac{17x^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{62x^9}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \ldots$$

umzukehren, setze man wieder

$$x = t_1 y + t_2 y^3 + t_3 y^5 + t_4 y^7 + \ldots;$$

so erhält man für x^3, x^5, x^7, ... dieselben Reihen wie im vorhergehenden Beispiele, und damit, wenn in die gegebene Reihe gehörig substituirt wird, mittelst des Satzes der unbestimmten Coefficienten: $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{3}$, $t_3 = \frac{1}{5}$, $t_4 = -\frac{1}{7}$, $t_5 = \frac{1}{9}$ u. s. w., so, dafs man also für die umgekehrte Reihe folgende einfache, sehr regelmäfsige Reihe erhält:

$$x = y - \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 - \tfrac{1}{7}y^7 + \tfrac{1}{9}y^9 - \text{etc.}$$

Anmerk. 1. Wird die Form der umgekehrten Reihe für eine gegebene umzukehrende Reihe unrichtig angenommen, so verräth sich dieses im Laufe der Entwicklung selbst; indem man entweder, wie im vorigen Beispiele, gewisse Coefficienten gleich Null findet, oder überhaupt auf Widersprüche stöfst. Um jedoch des zeitraubenden Probirens überhoben zu seyn, wollen wir hier das allgemeine Gesetz angeben, welches in Bezug auf die Form der Reihe oder ihrer Exponenten Statt findet.

Bilden in der gegebenen oder umzukehrenden Reihe die Exponenten von x allgemein die Reihe:

1) ... $m,\ m+n,\ m+2n,\ m+3n,\ m+4n,$...
so beobachten in der umgekehrten Reihe die Exponenten von y folgende Reihe:

$$2) \ldots \frac{1}{m},\ \frac{1+n}{m},\ \frac{1+2n}{m},\ \frac{1+3n}{m},\ \text{u. s. w.}^{*)}$$

*) Um diese Exponenten-Reihe zu finden, denkt man sich in $y = x^m + A_1 x^{m+n} + A_2 x^{m+2n} + \ldots$ auf welche Form jede umzukehrende Reihe gebracht werden kann, x so klein, daſs man näherungsweise $y = x^m$ setzen darf, woraus $x = y^{\frac{1}{m}}$, also $x^{m+n} = x^m . x^n = y . y^{\frac{n}{m}}$; $x^{m+2n} = x^m . x^{2n} = y . y^{\frac{2n}{m}}$ u. s. w. folgt. Diese Werthe für x^m, x^{m+n} ... in der ersten Reihe gesetzt, und gleich durch y abgekürzt, geben $1 = 1 + A_1 y^{\frac{n}{m}} + A_2 y^{\frac{2n}{m}} + \ldots$ oder wenn man diese Gleichung mit $x = y^{\frac{1}{m}}$ multiplicirt, und damit die Reihe bestehen kann, statt A_1, A_2, ... unbestimmte Coefficienten annimmt:

$$x = t_1 y^{\frac{1}{m}} + t_2 y^{\frac{1+n}{m}} + t_3 y^{\frac{2+n}{m}} + t_4 y^{\frac{3+n}{m}} + \ldots$$

woraus die obige Reihe 2) für die Exponenten von y hervorgeht.

Bildet man aus dieser letzten Gleichung ebenfalls, wie wir dieses im vorigen Paragraph angegeben haben, x^m, x^{m+n}, x^{m+2n}, ... und substituirt die entstehenden Werthe in die ursprüngliche Gleichung; so findet man für die unbestimmten Coefficienten, diese durch Recursion ausgedrückt, folgende nicht schwer zu übersehenden Gesetze:

$$t_1 = \sqrt[m]{1}$$

$$-m t_1^{m-1} t_2 = A_1 t_1^{m+n};$$

$$-m t_1^{m-1} t_3 = \frac{m(m-1)}{1 . 2} t_2^2 t_1^{m-2} + (m+n) A_1 t_2 t_1^{m+n-1} + A_2 t_1^{m+2n}$$

$$-m t_1^{m-1} t_4 = m(m-1) t_2 t_3 t_1^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} t_2^3 t_1^{m-3}$$
$$+ (m+n) A_1 t_3 t_1^{m+n-1} + \frac{(m+n)(m+n-1)}{1 . 2} A_1 t_2^2 t_1^{m+n-2}$$
$$+ (m+2n) A_2 t_2 t_1^{m+2n-1} + A_3 t_1^{m+3n};$$

$$-m t_1^{m-1} t_5 = m(m-1) t_2 t_4 t_1^{m-2} + \frac{m(m-1)}{1 . 2} t_3^2 t_1^{m-2}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2} t_2^2 t_3 t_1^{m-3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 . 2 . 3 . 4} t_2^4 t_1^{m-4}$$
$$+ (m+n) A_1 t_4 t_1^{m+n-1} + (m+n)(m+n-1) A_1 t_2 t_3 t_1^{m+n-2}$$

Anmerk. 2. Ist die Reihe $y = A + Bx + Cx^2 + \ldots$, in welcher ein von x freies Glied A vorkömmt, umzukehren; so muſs man zuerst dieses Glied A auf die andere Seite bringen, und dann erst, wenn man Kürze halber $y - A = z$ setzt, die Reihe $z = Bx + Cx^2 + \ldots$ umkehren, d. i. x durch z ausdrücken. Ohne diese Vorbereitung würde man in der letzten Gleichung, aus welcher die unbestimmten Coefficienten t_1, t_2, ... bestimmt werden sollen, für die Coefficienten von y, y^2, ... lauter unendliche Reihen erhalten, aus welchen sofort für t_1, t_2, ... nichts gefunden werden könnte. Noch deutlicher sieht man die Unmöglichkeit, eine solche Reihe $y = A + Bx + \ldots$ unmittelbar umzukehren, aus der Reihe 2) (vorige Anmerk.) für die Exponenten der umgekehrten Reihe; denn da nach der Reihe 1) $m = 0$ und $n = 1$ ist, so folgt aus 2): $\frac{1}{0}$, $\frac{2}{0}$, ... so, daſs die umgekehrte Reihe unendlich groſse Exponenten erhält, was ungereimt ist, und also anzeigt, daſs es nicht möglich ist, x durch Potenzen von y (wohl aber durch Potenzen von $(y - A)$) auszudrücken.

$$+ \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A_1 t_2^3 t_1^{m+n-3}$$

$$+ (m+2n) A_2 t_3 t_1^{m+2n-1} + \frac{(m+2n)(m+2n-1)}{1 \cdot 2} A_2 t_2^2 t_1^{m+2n-2}$$

$$+ (m+3n) A_3 t_2 t_1^{m+3n-1}$$

$$+ A_4 t_1^{m+4n}.$$

Dabei ist in den meisten Fällen $t_1 = 1$.

Siebentes Capitel.

Ueber die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen.

§. 122.

Da die Anwendung der divergenten Reihen in der Analysis sehr leicht auf Irrthümer führen und falsche Resultate veranlassen kann; so ist es von großer Wichtigkeit, eine gegebene unendliche Reihe in Beziehung auf ihre Convergenz oder Divergenz untersuchen und beurtheilen zu können.

Aus der im §. 80. gegebenen Erklärung (6) folgt überhaupt, daſs eine unendliche Reihe convergire oder divergire, je nachdem ihre Summe eine bestimmte endliche Gröſse, oder Unendlich ist; in welchem letztern Falle die Reihe eigentlich keine Summe hat. Lieſse sich jede gegebene Reihe auf eine bequeme und einfache Weise summiren, so wäre die Beantwortung der Frage, ob und unter welchen Bedingungen die unendliche Reihe convergire oder divergire, äuſserst einfach; wie wir dieses an der folgenden Reihe ersehen können.

Die Summe der geometrischen Reihe

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

ist bekanntlich

$$S_n = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Ist nun 1. $q > 1$, so wächst aq^n mit n bis ins Unendliche, und es wird für $n = \infty$ auch $S_n = \infty$.

Ist 2. $q = 1$, so erhält zwar S_n die Form $\frac{0}{0}$, aber es ist leicht zu sehen, daſs die Summe der in diesem Falle entstehenden unendlichen Reihe $a + a + a + \ldots$, es mag auch a noch so klein seyn, ebenfalls unendlich groſs seyn müsse.

Ist endlich 3. $q < 1$, so nimmt in dem obigen Bruche

$a q^n$ unendlich ab, wenn n unendlich wächst, und es nähert sich dabei S_n ohne Ende der Grenze $\frac{a}{1-q}$, oder es wird für $n = \infty$, $S_n = \frac{a}{1-q}$, also gleich einer endlichen Gröſse.

Eine unendliche geometrische Reihe convergirt also bloſs, wenn der numerische Werth des Quotienten oder Exponenten *kleiner* als die Einheit ist; in jedem andern Falle ist die Reihe divergent.

Da indeſs die Summirung der Reihen nur in den wenigsten Fällen gelingt, und auch dann noch mit Schwierigkeiten verbunden ist; so muſs man solche Kennzeichen für die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen aufzufinden trachten, welche von der Summe unabhängig sind. Die Betrachtungen des folgenden Paragraphen werden uns auf solche führen.

§. 123.

Es seyen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, a_{n+1}, \ldots$ die auf einander folgenden Glieder einer unendlichen Reihe, die wir fürs Erste sämmtlich als positiv voraussetzen wollen, und S die Summe dieser Reihe; so kann man setzen:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + E_n$$

wo $E_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ den Rest, oder besser die Ergänzung der Reihe, für den Zeiger n bezeichnet. Dieſs vorausgesetzt, wird die Reihe offenbar convergiren, wenn bei der unendlichen Zunahme von n, E_n unendlich abnimmt, und endlich für $n = \infty$ völlig verschwindet; dagegen divergiren, wenn diese Eigenschaft nicht Statt findet.

Sey nun x die Grenze, welcher sich der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ bei dem unendlichen Zunehmen von n ohne Ende nähert (§. 17.), und a_n eine positive oder negative Gröſse, welche

unendlich abnimmt, während n unendlich wächst; so kann man setzen (S. 55, Anmerk. 2.):

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = x + \alpha_n$, woraus $a_{n+1} = a_n (x + \alpha_n)$ folgt.

Auf dieselbe Weise ist auch:

$$a_{n+2} = a_{n+1}(x + \alpha_{n+1}) = a_n (x + \alpha_n)(x + \alpha_{n+1}),$$
$$a_{n+3} = a_{n+2}(x + \alpha_{n+2}) = a_n (x + \alpha_n)(x + \alpha_{n+1})(x + \alpha_{n+2}),$$

. .

und so nach diesem Gesetze weiter.

Da aber $E_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ ist, so wird auch, wenn man die eben aufgestellten Werthe für a_{n+1}, a_{n+2}, . . . substituirt:

$$E_n = a_n \left[(x + \alpha_n) + (x + \alpha_n)(x + \alpha_{n+1}) \right.$$
$$\left. + (x + \alpha_n)(x + \alpha_{n+1})(x + \alpha_{n+2}) + \text{etc.}\right] \ldots (s,$$

oder wenn man entwickelt:

$$E_n = a_n \left[(x + x^2 + x^3 + \ldots) + (1 + x + x^2 + \ldots)\alpha_n \right.$$
$$+ (x + x^2 + \ldots)\alpha_{n+1} + (x^2 + x^3 + \ldots)\alpha_{n+2} + \ldots$$
$$\ldots + (1 + x + x^2 + \ldots)\alpha_n \alpha_{n+1}$$
$$\left. + (x + x^2 + \ldots)\alpha_n \alpha_{n+2} + \ldots \text{u. s. w.}\right].$$

Nun sind aber, wie wir im vorigen Paragraphe gesehen haben, die in den Parenthesen stehenden geometrischen Reihen, welches wie man sieht lauter unendliche sind, für $x \overline{\overline{>}} 1$ divergent, d. h. ihre Summen sind unendlich grofs; folglich ist auch bei diesen Werthen von x, $E_n = \infty$, oder eine unendliche Reihe a_1, a_2, a_3, . . . deren Glieder entweder fortwährend *gleiche* Gröfse behalten oder *wachsen*, ist *divergent*.

Ist dagegen $x < 1$, so hat jede dieser genannten unendlichen Reihen eine endliche Summe. Wird diese in jeder nach der im vorigen Paragraphe für $n = \infty$ angegebenen Formel bestimmt und hier eingeführt, so erhält man auch:

$$E_n = a_n \left[\frac{x}{1-x} + \frac{\alpha_n}{1-x} + \frac{x\alpha_{n+1}}{1-x} + \frac{x^2\alpha_{n+2}}{1-x} + \ldots + \frac{\alpha_n\alpha_{n+1}}{1-x} + \ldots\right]$$

Geht man nun auf die Bedeutung von α_n, α_{n+1}, α_{n+2}, . . . zurück, so sieht man sogleich, dafs $a_n \frac{x}{1-x}$ die Grenze

ist, welcher sich bei der fortwährenden Zunahme von n, E_n ohne Ende nähert*), weil alle übrigen Glieder dieses letztern Ausdruckes unendlich abnehmen: kann also bei dem unendlichen Wachsen von n, der Quotient $a_n \frac{x}{1-x}$ beliebig klein, und für $n = \infty$ *Null* werden, so *convergirt* die betreffende Reihe, im Gegentheile ist sie *divergent*.

Da es übrigens, wie aus dem Gange dieser Entwicklung erhellet, gleichgiltig ist, ob der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ positiv oder negativ ausfällt, indem es bloſs auf den numerischen Werth dabei ankommt; so gilt der eben aufgestellte Satz auch dann noch, wenn wenigstens von einer gewissen Stelle angefangen, in der Reihe ein regelmäſsiger Zeichenwechsel Statt findet.

§. 124.

Das im vorigen Paragraphe entwickelte Kennzeichen für die Convergenz der unendlichen Reihen, welchem vor Allem die Bedingung $x < 1$ zum Grunde liegt, zeigt deutlich, daſs das bloſse Abnehmen der Glieder, welches man das Fallen der Reihe nennt, und welches wegen $x < 1$, wenigstens von einer gewissen Stelle angefangen, eintreten muſs, zur Convergenz derselben noch nicht hinreicht, obschon man umgekehrt von der Abwesenheit dieser Eigenschaft, mit Bestimmtheit auf die Divergenz der Reihe schlieſsen kann.

Zur Erläuterung des Gesagten mögen einige Beispiele dienen, die wir sofort auf fallende Reihen beschränken können, indem die übrigen sämmtlich divergent sind, und keiner weitern Untersuchung bedürfen.

Beispiel 1.

Für die unendliche Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

*) Man ersieht dieses vielleicht noch deutlicher aus der Gleichung s).

welche auch harmonische heifst, hat man

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n^2} + \cdots\right)$$

also, da $x < 1$ seyn mufs,

$$x = 1 - \frac{1}{n} \text{ und } a_n \frac{x}{1-x} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Da nun dieser letztere Werth bei der unendlichen Zunahme von n nicht bis Null, sondern nur bis 1 abnehmen kann, d. i. für $n = \infty$ nicht verschwindet; so ist die gegebene Reihe, obschon sie fallend ist, divergent*).

Beispiel 2.

Für die Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$ hingegen ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{n}{n+1} = -1 + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n^2} + \ldots\right)$$

also

$$x = -1 + \frac{1}{n} \text{ und } a_n \frac{x}{1-x} = \frac{1}{n} \cdot \frac{-1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{-1 + \frac{1}{n}}{2n - 1}.$$

Da aber dieser Quotient bei dem unendlichen Wachsen von n unendlich abnimmt und zuletzt für $n = \infty$ Null wird, so ist die gegenwärtige Reihe convergent.

Beispiel 3.

Um die Bedingung zu finden, unter welcher die nachstehende unendliche Reihe

$$\frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \ldots + \frac{1}{(2n)^m} + \frac{1}{(2n+2)^m} + \ldots$$

convergirt oder divergirt, hat man dafür:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n)^m}{(2n+2)^m} = \frac{(2n)^m}{(2n)^m + m(2n)^{m-1}\,2 + \ldots} = 1 - \frac{m}{n} + \text{etc.}$$

*) Wir werden weiter unten (Note zu §. 129.) in der That zeigen, dafs die Summe dieser unendlichen Reihe unendlich grofs ist (§. 129, 3), Note).

folglich

$$x = 1 - \frac{m}{n} \text{ und } a_n \frac{x}{1-x} = \frac{1}{(2n)^m} \cdot \frac{1-\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{1-\frac{m}{n}}{m\,2^m \cdot n^{m-1}}.$$

Dieser Quotient zeigt, daſs die Reihe für alle positiven Werthe von $m > 1$ convergirt, für alle übrigen Werthe aber divergirt.

§. 125.

Nimmt man, der gröſsern Einfachheit wegen, den Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ selbst für den Werth von x, welches offenbar erlaubt ist, weil erstens (da wir nur fallende Reihen zu berücksichtigen haben) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ist, und zweitens dieser Quotient, wie leicht zu sehen, eine Grenze für alle folgenden $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$, $\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}$, ... bildet; so verwandelt sich $a_n \frac{x}{1-x}$ in $\frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}}$, und es kann sofort das allgemeine Kennzeichen der Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen, durch folgenden einfachen Lehrsatz ausgedrückt werden.

Lehrsatz.

Sind a_n und a_{n+1} zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder, oder wenn ein regelmäſsiger Zeichenwechsel Statt findet, zwei auf einander folgende Gruppen, deren eine aus lauter positiven, die andere aus eben so vielen negativen Gliedern besteht, einer fallenden unendlichen Reihe; so ist die Reihe *convergent* oder *divergent*, je nachdem der Quotient $\frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}}$ für $n = \infty$ *Null*, oder nicht *Null* wird *).

*) Je nachdem im letztern Falle dieser Quotient, welcher zugleich die Grenze für E_n ist, positiv oder negativ ausfällt, wird auch die Summe der betreffenden unendlichen Reihe $+\infty$ oder $-\infty$.

Beispiel 1.

Für die Reihe

$$1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}+\ldots$$

ist
$$\frac{a_n\,a_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=\tfrac{1}{2},$$
folglich divergirt diese Reihe.

Beispiel 2.

Für die Reihe

$$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\ldots+\frac{1}{n^m}+\ldots$$

hat man

$$\frac{a_n\,a_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=\frac{1}{m\,n^{m-1}+\binom{m}{2}n^{m-2}+\ldots}$$

und daraus folgt, daſs diese Reihe bloſs für positive Werthe von m, welche zugleich die Einheit übersteigen, convergire, dagegen für alle übrigen Werthe divergent sey. (Für $m=1$ siehe §. 124., Beispiel 1.)

Beispiel 3.

Die Reihe

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\ldots\pm\frac{1}{2n-1}\mp\frac{1}{2n+1}\pm\ldots$$

gibt
$$\frac{a_n\,a_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=\mp\frac{1}{4n};$$
dieser Quotient, welcher für $n=\infty$ verschwindet, beweist also die Convergenz der gegenwärtigen Reihe.

Beispiel 4.

Um die Bedingungen für die Convergenz der Reihe:

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3.4\ldots n}+\ldots$$

zu finden, hat man

$$\frac{a_n\,a_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1-x)}=\frac{1}{\frac{1}{x}.\frac{2}{x}.\frac{3}{x}\ldots\frac{n}{x}\,\frac{(n+1-x)}{x}};$$

da nun bei der unendlichen Zunahme von n, dieser Quotient

für jeden endlichen Werth von x unendlich abnimmt, und für $n = \infty$ vollends verschwindet; so ist diese Reihe für alle Werthe von x, welche innerhalb der Grenzen $x = +\infty$ und $x = -\infty$ liegen, convergent.

Beispiel 5.

Für die Reihe

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \frac{x^{n+1}}{n+1} \pm \ldots$$

ist

$$\frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{\mp x^n x^{n+1}}{(n+1)x^n + n x^{n+1}} = \frac{\mp 1}{\frac{n+1}{x^{n+1}} + \frac{n}{x^n}}.$$

Da aber, wie leicht zu finden, das Verhältniſs $\frac{n}{x^n}$ bei der unendlichen Zunahme von n, für $x > 1$ 0, und für $x < 1$ ∞ zur Grenze hat*); so convergirt die gegenwärtige Reihe bloſs für die innerhalb der Grenzen $x = -1$ und $x = +1$ liegenden Werthe von x (diese letztere Grenze mit inbegriffen); für alle übrigen aber divergirt dieselbe.

Beispiel 6.

Für die Reihe

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \mp \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \ldots$$

hat man eben so:

$$\frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{\mp 1}{\frac{2n+1}{x^{2n+1}} + \frac{2n-1}{x^{2n-1}}},$$

woraus gleichfalls die Convergenz dieser Reihe innerhalb der Grenzen $x = -1$ und $x = +1$, d. i. nur für Werthe von $x < 1$, hervorgeht.

*) Für $x > 1$ kann man nämlich $x = 1 + \alpha$ setzen, wo α eine positive Gröſse bedeutet; dadurch wird $x^n = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \binom{n}{2}\alpha^2 + \ldots$, also $x^n = 1 + nR$, wo R eine unendliche Reihe bezeichnet, die für $n = \infty$ selbst Unendlich wird. Es ist daher $\frac{x^n}{n} = \frac{1}{n} + R$ für $n = \infty$ Unendlich, also $\frac{n}{x^n}$ dafür Null. Das Umgekehrte findet Statt für $x < 1$, weil man in diesem Falle $x = \frac{1}{1+\alpha}$ setzen kann.

Beispiel 7.

Für die Reihe

$$x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{2.3\ldots(2n-1)} \mp \ldots$$

erhält man

$$\frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{\mp 1}{\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x}\ldots\frac{2n+1}{x} + \frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x}\ldots\frac{2n-1}{x}};$$

und daraus folgt eben so, wie im Beisp. 4., daſs diese Reihe für jeden endlichen Werth von x, d. i. innerhalb der Grenzen $x = -\infty$ und $x = +\infty$ convergire.

Beispiel 8.

Dasselbe Ergebniſs findet man auch für die Reihe

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \ldots \pm \frac{x^{2n}}{2.3\ldots 2n} \mp \ldots,$$

für welche

$$\frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{\mp 1}{\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x}\ldots\frac{(2n+2)}{x} + \frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x}\ldots\frac{2n}{x}}$$

wird.

Beispiel 9.

Für die Reihe

$$1 + x\cos.\alpha + x^2\cos.2\alpha + x^3\cos.3\alpha + \ldots + x^n\cos.n\alpha + \ldots$$

folgt

$$\frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{x^{n+1}\cos.n\alpha\ \cos.(n+1)\alpha}{\cos.n\alpha - x\cos.(n+1)\alpha}.$$

Da nun für keinen Werth von n, $\cos.n\alpha$ die Einheit übersteigen kann, so wird, wie man leicht sieht, für $n = \infty$, dieser Quotient Null oder Unendlich, je nachdem $x <$ oder > 1 ist; die gegebene Reihe *convergirt* also nur für Werthe von x, welche innerhalb der Grenzen $x = -1$ und $x = +1$ liegen.

Dasselbe Ergebniſs erhält man für die Reihe

$$x\sin.\alpha + x^2\sin.2\alpha + x^3\sin.3\alpha + \ldots,$$

für welche man hat:

$$\frac{a_n\, a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{x^{n+1} \sin. n\alpha \sin. (n+1)\alpha}{\sin. n\alpha - x \sin. (n+1)\alpha}.$$

Beispiel 10.

Um endlich noch die Bedingungen der Convergenz für die Reihe

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,\ldots\ldots\,.\,n}x^n + \ldots,$$

welche (§. 13.) bloſs für ein ganzes positives m abbricht, zu finden, hat man

$$\frac{a_n\, a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\ldots.\,n(n+1+(n-m)x)}x^{n+1}.$$

Da nun bei einer unendlichen Zunahme von n, dieser Quotient bloſs für $x < 1$ unendlich abnimmt *); so convergirt die vorliegende Reihe ebenfalls nur für diese Werthe von x, d. h. innerhalb der Grenzen von $x = -1$ bis $x = +1$. Für $x = 1$ convergirt diese Reihe nur für positive Werthe von m. (M. vergl. §. 126., Beisp. 2.)

Zusatz. Tritt bei einer fallenden Reihe, wenigstens von einer gewissen Stelle an, ein regelmäſsiger Zeichenwechsel ein, und sind $\pm a_n \mp a_{n+1}$ zwei auf einander folgende Glieder, oder Gruppen, jede von gleich viel und mit einerlei Zeichen behafteten Gliedern; so nimmt der oft erwähnte Quotient die Form

$$\pm \frac{a_n\, a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} = \frac{\pm 1}{\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n}}$$

an. Da nun die Reihe, der Voraussetzung zufolge, fallend ist, also für $n = \infty$ sowohl a_n als auch a_{n+1} unendlich klein, oder $\frac{1}{a_n}$ und $\frac{1}{a_{n+1}}$ unendlich groſs wer-

*) Wir werden, um Wiederholungen zu vermeiden, den Beweis davon weiter unten bei der Convergenz unendlicher Factorenfolgen (§. 140.) allgemein für jeden Werth von m herstellen.

den; so folgt, dafs dieser Quotient ohne einer sonstigen Bedingung, für $n = \infty$ verschwindet: bei Reihen also, welche von irgend einem Gliede angefangen, einen regelmäfsigen Zeichenwechsel besizzen, ist das *blofse Fallen* derselben schon ein sicheres Kennzeichen ihrer *Convergenz*. (Man vergl. §. 124., Beisp. 2., und §. 125., Beisp. 5. *)

§. 126.

Hat die gegebene Reihe eine solche Gestalt, dafs dafür der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ die Form

$$\frac{n^\alpha + a n^{\alpha-1} + \ldots}{n^\alpha + A n^{\alpha-1} + \ldots}$$

erhält, so läfst sich mit Hilfe des Satzes im §. 123. oder 125. die Bedingung, unter welcher die Reihe convergirt, noch auf eine einfachere und für die Anwendung bequemere Weise ausdrücken.

Es sey nämlich das allgemeine Glied einer solchen Reihe

$$a_n = \frac{n^r + p n^{r-1} + \ldots}{n^m + p' n^{m-1} + \ldots},$$

wo r und m positive Gröfsen sind; so hat man

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^r + p(n+1)^{r-1} + \ldots}{(n+1)^m + p'(n+1)^{m-1} + \ldots} = \frac{n^r + (p+r) n^{r-1} + \ldots}{n^m + (p'+m) n^{m-1} + \ldots}$$

und

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^{r+m} + (p+p'+r) n^{r+m-1} + \ldots}{n^{r+m} + (p+p'+m) n^{r+m-1} + \ldots} = 1 - \frac{m-r}{n} + \ldots$$

Vergleicht man diesen Quotienten mit der oben vorausgesetzten Form, so folgt:

1) $\alpha = r + m$, $a = p + p' + r$ und $A = p + p' + m$.

Nach dem Satze in §. 123. ist aber für diesen Fall

$$x = 1 - \frac{m-r}{n} \text{ und}$$

*) Ausführlicher noch haben wir die hier vorgetragenen Kennzeichen, in einer im XVII. Bande der Jahrbücher des k. k. polyt. Institutes niedergelegten Abhandlung aufgestellt, und auf sehr viele und mannigfaltige Beispiele angewandt.

$$a_n \frac{x}{1-x} = \frac{(n^r + p\,n^{r-1} + \ldots)\left(1 - \frac{m-r}{n}\right)}{(n^{m-1} + p'\,n^{m-2} + \ldots)(m-r)};$$

soll nun bei dem unendlichen Wachsen von n, dieser Quotient unendlich abnehmen, so mufs offenbar $m-1>r$, d. i. $m-r>+1$, oder da aus den beiden letzten Gleichungen 1) $r=a-p-p'$ und $m=A-p-p'$, also $m-r=A-a$ folgt, auch $A-a>+1$ seyn; welches also die Bedingung für die Convergenz der in Rede stehenden Reihe ist. Dasselbe Resultat erhält man auch durch Anwendung des Satzes in §. 125.

Beispiel 1.

So zeigen die Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ in den Reihen

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots \text{ und } \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \ldots$$

(§. 125., Beisp. 1. u. 2.), welche respective die Werthe

$$\frac{2n-1}{2n+1} = \frac{n - \frac{1}{2}n^0}{n + \frac{1}{2}n^0} \text{ und } \frac{n^m}{(n+1)^m} = \frac{n^m + 0\,n^{m-1} + \ldots}{n^m + m\,n^{m-1} + \ldots}$$

erhalten, dafs die erstere, wegen $A-a=1$, divergire, und die letztere, wegen $A-a=m$, convergire, wenn $m>+1$, und divergire, wenn $m<1$ ist; wie wir dieses auch am angeführten Orte schon gefunden haben.

Beispiel 2.

Setzt man in der Reihe des zehnten Beispiels (§. 125.) $x=1$, so wird dafür

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{n-m}{n+1},$$

woraus ebenfalls wieder, und zwar einfacher als im vorigen Paragraphe, hervorgeht, dafs (wegen $A-a=m+1$) die betreffende Reihe nur für positive Werthe von m convergire.

Beispiel 3.

Da für die Reihe

$$1,\ \frac{\alpha\beta}{1.\gamma},\ \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)},\ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)},\ \ldots$$

der Quotient

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta}{n^2 + (\gamma+1)n + \gamma},$$

also $A - a = \gamma + 1 - \alpha - \beta$ wird; so folgt, daſs diese Reihe nur dann convergirt, wenn $\gamma > \alpha + \beta$ ist *).

Beispiel 4.

Nimmt man endlich die allgemeine Reihe der umgekehrten figurirten Zahlen (§. 90., Anmerk.):

$$\frac{1}{a(a+d)(a+2d)..(a+md)} + \frac{1}{(a+d)(a+2d)..[a+(m+1)d]} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{[a+(n-1)d][a+nd]..[a+(m+n-1)d]},$$

so wird dafür

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a+(n-1)d}{a+(n+m)d} = \frac{n+\left(\frac{a}{d}-1\right)}{n+\left(\frac{a}{d}+m\right)},$$

$$\text{mithin} \quad A - a = m + 1;$$

folglich convergirt diese Reihe für jeden positiven Werth von m; dagegen divergirt dieselbe für alle negativen Werthe von m.

Anmerk. Es wurden hier natürlich nur regelmäſsige und solche Reihen betrachtet, deren Bildungsgesetze bekannt sind; und diese sind es auch, mit denen man in der Regel zu thun hat. Sollten indeſs auch andere Reihen hinsichtlich ihrer Convergenz zu untersuchen seyn, so würde man versuchen müssen, durch Vergleichung derselben mit Reihen, deren Convergenz oder Divergenz bereits ausgesprochen ist, zum Ziele zu gelangen. Dabei geht man von dem Grundsatze aus, daſs eine Reihe, deren Glieder von irgend einer Stelle angefangen, sämmtlich kleiner als die correspondirenden Glieder einer convergenten Reihe sind, ebenfalls convergirt; daſs dagegen eine Reihe, deren Glieder sämmtlich

*) Dieser im gegenwärtigen Paragraphe entwickelte Satz ist zuerst von *Gauſs* aufgestellt, und insbesondere auf die eben untersuchte Reihe angewendet worden. *(Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores. Vol. II. ad A.* 1811 — 13. *Tom. II. Clasis Mathematicae)*

grö**ſ**ser als die einer divergenten Reihe sind, gleichfalls divergire.

So sieht man leicht, daſs es in der unendlichen Reihe $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$, wenn die Coefficienten $A, B, C, \ldots$ endliche Gröſsen sind, immer Werthe von $x < 1$ geben müsse, für welche diese Reihe convergirt; es mögen auch die Coefficienten A, B, ... innerhalb der angegebenen Grenze noch so groſs seyn. Auch kann in mehreren Fällen die Grenze dieser Werthe angegeben werden. Nehmen z. B. die Coefficienten A, B, C, D, ... nach einem kleinern als einem geometrischen Verhältnisse vom Exponenten m zu; so convergirt die Reihe für alle Werthe von $x < \frac{1}{m}$; denn es ist dann $A + Bx + Cx^2 + \ldots < A(1 + mx + m^2x^2 + \ldots)$, welche letztere geometrische Reihe aber für $mx < 1$, also für $x < \frac{1}{m}$ convergirt oder summirbar ist; folglich muſs es um so mehr auch die gegebene Reihe seyn.

Achtes Capitel.

Entwickelung der Exponentialgröſsen und logarithmischen Reihen. Bemerkungen über die Convergenz unendlicher Factorenfolgen.

§. 127.

Erklärung.

Jede Gröſse mit einem veränderlichen Exponenten heiſst Exponentialgröſse; diese Gröſsen sind sämmtlich in einer der beiden Formen a^x und y^x enthalten. Eine Exponentialgröſse entwickeln, heiſst dieselbe in eine unendliche convergente Reihe auflösen, welche nach ihrem veränderlichen Exponenten fortschreitet.

Um nun die Exponentialgröſse a^x zu entwickeln, setze man

$$a = 1 + b, \ldots (1$$

so wird

$$a^x = (1 + b)^x,$$

oder wenn man diese Potenz nach dem binomischen Lehrsatze, dessen allgemeine Giltigkeit wir für jeden Exponenten im §. 16. erwiesen haben, entwickelt:

$$a^x = 1 + xb + \frac{x(x-1)}{1.2}b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}b^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}b^4 + \ldots \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2.\ldots.n}b^n + \ldots,$$

und wenn man die Multiplicationen in den Binomial-Coefficienten verrichtet und alles nach x ordnet:

$$a^x = 1 + \left(1.b - \tfrac{1}{2}b^2 + \frac{-1.-2}{2.3}b^3 + \frac{-1.-2.-3}{2.3.4}b^4 + \ldots \ldots + \frac{-1.-2\ldots-(n-1)}{1.2\ldots(n-1)n}b^n\right)x + B_2x^2 + B_3x^3 + \ldots$$

oder

$$a^x = 1 + \left(b - \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{3}b^3 - \tfrac{1}{4}b^4 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \pm \frac{1}{n}b^n \mp \ldots\right)x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots;$$

dabei bilden, wie man sich leicht überzeugt, die Coefficienten B_2, B_3, . . . ganz unregelmäfsige, oder wenigstens solche unendliche Reihen von b, deren Bildungsgesetze unbekannt sind.

Bezeichnet man endlich die den Coefficienten von x bildende Reihe, deren Gesetz ganz einfach ist, und wie man sieht, lediglich von dem bekannten Bildungsgesetze der Binomial-Coefficienten abhängt, der Kürze wegen durch A_1; so ist, wenn man sogleich für b seinen aus der obigen Gleichung (1 folgenden Werth $a - 1$ setzt:

$$A_1 = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \tfrac{1}{4}(a-1)^4 + \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{1}{n}(a-1)^n \mp \ldots \quad (2$$

und ferner:

$$a^x = 1 + A_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots + B_n x^n + \ldots \quad (\alpha$$

Um nun auch die Coefficienten B_2, B_3, . . ., welche noch als unbestimmt anzusehen sind, durch dieselbe einfache Reihe A_1 auszudrücken, kann man bemerken, dafs diese Coefficienten von x gänzlich unabhängig sind, und daher, wenn sie bei irgend einem Werthe von x bestimmt werden, auch für alle übrigen Werthe, d. i. allgemein gelten. Setzt man demnach in dieser letzten Gleichung statt x $2x$, so erhält man:

$$a^{2x} = 1 + 2A_1 x + 4B_2 x^2 + 8B_3 x^3 + \ldots + 2^n B_n x^n + \ldots$$

Es ist aber auch

$$a^{2x} = (a^x)^2 = (1 + A_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n + \ldots)^2,$$

folglich erhält man, wenn dieses Polynom zur zweiten Potenz erhoben (§. 8.), und diese Entwickelung der vorigen gleich gesetzt wird, die identische Gleichung:

$$1 + 2A_1 x + \left.\begin{matrix} 2B_2 \\ A_1^2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 2B_3 \\ 2A_1 B_2 \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots + \left.\begin{matrix} 2B_n \\ 2A_1 B_{n-1} \\ 2B_2 B_{n-2} \\ \ldots\ldots \end{matrix}\right\} x^n + \ldots$$
$$= 1 + 2A_1 x + 4B_2 x^2 + 8B_3 x^3 + \ldots + 2^n B_n x^n + \ldots$$

Daraus erhält man (§. 2.)

$$2B_2 + A_1^2 = 4B_2 \quad \text{oder} \quad B_2 = \frac{A_1^2}{2};$$

$$2B_3 + 2A_1B_2 = 8B_3 \quad \text{oder} \quad B_3 = \frac{A_1^3}{2.3};$$

.

$$2B_n + 2A_1B_{n-1} + 2B_2B_{n-2} + \ldots = 2^n B_n,$$

und daraus folgt leicht, wenn man das Gesetz für B_{n-1}, B_{n-2}, . . ., d. i. für die vorhergehenden Coefficienten gelten läſst, allgemein:

$$B_n = \frac{A_1^n}{2.3\ldots n} \;{}^{*}).$$

*) Daſs das Gesetz in der Bildung der Coefficienten B_2, B_3, . . . allgemein, also die Relation

$$B_n = \frac{A_1^n}{2.3.4\ldots n} \;\ldots (\alpha$$

für jeden ganzen positiven Werth von n gilt, läſst sich durch folgende interessante Entwickelung darthun.

Läſst man dieses Bildungsgesetz für B_2, B_3, . . . bis B_n, wo zuerst n eine gerade Zahl bedeuten soll, gelten; so hat man nach den obigen allgemein geltenden Relationen:

$$2(2^1 - 1)B_2 = A_1^2,$$
$$2(2^2 - 1)B_3 = 2A_1B_2,$$
$$2(2^3 - 1)B_4 = 2A_1B_3 + B_2^2,$$

.

$$2(2^n - 1)B_{n+1} = 2A_1B_n + 2B_2B_{n-1} + 2B_3B_{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + 2B_{\frac{n}{2}}B_{\frac{n}{2}+1} \;\ldots (\beta$$

Setzt man in der letzten dieser Gleichungen für B_n, B_{n-1}, . . . B_2 die Werthe aus (α und kürzt gleich durch 2 ab, so erhält man:

$$(2^n - 1)B_{n+1}$$
$$= A_1^{n+1}\left\{\frac{1}{2.3\ldots n} + \frac{1}{2.2.3\ldots(n-1)} + \frac{1}{2.3.2.3\ldots(n-2)} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{1}{2.3\ldots\frac{n}{2}.2.3\ldots\left(\frac{n+2}{2}\right)}\right\};$$

oder, wenn man durchaus mit $2.3.4\ldots n(n+1)$ multiplicirt und abkürzt:

Diese für B_2, B_3, ... gefundenen Werthe in die obige Gleichung (α gesetzt, geben endlich für die gesuchte Ent-

$$2.3\ldots n(n+1)(2^n-1)B_{n+1}$$

$$= A_1^{n+1}\left\{(n+1)+\frac{(n+1)n}{1.2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{(n+1)n(n-1)\ldots\left(\frac{n+4}{2}\right)}{1.2.3\ldots\ldots\frac{n}{2}}\right\}.$$

Nun ist aber auch

$$2^{n+1}=(1+1)^{n+1}=1+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\ldots$$

$$\ldots+\binom{n+1}{\frac{n}{2}}+\binom{n+1}{\frac{n}{2}}+\ldots+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{1}+1;$$

oder, wenn man die Glieder paarweise zusammenzieht und durch 2 dividirt:

$$2^n=1+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\ldots+\binom{n+1}{\frac{n}{2}},$$

d. i.

$$2^n-1=(n+1)+\frac{(n+1)n}{1.2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(n+1)n(n-1)\ldots\left(\frac{n+4}{2}\right)}{1.2.3\ldots\ldots\frac{n}{2}},$$

welches sofort die im zweiten Theile der vorigen Gleichung befindliche Reihe ist, so dafs diese Gleichung nun die einfachere Form erhält:

$$2.3\ldots n(n+1)(2^n-1)B_{n+1}=A_1^{n+1}(2^n-1),$$

woraus endlich

$$B_{n+1}=\frac{A_1^{n+1}}{2.3.4\ldots n(n+1)}\ldots(\gamma$$

folgt.

Ist aber n ungerad, so erhält man statt der obigen Relation (β die folgende:

$$2(2^n-1)B_{n+1}=2A_1B_n+2B_2B_{n-1}+\ldots+B^2_{\frac{n+1}{2}},$$

und daraus erhält man ganz auf die vorige Art, wenn man wieder für B_n, B_{n-1}, ... substituirt:

wickelung:

$$a^x = 1 + \frac{A_1\,x}{1} + \frac{A_1^2\,x^2}{1\,.\,2} + \frac{A_1^3\,x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots + \frac{A_1^n\,x^n}{1\,.\,2\ldots n} + \ldots (3$$

wobei A_1 die in (2 angegebene unendliche Reihe bezeichnet und sofort eine Function von der **Basis** a ist *). Ist

$$(2^n - 1)\,B_{n+1} = A_1^{n+1}\left\{\frac{1}{2\,.\,3\ldots n} + \frac{1}{2\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,2\,.\,3\ldots(n-2)} + \ldots + \frac{1}{\left(2\,.\,3\ldots\frac{n+1}{2}\right)^2}\right\}$$

oder

$$2\,.\,3\ldots n\,(n+1)(2^n - 1)\,B_{n+1}$$

$$= A_1^{n+1}\left\{(n+1) + \frac{(n+1)\,n}{1\,.\,2} + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\frac{n+1}{2}}\right\};$$

und da, wegen $(n+1)$ gerade,

$$2^{n+1} = (1+1)^{n+1}$$

$$= 2\left\{1 + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2}\binom{n+1}{\frac{n+1}{2}}\right\},$$

also

$$2^n - 1 = (n+1) + \frac{(n+1)\,n}{1\,.\,2} + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(n+1)\,n\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\,.\,2\ldots\frac{n+1}{2}}$$

ist, auch

$$2\,.\,3\ldots n\,(n+1)(2^n - 1)\,B_{n+1} = A_1^{n+1}\,(2^n - 1),$$

woraus auch bei dieser Beschaffenheit von n, wieder für B_{n+1} der vorige Werth (γ folgt.

Da also das Bildungsgesetz von B_n auch für B_{n+1} gilt, und dieses für $n = 2, 3, \ldots$ richtig ist; so muſs es allgemein für alle Coefficienten der obigen Reihe (3 gelten.

*) Im zweit folgenden Paragraphe werden wir finden, daſs $A_1 = la$, d. i. der natürliche Logarithme von der Basis a ist; mit diesem Werthe von A_1 wird die Reihe (3 auch

A_1 eine endliche Gröfse, so convergirt diese Reihe (3 (§. 125., Beisp. 4.) für alle Werthe von x innerhalb der Grenzen $x = -\infty$ und $x = +\infty$ *).

§. 128.

Setzt man in der vorigen Reihe (3 $A_1 = 1$, und bezeichnet den besondern Werth, welchen dadurch a vermöge der Gleichung (2 (wenn man diese umkehrt) erhalten mufs, mit e; so wird:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \ldots \quad (4$$

$$\left\{\begin{matrix} \text{von } x = -\infty \\ \text{bis } x = +\infty \end{matrix}\right\}.$$

Um den numerischen Werth von e zu finden, dürfte man nur die obige Reihe (2 nach §. 120. umkehren, und in dieser dann $A_1 = 1$ setzen (diefs ist bereits im zweiten Beispiel des erwähnten Paragraphes indirect geschehen, indem man daraus hat $a - 1 = A_1 + \frac{A_1^2}{1 \cdot 2} + \frac{A_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$); allein man kann einfacher noch die vorige Reihe (4 selbst zu diesem Zwecke benützen, indem man blofs $x = 1$ zu setzen braucht; diefs gibt:

$$e = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots,$$

oder wenn man alles in Decimalbrüche verwandelt und reducirt:

$$e = 2{\cdot}718281828 \ldots \quad (5$$

Die logarithmischen Reihen.

§. 129.

Bezeichnet man die Basis oder Grundzahl irgend eines Logarithmen-Systems mit a, so ist bekanntlich die

immer geschrieben (m. s. die Anmerk. am Schlusse des erwähnten §. 129.) und dadurch Jedermann von selbst verständlich.

*) Wir werden der Kürze wegen in der Folge, wo wir es für nöthig halten, die Grenzen, innerhalb welcher die betreffende Reihe convergirt, in Klammern { } ohne alle weitere Bemerkung, unter oder neben die Reihe setzen.

Grundgleichung der Logarithmen:

$$a^x = y \text{ und daraus } x = log.y \;.\;.\;. \;(m$$

für dieses System.

Um nun $log.y$ in eine Reihe nach y zu entwickeln, hat man nach der vorigen ersten Gleichung, wenn man beide Theile derselben zur Potenz z erhebt: $a^{xz} = y^z$, oder, wenn man sowohl a^{xz} als auch y^z nach der Reihe (3 (§. 127.), und zwar nur bis zum dritten Gliede entwickelt:

$$1 + A_1 xz + \ldots = 1 + \alpha_1 z + \ldots,$$

wobei eben so, wie

$$A_1 = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \tfrac{1}{4}(a-1)^4 + \ldots$$

ist, auch

$$\alpha_1 = (y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \tfrac{1}{4}(y-1)^4 + \ldots$$

seyn muſs. Da aber sowohl $A_1 x$, wie auch α_1, von z ganz unabhängige Gröſsen sind; so hat man nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten:

$$A_1 x = \alpha_1, \text{ also}$$

$$x = \frac{\alpha_1}{A_1} = \frac{1}{A_1}[(y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \ldots],$$

wenn man nämlich für α_1 substituirt. Setzt man endlich auch für x den Werth aus $(m$, und der Kürze wegen

$$\frac{1}{A_1} = \frac{1}{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 + \ldots} = M \;. \;(n$$

so hat man:

$$1)\quad log.y = M[(y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \tfrac{1}{4}(y-1)^4 + \ldots],$$

und wenn statt y, $1+y$ gesetzt wird:

$$2)\quad log.(1+y) = M(y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{5}y^5 - \tfrac{1}{6}y^6 + \ldots]$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{von } y = -1 \\ \text{bis } y = +1\end{matrix}\right\} \text{ (§. 125., Beisp. 5.).}$$

Der Factor M, welcher, wie die Gleichung $(n$ zeigt, bloſs von der Grundzahl a abhängt, also für ein und dasselbe System beständig ist, heiſst Modul des Systems von der Basis a.

Nimmt man, als einfachsten und natürlichsten Fall,

$M = 1$; so heifsen die mit diesem Modul berechneten Logarithmen **natürliche**, oder nach ihrem Erfinder (*John Napier*, geb. zu Merchiston in Schottland 1550; gest. 1618) *Neper*'sche *), und manchmal auch, aus einem in der Folge einzusehenden Grunde, **hyperbolische** Logarithmen, und es wird ein solcher durch *lognat. (logarithmus naturalis)*, *lognep. (log. Neperianus)*, *loghyp. (log. hyperbolicus)*, am gewöhnlichsten aber, welche Bezeichnung wir auch durchaus beibehalten wollen, blofs durch l bezeichnet.

Man hat also

$$3)\quad l(1+y) = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \ldots \text{ **)}$$

Anmerk. Setzt man in dieser letzten Reihe $y = a - 1$ so erhält man

$$la = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \tfrac{1}{4}(a-1)^4 + \ldots,$$

welches sofort die im §. 127. für A_1 gefundene Reihe (2 ist, so, dafs also ganz einfach $A_1 = la$ wird. Mit diesem Wer-

*) Die Basis der *Neper*'schen Logarithmen ist indefs nicht jener der **natürlichen** gleich, und es weichen die erstern, wenn auch nicht **wesentlich**, doch wenigstens in der **Form** von den natürlichen Logarithmen ab. Denn einmal hat man im *Neper*'schen Systeme nicht die Logarithmen der **Zahlen**, sondern der **Verhältnisse** dieser Zahlen zu 10^7. Da ferner *Neper* seine Logarithmen (in: *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio etc. Edinburgi* 1614) nur für die Sinus aller Winkel von Minute zu Minute durch den ersten Quadranten, und zwar für den Radius oder Sinustotus $= 10^7$ erfand und berechnete, und *log. Sintot.* $= 0$, *log. sin.* $89^0\,59' = 1$ setzte; so ist in seinem Systeme

$$log.\ 10000000 = 0 \quad \text{und} \quad log.\ 9999999 = 1.$$

(Nach *Neper's* eigener Bemerkung, ist 1 nicht vollkommen genau, sondern es fällt dieser Logarithme zwischen die Grenzen 1·0000000 und 1·0000001, so, dafs man dafür richtiger 1·00000005 nehmen kann; mit diesem Werthe wird dann die Basis der *Neper*'schen Logarithmen = 9999999·00000005). Man hat daher, da auch noch bei ihm die Logarithmen der eigentlichen Brüche **positiv** sind:

$$log.\,Nep.\,y = -10000000\ lognat.\ \frac{y}{10000000}.$$

**) Aus dieser Reihe folgt, wenn man $y = -1$ setzt:

$$l(1-1) = l0 = -\infty = -1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \ldots;$$

also ist die Summe der unendlichen Reihe (§ 124., Beisp. 1., Note):

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots = \infty.$$

the läfst sich nun auch die im genannten Paragraphe für a^x entwickelte Reihe (3, ohne weitere Interpretation für A_1, so schreiben:

$$3') \quad a^x = 1 + \frac{la}{1}x + \frac{l^2 a}{1.2}x^2 + \frac{l^3 a}{1.2.3}x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{l^n a}{1.2\ldots n}x^n + \ldots$$

§. 130.

Da für das natürliche Logarithmen-System $M = 1$ ist, dafür aber aus der Gleichung (n des vorigen Paragraphes $A_1 = \frac{1}{M} = 1$, und für diesen Werth von A_1 endlich aus der Gleichung (5, §. 128., $a = e = 2\cdot718\ldots$ entsteht; so folgt, dafs diese eben angeführte Zahl e **die Basis der natürlichen Logarithmen** ist, und es wird dieselbe auch ausschliefsend mit diesem Buchstaben in der ganzen Analysis bezeichnet.

Da die Reihe 3) des vorigen Paragraphes für $y = a - 1$ mit dem Nenner des Ausdruckes von M in der Gleichung (n identisch wird, so hat man auch

$$M = \frac{1}{la}:$$

es ist also allgemein der Modul des Logarithmen-Systems von der Basis a, gleich der Einheit, dividirt durch den natürlichen Logarithmus der Basis dieses Systems.

Bekanntlich hat man, um von einem logarithmischen Systeme auf ein anderes überzugehen, die Gleichung

$$Log.y = \frac{log.y}{log.a},$$

wenn nämlich a die Basis des **neuen**, durch *Log.* bezeichneten Systems ist, und *log.* die **alten** oder **bekannten** Logarithmen bezeichnen *). Nimmt man nun die **natür-**

*) Es ist nämlich, wenn a die Basis des alten oder bekannten Systems ist: $a^x = y$ oder $x = log.y$, und $a^{x'} = y$ oder $x' = Log.y$. Ferner hat man $a^x = a^{x'}$, oder wenn man beiderseits die Logarithmen, und zwar aus dem bekannten Sy-

lichen Logarithmen, welche sofort am einfachsten zu berechnen sind, für die bekannten, und bezeichnet den Logarithmus aus irgend einem andern Systeme, welches man im Gegensatze mit dem natürlichen ein künstliches nennt, durch *logart.* (*logarithmus artificialis*); so hat man

$$logart.y = \frac{1}{lognat.\,a}\,lognat.y = M\,lognat.y:$$

d. h. es wird der Logarithmus einer Zahl für irgend ein System gefunden, wenn man den natürlichen Logarithmus derselben Zahl mit dem Modul dieses Systems multiplicirt.

§. 131.

Da die Reihe 2) (§. 129.) nur für Werthe von $y < 1$ convergirt, so könnte diese bloſs zur Berechnung der Logarithmen eigentlicher Brüche benützt werden. Um diese daher für ganze Zahlen oder für Werthe von $y > 1$ schnell convergirend zu machen, verfährt man auf folgende Weise:

Setzt man in der genannten Reihe 2) statt y, $-y$ und zieht die entstehende Reihe von der erstern ab; so erhält man:

$$\beta) \ldots log.(1+y) - log.(1-y) = log.\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$
$$= 2M(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \tfrac{1}{7}y^7 + \ldots);$$

und wenn man $\frac{1+y}{1-y} = \frac{x}{x-1}$ setzt, woraus $y = \frac{1}{2x-1}$ folgt, auch

$$log.\left(\frac{x}{x-1}\right) = 2M\left[\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{3(2x-1)^3} + \frac{1}{5(2x-1)^5} + \ldots\right],$$

und daraus:

$$4) \ldots log.x = log.(x-1)$$
$$+ 2M\left[\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{3(2x-1)^3} + \frac{1}{5(2x-1)^5} + \ldots\right].$$

Diese Reihe convergirt schon so gut, daſs das dritte

steme nimmt: $x\,log.a = x'\,log.a$, oder wegen $log.a = 1$, $x' = \frac{x}{log.a}$, d. i. $Log.y = \frac{log.y}{log.a}$.

Glied derselben bei der Berechnung der Logarithmen auf zehn Decimalstellen keinen Einfluſs mehr hat, sobald die Zahlen x gröſser als 50 werden. Für Zahlen hingegen, die bereits 1000 übersteigen, reicht man bei der angeführten Grenze schon mit dem ersten Gliede aus.

Werden die Logarithmen von Vorne an der Reihe nach berechnet, so ist, da auch für $x = 2$, $log.(x-1) = log.\,1 = 0$ ist, der nächst vorhergehende Logarithme $log.(x-1)$, welcher in der obigen Reihe 4) vorkommt, immer schon bekannt. Uebrigens muſs bemerkt werden, daſs man nur die Logarithmen der Primzahlen auf diese Weise berechnet, dagegen die der zusammengesetzten Zahlen durch bloſse Addition, oder Vervielfältigung der erstern erhält.

Werden nach der vorigen Reihe 4) die natürlichen Logarithmen der drei ersten Primzahlen bis auf sieben Decimalstellen berechnet; so erhält man, wegen $M = 1$:

$$l2 = 0 + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \ldots\right)$$

$$= 0{\cdot}69314718;$$

$$l3 = l2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right)$$

$$= 1{\cdot}09861229;$$

$$l5 = 2l2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \frac{1}{7.9^7} + \ldots\right)$$

$$= 1{\cdot}60943791.$$

Daraus hat man z. B.

$$l10 = l2 + l5 = 2{\cdot}30258509.$$

§. 132.

Um die letzte Reihe 4) noch convergenter zu machen, setze man $x = z^2$; so folgt, wegen

$$log.(x-1) = log.(z^2-1) = log.(z+1) + log.(z-1):$$

$$5)\quad log.\,z = \frac{log.(z-1) + log\,(z+1)}{2}$$

$$+ M\left[\frac{1}{2z^2-1} + \frac{1}{3(2z^2-1)^3} + \frac{1}{5(2z^2-1)^5} + \ldots\right].$$

In dieser Formel sind, wenn $log.\,2$, etwa nach 4), be-

reits berechnet worden, die Logarithmen der geraden Zahlen $z-1$ und $z+1$ immer schon bekannt. Die Reihe convergirt schon so stark, dafs wenn man in der Berechnung bereits bis zur Zahl 37 gekommen ist, und die Logarithmen nur auf 10 Decimalstellen verlangt werden, das erste Glied derselben schon hinreicht *).

§. 133.

Um die obigen Reihen für den Fall, dafs die Logarithmen auf zwanzig oder dreifsig Decimalstellen berechnet werden sollen, noch convergenter zu machen, und die ganze Rechnung mehr auf eine blofse Zusammensetzung der schon berechneten Logarithmen zu reduciren; kann man folgende Wege einschlagen.

a) Man setze in der Reihe β), §. 131., $y = \frac{2}{x^3 - 3x}$; so wird wegen $1 + y = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - 3x} = \frac{(x-1)^2 (x+2)}{x^3 - 3x}$,

*) Um auch den ersten Logarithmen nach dieser Reihe 5) zu berechnen, setze man nach und nach $z = 2$ und $z = 3$; dadurch erhält man, wenn Kürze halber die Reihen

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{3 \cdot 7^3} + \frac{1}{5 \cdot 7^5} + \ldots \text{ und } \frac{1}{17} + \frac{1}{3 \cdot 17^3} + \ldots$$

beziehungsweise durch A und B bezeichnet werden:

$$2\,l\,2 = l\,3 + 2A \quad\text{und}\quad 2\,l\,3 = 3\,l\,2 + 2B;$$

aus welchen Gleichungen sofort $l\,2 = 2(2A + B)$ und $l\,3 = 2(3A + 2B)$ folgt.

Will man aus dieser Reihe gleichzeitig die Logarithmen der drei ersten Primzahlen herleiten, so darf man nur nach und nach $z = 4$, 5 und 9 setzen. Werden dann wieder die entstehenden Reihen

$$\frac{1}{31} + \frac{1}{3 \cdot 31^3} + \ldots, \quad \frac{1}{49} + \frac{1}{3 \cdot 49^3} + \ldots$$

$$\text{und } \frac{1}{161} + \frac{1}{3 \cdot 161^3} + \ldots$$

durch A, B und C bezeichnet; so erhält man:

$$-4\,l\,2 + l\,3 + l\,5 + 2A = 0, \quad 3\,l\,2 + l\,3 - 2\,l\,5 + 2B = 0,$$
$$4\,l\,2 - 4\,l\,3 + l\,5 + 2C = 0;$$

und aus diesen Gleichungen ganz einfach:

$$l\,2 = 2(7A + 5B + 3C); \quad l\,3 = 2(11A + 8B + 5C);$$
$$l\,5 = 2(16A + 12B + 7C).$$

$$1 - y = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 3x} = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3 - 3x} \text{ und } \frac{1+y}{1-y} = \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+1)^2(x-2)}:$$

$$log.\,\frac{(x-1)^2\,(x+2)}{(x+1)^2(x-2)} = 2M\left[\frac{2}{x^3-3x} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3 + \ldots\right],$$

und daraus

$$6)\quad log.\,(x+2) = 2\,log.\,(x+1) + log.\,(x-2) - 2\,log.\,(x-1) + 2MR,$$

wo R die vorige Reihe $\frac{2}{x^3-3x} + \ldots$ bezeichnet. Diese Reihe, welche von *Borda* herrührt *), wird erst vortheilhaft, wenn x wenigstens schon $= 7$ ist.

b) Setzt man in derselben Reihe β) überhaupt $y = \frac{p-q}{p+q}$, wodurch $\frac{1+y}{1-y} = \frac{p}{q}$ wird, und wobei p und q noch unbestimmte Gröfsen sind; so hat man:

$$\gamma)\quad log.\,\frac{p}{q} = 2M\left[\left(\frac{p-q}{p+q}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3 + \ldots\right].$$

Aus dieser Formel lassen sich nun sehr viele brauchbare und gut convergirende Reihen ableiten; es kommt nur darauf an, für p und q solche Werthe zu finden, welche sich erstens in passende Factoren zerlegen lassen, und für welche zweitens $p+q$ gegen $p-q$ bedeutend grofs ausfällt.

Setzt man z. B. $p = x^4 - 25x^2 = x^2(x+5)(x-5)$ und $q = x^4 - 25x^2 + 144 = (x+3)(x+4)(x-3)(x-4)$; so wird $p+q = 2(x^4 - 25x^2 + 72)$ und $p - q = -144$; folglich, wenn man diese Werthe in γ) substituirt und sodann daraus $log.\,(x+5)$ bestimmt, endlich der Kürze wegen die Reihe

$$\frac{72}{x^4 - 25x^2 + 72} + \frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4 - 25x^2 + 72}\right)^3 + \ldots = S$$

setzt:

$$7)\quad log.\,(x+5) = log.\,(x+4) + log.\,(x+3) + log.\,(x-4) + log.\,(x-3) - 2\,log.\,x - log.\,(x-5) - 2MS.$$

*) Sie steht in der Vorrede der »*Tables trigonométriques décimales, calculées par Borda, revues et augmentées par M. Delambre.*

Diese von *Haros* aufgestellte Reihe convergirt schon so ungemein stark, dafs für $x = 1000$ das erste Glied nur mehr den Werth $\cdot 0^{10}72\ldots$ erhält, und das folgende selbst auf die ersten dreifsig Decimalstellen keinen Einflufs mehr hat. Mit Hilfe einer Tafel also, welche die Logarithmen der ersten 1000 oder 1004 Zahlen auf dreifsig Decimalstellen enthält, kann man nach dieser *Haros*'schen Reihe bequem die Logarithmen der folgenden Zahlen mit derselben Genauigkeit finden *).

§. 134.

Setzt man in der Grundreihe 1), §. 129., $y = \sqrt[n]{x}$, wo n eine unbestimmte positive oder negative ganze Zahl bezeichnet; so erhält man, wegen $log. y = \frac{1}{n} log. x$:

$$8)\ log. x = n. M\left[(\sqrt[n]{x} - 1) - \tfrac{1}{2}(\sqrt[n]{x} - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(\sqrt[n]{x} - 1)^3 - \ldots\right].$$

*) Brauchbar für p und q sind auch folgende Werthe:

$$p = x^4 + 10x^3 + 25x^2 = x^2(x+5)^2 \text{ und}$$
$$q = x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 36 = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6);$$

oder auch:

$$p = (x+2)(x+4)(x+10)(x-7)(x-9) \text{ und}$$
$$q = (x-2)(x-4)(x-10)(x+7)(x+9), \text{ u. s. w.}$$

Setzt man

$$p = x^6 - 98x^4 + 2401x^2 = x^2(x+7)^2(x-7)^2 \text{ und}$$
$$q = x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 14400$$
$$= (x+8)(x-8)(x+5)(x-5)(x+3)(x-3),$$

so wird,

$$\frac{p-q}{p+q} = \frac{7200}{x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 7200} = A \text{ gesetzt,}$$

diese Werthe für p und q in der obigen Gleichung γ) substituirt und dann daraus $log.(x+8)$ bestimmt:

$$log.(x+8) = 2\,log.(x+7) - log\,(x+5) - log.(x+3)$$
$$+ 2\,log\,x - log\,(x-3) - log.(x-5)$$
$$+ 2\,log.(x-7) - log.(x-8) - 2M(A - \tfrac{1}{3}A^3 + \ldots).$$

Das erste Glied A der Reihe wird für $x = 1000$ schon kleiner als $\cdot 0^{13}1$; man kann also, wenn die Zahlen einmal 1000 übersteigen, und die Logarithmen nur auf zehn oder zwölf Decimalstellen berechnet werden, die Reihe selbst ganz weglassen.

Mehreres hierüber findet man in einer Abhandlung von *Lavernede* in *Gergonne's Annales de Mathématiques. Tom. I.*

Dieser von *Lagrange* herrührenden Reihe kann man jede beliebige Convergenz verschaffen, wenn man nur n hinreichend grofs nimmt, so dafs dadurch für $x > 1$, $\sqrt[n]{x}$ die Form $1{\cdot}000\ldots0\alpha\beta\ldots$, also $\sqrt[n]{x} - 1$ jene ${\cdot}000\ldots0\alpha\beta\ldots$ erhält. Soll das erste Glied dieser Reihe zur Berechnung der Logarithmen auf $2m$ Decimalstellen hinreichen, so mufs n so grofs genommen werden, dafs $\sqrt[n]{x} - 1 = {\cdot}0^m\alpha\beta\ldots$ wird; am bequemsten ist es, für n eine Potenz von 2 zu wählen, weil sich dann die Ausziehung der n^{ten} Wurzel durch ein wiederholtes Quadratwurzel-Ausziehen bewerkstelligen läfst. Es ist indefs diese Methode in der Anwendung, obschon sie in der That dieselbe ist, nach welcher *Briggs* die ersten Logarithmen wirklich berechnet hat, äusserst beschwerlich und ermüdend, wovon man sich leicht einen Begriff machen kann, wenn man weifs, dafs, um z. B. $\sqrt[n]{10}$ auf den Werth $1{\cdot}0^{17}1997$ herabzubringen, $n = 2^{60}$ seyn mufs, also sechzig auf einander folgende Wurzelausziehungen erforderlich sind (wenn sich auch schon die letzten Ausziehungen der Quadratwurzel, auf ein blofses Halbiren reduciren, indem bekanntlich bis auf die letzte Decimale genau z. B. $\sqrt{1{\cdot}000\alpha\beta\gamma} = 1{\cdot}000\frac{\alpha\beta\gamma}{2}$ ist).

Anmerk. Für ein negatives n verwandelt sich die vorige Reihe 8) in folgende:

$$log.x = nM\left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right) + \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)^2 + \ldots\right].$$

Da nun für $x > 1$ auch $\sqrt[n]{x} > 1$ bleibt, so ist sowohl in der Reihe 8) $(\sqrt[n]{x} - 1)$, wie auch in dieser hier $\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)$ positiv; folglich ist für jeden endlichen Werth von n,

$$log.x < nM(\sqrt[n]{x} - 1), \text{ und zugleich } log.x > nM\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right).$$

Diese beiden Grenzen rücken einander aber um so näher, je gröfser n wird; für $n = \infty$ fallen diese vollends zusammen,

so, dafs man dafür hat

$$log.\, x = n M (\sqrt[n]{x} - 1) = n M \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \right).$$

Da aber bei diesem Werthe von n, $\sqrt[n]{x}$ unendlich viele Werthe oder Wurzeln erhält, von denen nur eine möglich (und $= 1$) ist, die übrigen sämmtlich imaginär sind; so folgt auch, dafs einer jeden ganzen Zahl x unendlich viele Logarithmen zukommen, von denen jedoch nur *einer reell* ist. (Noch auf eine andere Weise wird dieser Satz im §. 148. erwiesen werden.)

§. 135.

So brauchbar auch die in den vorigen Paragraphen angegebenen Reihen zur Berechnung der Logarithmen, ihrer ungemeinen Convergenz wegen, sind, so würde man doch, wenn es sich heutzutage um die Berechnung eines ganzen logarithmischen Werkes handelte, damit noch ein Verfahren verbinden, welches die Differenzenrechnung darbietet, und in solchen Fällen immer das Bequemste und Sicherste ist. (Man vergl. §. 95.) Der dabei einzuschlagende Weg wäre im Wesentlichen folgender:

Setzt man in der Reihe 2) (§. 129.) $y = \frac{d}{n}$ und $M = 1$, so wird, wegen $l(1+y) = l(n+d) - ln$:

$$l(n+d) = ln + \frac{d}{n} - \frac{d^2}{2n^2} + \frac{d^3}{3n^3} - \text{etc.},$$

und aus dieser Reihe folgen, wenn man für d nach und nach $0d$, $1d$, $2d$, $3d$, ... schreibt, die Reihen:

$$ln = ln,$$

$$l(n+d) = ln + 1.\frac{d}{n} - 1^2.\frac{d^2}{2n^2} + 1^3.\frac{d^3}{3n^3} - 1^4.\frac{d^4}{4n^4} + \ldots,$$

$$l(n+2d) = ln + 2.\frac{d}{n} - 2^2.\frac{d^2}{2n^2} + 2^3.\frac{d^3}{3n^3} - 2^4.\frac{d^4}{4n^4} + \ldots,$$

$$l(n+3d) = ln + 3.\frac{d}{n} - 3^2.\frac{d^2}{2n^2} + 3^3.\frac{d^3}{3n^3} - 3^4.\frac{d^4}{4n^4} + \ldots,$$

. .

Mit Berücksichtigung, daſs in diesen Reihen, wenn die Glieder nach verticalen Columnen gezählt werden, die Zahlencoefficienten von $\frac{d}{n}$, $\frac{d^2}{2n^2}$, $\frac{d^3}{3n^3}$, ... nichts anders als die auf einander folgenden Potenzen der natürlichen Zahlen, diese aber (§. 85., Anmerk. 2., *a*) beziehungsweise arithmetische Reihen des 1sten, 2ten, 3ten, ... Grades sind: sieht oder findet man leicht, daſs, wenn in der Reihe der Logarithmen ln, $l(n+d)$, $l(n+2d)$, ... die auf einander folgenden Differenzen genommen werden, in der ersten Differenzreihe das erste Glied ln, in der zweiten Differenzreihe die beiden ersten Glieder, in der dritten Differenzreihe auſser diesen noch das dritte Glied in $\frac{d^2}{2n^2}$ u. s. w. fehlen oder wegfallen, also die m^{te} Differenzreihe mit dem Gliede $\pm m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1 \frac{d^m}{mn^m}$ anfangen muſs, auf welches dann Glieder mit noch höhern Potenzen von $\frac{d}{n}$ folgen.

Ist nun $\frac{d}{n}$ ein kleiner Bruch, z. B. $= \frac{1}{100}$, so hat das erste Glied der sechsten Differenzreihe nur mehr die Gröſse $\frac{6.5.4.3.2.1}{6.(100)^6} = \cdot 0^9 12$, und die darauf folgenden Glieder sind noch kleiner. Nimmt man also z. B. diese sechsten Differenzen als beständig, d. i. die siebenten Differenzen, die dann noch kleiner seyn müssen, näherungsweise als Null, nämlich die ursprüngliche Reihe ln, $l(n+d)$, ... als eine arithmetische der sechsten Ordnung an; so braucht man nur (§. 95., Beisp. 1 u. 2) die sieben ersten Logarithmen dieser Reihe nach den Formeln des vorigen Paragraphes wirklich zu berechnen, um dann, zwar nicht alle folgenden, weil sich der ursprünglich kleine Fehler, welcher in der Annahme liegt, daſs die sechsten Differenzen einander gleich sind, so vergröſsert, daſs er die zulässige Fehlergrenze überschreitet*), aber doch eine groſse Folge durch bloſse wiederholte Additionen zu erhalten.

*) Indem man die sechsten Differenzen als beständig ansieht,

Nehmen wir z. B., um den Gegenstand immer mehr zu fixiren, $n = 10000$ und $d = 1$; so wächst erst $\frac{100\,d}{n}$ auf die oben angenommene Gröſse von $\frac{1}{100}$ an, und man überzeugt sich leicht, daſs, nachdem die Logarithmen der sieben Zahlen 10000, 10001, 10002 . . ., 10006 nach den Formeln wirklich, und z. B. auf zehn Decimalstellen berechnet worden, die folgenden 93 Logarithmen, d. i. bis zur Zahl 10100 durch eine bloſse Addition gefunden werden können. Berechnet man von hier an neuerdings sieben auf einander folgende Logarithmen, nach den obigen Reihen; so kann man wieder die folgenden 93 Logarithmen durch bloſse Additionen erhalten u. s. w. Um sich von Zeit zu Zeit zu überzeugen, daſs man bei diesen Additionen nicht gefehlt hat, berechnet man in gewissen Entfernungen die Logarithmen direct nach den Formeln und sieht, ob die Resultate mit jenen durch die Differenzenrechnung erhaltenen übereinstimmen *).

§. 136.

Auſser dem natürlichen Logarithmen-Systeme, welches in der Analysis seine Anwendung findet, ist ganz vorzüglich noch das *Briggische* System, welches nach seinem Er-

setzt man eigentlich voraus, daſs die obige Reihe von $l\,(n + d)$ mit dem siebenten Gliede $- \frac{d^6}{6\,n^6}$ schlieſst; folglich auch, daſs die Reihe $l\,(n + r\,d)$ mit dem Gliede $- \frac{(r\,d)^6}{6\,n^6}$ abbricht. Der dadurch entstehende Fehler läſst sich nun leicht nach diesem letzten Gliede beurtheilen, und er ist in jedem Falle kleiner als dieses Glied, weil das folgende oder erste ausgelassene Glied, als das gröſste aller übrigen, noch kleiner als $\frac{(r\,d)^6}{6\,n^6}$ ist. Dieser Fehler wird aber offenbar um so gröſser, je gröſser r wird.

*) Auf eine solche Art sind die in der neuern Zeit unter *Prony's* Aufsicht in Paris berechneten groſsen Tafeln, welche die Logarithmen der ersten 10000 Zahlen bis auf 19, und die der folgenden bis zur Zahl 200000 gehenden Logarithmen auf 14 Decimalstellen enthalten, wirklich gefunden worden. Diese Tafeln sind übrigens noch nicht ganz gedruckt, und würden ohne Zweifel das gröſste jetzt existirende Werk der Art bilden (m. s. *Notice sur les grandes tables logarithmiques et trigonométriques, calculées au Bureau du Cadastre, à Paris An IX)*.

finder *Heinrich Briggs* (geb. zu York 1560; gest. zu Oxford 1630) so genannt wird, und 10 zur Basis hat, im Gebrauche. Die Logarithmen dieses Systems, mit denen man heutzutage ausschliefsend rechnet, werden *Briggische*, gemeine, oder Tafel-Logarithmen genannt (weil in der Regel blofs diese in den Tafeln eingetragen sind); der Logarithme einer Zahl aus diesem Systeme wird gewöhnlich durch *log. brig.* (*logarithmus Briggianus*), *log. vulg.* (*log. vulgaris*) oder *log. tab.* (*log. tabularum*) bezeichnet. Wir werden diese überall blofs durch *log.* bezeichnen.

Der Modul für das *Briggische* System ist nun (§§. 130., 131.):

$$M = \frac{1}{l\,10} = \frac{1}{2\cdot30258509} = \cdot4342944819\ldots$$

Es müssen also (§. 130.) die natürlichen Logarithmen mit diesem reinen Decimalbruche multiplicirt werden, um sie in gemeine oder *Briggische* umzuwandeln; umgekehrt erhält man aus dem gemeinen Logarithmus einer Zahl den natürlichen, wenn man den erstern durch diesen Decimalbruch $\cdot434\ldots$ dividirt, oder was dasselbe und bequemer ist, mit jenem $2\cdot302\ldots (= l\,10)$ multiplicirt.

Die Eigenthümlichkeiten und Vorzüge, welche das *Briggische* System vor allen andern besitzt, können hier als schon bekannt vorausgesetzt werden. Wir wollen sofort nur einen Satz, welcher sich auf den Gebrauch der Logarithmen-Tafeln bezieht, und in den Elementen mehr nur *a posteriori* aus den Tafeln angeführt, als *a priori* bewiesen werden kann, kurz entwickeln.

Setzt man in der Reihe 2), §. 129., in welcher jetzt M den *Briggischen* Modul bezeichnen soll, $y = \frac{d}{n}$; so erhält man, wegen $log.(1+y) = log.\left(\frac{n+d}{n}\right) = log.(n+d) - log.n$:

$$log.(n+d) - log.n = M\left[\frac{d}{n} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{n}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{d}{n}\right)^3 - \ldots\right],$$

nämlich eine Reihe, welche die Differenz der Logarithmen zweier um d Einheiten von einander verschiedenen Zahlen ausdrückt.

Ist nun $d = 1$ und $n > 10000$, so wird $\frac{d}{n} < \cdot 0001$, folglich $\frac{1}{2}\left(\frac{d}{n}\right)^2 < \cdot 0^8 5$; und es hat daher, da auch noch $M < 1$ ist, schon dieses zweite Glied der Reihe unter diesen Bedingungen auf siebenstellige Logarithmen keinen Einfluſs mehr. Man kann also für Tafeln, welche die *Briggischen* Logarithmen nur auf sieben Decimalstellen enthalten, und bei der Voraussetzung, daſs n nahe gleich 10000 ist, oder diese Zahl gar schon übersteigt, setzen:

$$log.\,(n+1) - log.\,n = \frac{M}{n}.$$

Eben so ist auch: $log.\,(n+2) - log.\,(n+1) = \frac{M}{n+1}$, und da bei dieser Gröſse von n, bis auf die angenommene Grenze von sieben Decimalstellen, wie man sich leicht überzeugt, $\frac{M}{n+1} = \frac{M}{n}$ ist; so hat man:

$$[log.\,(n+1) - log.\,n] : [log.\,(n+2) - log.\,(n+1)] = \frac{M}{n} : \frac{M}{n+1} = 1 : 1.$$

Nun ist aber auch:

$$[(n+1) - n] : [(n+2) - (n+1)] = 1 : 1,$$

folglich auch:

$$[log.\,(n+1) - log.\,n] : [log.\,(n+2) - log.\,(n+1)] = [(n+1) - n] : [(n+2) - (n+1)];$$

d. h. für Zahlen, welche schon 10000 übersteigen, und nur um eine Einheit von einander verschieden sind, verhalten sich die Differenzen der Logarithmen, diese bloſs bis auf sieben Decimalstellen genommen, wie die Differenzen der zugehörigen Zahlen.

Auf diesem Satze beruht bekanntlich die Methode, um aus einer siebenstelligen Tafel, welche also nur die Logarithmen aller fünfzifferigen Zahlen unmittelbar enthält, die Logarithmen der sechs-, sieben-, und in besondern Fällen auch achtzifferigen Zahlen, mittelst Proportionaltheile zu finden.

§. 137.

Hat man eine Tafel, welche wenigstens die gemeinen Logarithmen der ersten 1000 Zahlen auf 15 oder noch mehr Stellen enthält *); so kann man mit Hilfe derselben den Logarithmus einer aus sehr vielen Ziffern bestehenden Zahl, mit derselben Genauigkeit, und zwar auf folgende Art finden:

Man bilde einen Bruch, dessen Zähler aus den ersten sechs oder sieben Ziffern der gegebenen Zahl n, und Nenner aus einer Einheit mit eben so vielen angehängten Nullen besteht. Zu diesem Bruche suche man die Näherungsbrüche, und nehme davon denjenigen, welcher mit den gröfsten Zahlen, die noch innerhalb der Grenze der Tafel (also nach unserer Voraussetzung nicht über 1000 sind) liegen, geschrieben wird. Bezeichnet man diesen durch $\frac{p}{q}$, und nimmt an, dafs er kleiner als die gegebene Zahl ist; so kann man setzen

$$n = \frac{p}{q} \cdot \frac{1 + x}{1 - x}, \text{ wobei } x = \frac{nq - p}{nq + p}$$

nothwendig eine sehr kleine Gröfse seyn wird, weil schon der Zähler $\left(n - \frac{p}{q}\right) q$ nach der Theorie der Näherungsbrüche kleiner als $\frac{1}{q}$ ist $\left(\text{es ist nämlich, wie bekannt, } n - \frac{p}{q} < \frac{1}{q^2}\right)$.

Aus der obigen ersten Gleichung folgt:

$$log.\, n = log.\, p - log.\, q + log.\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

$$= \log.\, p - \log.\, q + 2\,M(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + ..) \text{ (§. 131., } \beta)$$

oder wenn man von der sehr kleinen Gröfse x, die dritten

*) Wie z. B. in der schon oben §. 97. (Beisp. 3) erwähnten *Callet*'schen Tafel eine solche enthalten ist. In *Vega's* »vollständiger Sammlung gröfserer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln,« Leipzig 1794 (Folio), welche die gemeinen Logarithmen aller sechszifferigen Zahlen, so wie die Logarithmen der trigonometrischen Functionen von 10 zu 10 Secunden durch den ganzen Quadranten auf 10 Decimalstellen enthält, befindet sich auch am Ende eine, von einem holländischen Artillerie-Officier *Wolfram* berechnete Tafel der natürlichen Logarithmen, bis auf 48 Decimalstellen; die man indefs schwerlich jemals so weit brauchen wird.

und höhern Potenzen vernachlässigt, und zugleich dafür den obigen Werth substituirt:

$$9)\ log.\,n = log.\,p - log.\,q + 2M\left(\frac{nq-p}{nq+p}\right).$$

Wäre dagegen $\frac{p}{q} > n$, also $p > nq$, so würde blofs der letzte Theil $2M\left(\frac{nq-p}{nq+p}\right)$ dieser Gleichung subtractiv ausfallen (weil man dann oben $n = \frac{p}{q} \cdot \frac{1-x}{1+x}$ setzen, also x negativ nehmen müfste).

Beispiel.

Um eine Anwendung von dieser Formel 9) zu machen, wollen wir log. ·31415926535897 ... ($log.\ \pi$) suchen.

Die Näherungsbrüche des Bruches $\frac{31415926}{100000000}$ sind:

$$\frac{1}{3},\ \frac{5}{16},\ \frac{11}{35},\ \frac{60}{191},\ \frac{71}{226},\ \frac{43370}{138051},\ \ldots$$

Nimmt man also, da die Zahlen, wenn man die *Callet*'sche Tafel anwendet, 1200 nicht übersteigen dürfen, $\frac{p}{q} = \frac{71}{226}$ (welcher Bruch gröfser als die gegebene Zahl ist), so folgt, wegen $n = \cdot 314159265358979323846$:

$$nq = 70\cdot 99993971129327189796 \text{ und}$$

$$\frac{nq-p}{nq+p} = - \cdot 0^7 42456837526606,$$

und wegen $M = \cdot 4342944819032518$ auch:

$$2M\left(\frac{nq-p}{nq+p}\right) = - \cdot 0^7 3687754051 3726.$$

Nach der *Callet*'schen Tafel ist

$$\begin{array}{rl} log.\,p = log.\ 71 = & 1\cdot 8512583487190752 8609 \\ log.\,q = log.\ 226 = & 2\ 3541084391474009 1801 \\ \hline log.\,p - log.\,q = \ldots & \cdot 49714990957167436808 - 1 \\ -2M\left(\frac{nq-p}{nq+p}\right) = \ldots\ldots - & \cdot 00000003687754051373 \\ \hline log.\,n = & \cdot 49714987269413385435 - 1 \end{array}$$

welcher Logarithmus noch bis auf die letzte oder zwanzigste Decimalstelle genau ist.

§. 138.

Um auch eine Reihe zu erhalten, mittelst welcher zu einem gegebenen Logarithmus die entsprechende Zahl gefunden werden kann, setze man $e^z = x$; so wird (§. 127., Gl. (4)

$$x = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \ldots$$

oder wegen $z = lx$ (aus $e^z = x$) $= \frac{log.\,x}{M}$, auch:

$$10)\quad x = 1 + \frac{log.\,x}{M} + \frac{log.^2\,x}{2\,M^2} + \frac{log.^3\,x}{2.3\,M^3} + \ldots$$

$$\left\{\text{von } \frac{log.\,x}{M} = -\infty, \text{ bis } \frac{log.\,x}{M} = +\infty\right\}.$$

Setzt man $x = \frac{N}{N'}$, und nimmt an, daſs die Logarithmen dieser Zahlen N und N' nur wenig von einander verschieden sind; so wird, wenn man noch Kürze halber $log.\,N - log.\,N' = \delta$ setzt:

$$11)\quad N = N'\left[1 + \frac{\delta}{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{M}\right)^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{\delta}{M}\right)^3 + \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{\delta}{M}\right)^4 + \ldots\right].$$

Ist $\frac{\delta}{M}$ hinlänglich klein, so kann man statt dieser Reihe näherungsweise

$$1 + \frac{\delta}{M - \frac{1}{2}\delta}$$

setzen, wodurch erst ein Fehler im vierten Gliede eintritt und sofort $\frac{1}{12}\left(\frac{\delta}{M}\right)^3$ beträgt; in diesem Falle wird:

$$12)\quad N = N'\left(1 + \frac{\delta}{M - \frac{1}{2}\delta}\right) = N'\left(\frac{M + \frac{1}{2}\delta}{M - \frac{1}{2}\delta}\right);$$

und dies ist eine sehr einfache Formel, um zu $log.\,N$, welcher nicht genau in der Tafel steht, die entsprechende Zahl N zu finden; $log.\,N'$ ist der nächst kleinere oder gröſsere der Tafel, weſshalb δ sowohl positiv wie auch negativ ausfallen kann.

Beispiel.

Um z. B. aus der erwähnten *Callet*'schen Tafel die dem gemeinen Logarithmus

$$\cdot 43429448190325182765 1 \quad (log.\, N)$$

entsprechende Zahl N zu finden, hat man daraus für den diesem am nächsten kommenden Logarithmen

$$log.\, N' = \cdot 43456890403419870940,$$

und die entsprechende Zahl $N' = 2\cdot 72$. Es ist also

$$\delta = log.\, N - log.\, N' = - \cdot 00027442213094688175,$$

und wegen $M = \cdot 434294481903251827651$:

$$\frac{M + \frac{1}{2}\delta}{M - \frac{1}{2}\delta} = \frac{\cdot 43415727083777838677 6}{\cdot 43443169296872526852 6} = \cdot 99936831926540258798 5,$$

folglich

$$N = N' \left(\frac{M + \frac{1}{2}\delta}{M - \frac{1}{2}\delta}\right) = 2\cdot 72 \times \cdot 9993 \ldots = 2\cdot 718281828 40{,}18950393,$$

in welcher Zahl jedoch, da $log.\, N'$ zu viel von $log.\, N$ abweicht, also $\frac{\delta}{M}$ nicht kleiner als $\cdot 0006$ und noch $\frac{1}{12}\left(\frac{\delta}{M}\right)^3 = \cdot 0^{10}72 \ldots$ ist, nur die ersten eilf Ziffern richtig sind.

Wendet man dagegen die genauere Formel 11) auf dieses Beispiel an, so wird, wegen

$$\frac{\delta}{M} = - \cdot 0^3 631880307905 9499$$

$$\left(\frac{\delta}{M}\right)^2 = \cdot 0^6 3992727235192 8; \quad \left(\frac{\delta}{M}\right)^3 = \cdot 0^9 2522925714 6$$

$$\left(\frac{\delta}{M}\right)^4 = \cdot 0^{12} 15941868; \quad \left(\frac{\delta}{M}\right)^5 = \cdot 0^{15} 10072 :$$

$$N = 2\cdot 72 \times \cdot 99936831928641368945$$

$$= 2\cdot 71828182845904523 53{,}1 \quad (= e)$$

von welcher Zahl noch die ersten 20 Ziffer richtig sind.

§. 139.

Um endlich noch eine Formel zu entwickeln, mittelst welcher aus der Gleichung $x^x = a$, der Werth von x so genau man nur immer will berechnet werden kann; sey α ein erster Näherungswerth, welcher um keine ganze Einheit mehr von dem wahren Werthe abweicht, und leicht durch

ein paar Versuche gefunden werden kann. Diefs vorausgesetzt, kann man schreiben

$$m) \ldots x = \alpha + y, \text{ wo } y < 1 \text{ ist.}$$

Man hat nun wegen $x \log. x = \log. a$:

$$\log. a = (\alpha + y) \log. (\alpha + y) = (\alpha + y)\left[\log. \alpha + \log. \left(1 + \frac{y}{\alpha}\right)\right],$$

oder wegen $\log. \left(1 + \frac{y}{\alpha}\right) = M\left[\frac{y}{\alpha} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2 + \ldots\right]$ (§.129., 2))

$= \frac{My}{\alpha}$, wenn man nämlich die höhern Potenzen der kleinen Gröfse $\frac{y}{\alpha}$ (da man $\alpha > 1$ oder wenigstens $\frac{y}{\alpha} < 1$ voraussetzt) vernachlässigt, indem es sich wieder nur um einen einfachen Näherungswerth handelt:

$$\log. a = (\alpha + y)\left[\log. \alpha + \frac{My}{\alpha}\right] = \alpha \log. \alpha + My + y \log. \alpha,$$

wenn man nämlich wieder das Glied $M\frac{y^2}{\alpha}$ wegläfst. Aus dieser letzten Gleichung folgt endlich der Näherungswerth für y:

$$13) \quad y = \frac{\log. a - \alpha \log. \alpha}{M + \log. \alpha}.$$

Wird nun aus dieser Formel, in welcher M, wenn man mit gemeinen Logarithmen rechnet, den *Briggischen* Modul ·4342945 bezeichnet, der Werth von y berechnet und in die obige Gleichung m) gesetzt; so erhält man schon einen mehr genäherten Werth für x. Bezeichnet man diesen durch α', und setzt ihn statt α in die Formel 13), so wird man mit diesem einen neuen Werth für y, genauer als der vorige war, finden. Dieser abermals in m) substituirt, verhilft wieder zu einen mehr genäherten Werth von x, welchen man durch α'' bezeichnen, und neuerdings in 13) für α setzen kann, um ein noch genaueres y, und damit wieder aus m) einen noch mehr genäherten Werth für x zu finden u. s. w. Man kann durch die gehörige Wiederholung dieses Verfahrens, den Werth von x, so weit man nur immer will, annähernd finden.

Beispiel.

Soll aus der Gleichung $x^x = 645$ der Werth von x näherungsweise gefunden werden; so sieht man gleich, daſs wegen $4^4 = 256$ und $5^5 = 3125$, der Werth von x zwischen 4 und 5 liegt. Man nehme also als ersten Näherungswerth $\alpha = 4{\cdot}5$, so folgt aus der obigen Formel 13): $y = -{\cdot}119$; ein genauerer Werth von x wird demnach $x = \alpha + y = 4{\cdot}5 - {\cdot}119 = 4{\cdot}381$ seyn. Setzt man ferner in der nämlichen Formel $\alpha = 4{\cdot}381$, so findet man $y = -{\cdot}00109$, so, daſs der Werth $x = \alpha + y = 4{\cdot}381 - {\cdot}00109 = 4{\cdot}37991$ wieder genauer als der vorige ist. Für $\alpha = 4{\cdot}37991$ folgt ferner $y = -{\cdot}0000001$ und $x = 4{\cdot}37991 - {\cdot}0000001 = 4{\cdot}37990991$.

Man kann also mit hinreichender Genauigkeit

$$x = 4{\cdot}37990991$$

setzen, welcher Werth schon bis auf sieben Decimalstellen richtig ist. Denn es soll seyn $x\ log.\ x = log.\ 645 = 2{\cdot}8095597$, und es ist in der That $x\ log.\ x = 4{\cdot}37990991\ log.\ 4{\cdot}37990991 = 2{\cdot}8095597$.

Ueber die Convergenz unendlicher Factorenfolgen.

§. 140.

Wir sind jetzt auch im Stande, die Convergenz oder Divergenz einer unendlichen Factorenfolge zu beurtheilen.

Erklärung.

Soll eine Gröſse näherungsweise durch eine unendliche Factorenfolge, die nach irgend einem Gesetze gebildet ist *), ausgedrückt werden können; so muſs diese so beschaffen

*) Nehmen die Factoren immer um gleich viel zu oder ab, wie z. B. in dem Producte $a(a \pm d)(a \pm 2d)\ldots(a \pm nd)\ldots$, so heiſst eine solche Folge gewöhnlich eine Facultät oder Factorielle, auch Potenz zweiter Ordnung. Ueber die vorzüglichsten und besondern Eigenschaften derselben kann man nachsehen: eine Abhandlung über die Facultäten oder Factoriellen von *Kramp*, in *Gergonne's Annales de Math.* *T.* 3. und *Crelle's* »Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Facultäten« etc. Berlin 1823

seyn, dafs man sich einer bestimmten endlichen Grenze um so mehr nähert, je mehrere der ersten Factoren man beibehält; man kann diese Eigenschaft die Convergenz dieser Factorenfolge nennen.

Es sey nun $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n a_{n+1} \ldots$ eine solche Folge von unendlich vielen Factoren; bezeichnet man diese der Kürze wegen durch F, so ist wegen $a_1 = e^{la_1}$, $a_2 = e^{la_2}, \ldots$ auch

$$1)\quad F = e^{la_1 + la_2 + la_3 + \ldots + la_n + \ldots}$$

Ist die Reihe

$$2)\quad la_1 + la_2 + la_3 + \ldots + la_n + \ldots$$

convergent und s ihre Summe, so ist auch $F = e^s$, wobei e^s offenbar von Null verschieden ist.

Ist dagegen diese Reihe 2) divergent und ihre Summe sofort $+\infty$ oder $-\infty$; so ist im ersten Falle auch $F = e^{+\infty} = \infty$ divergent, dagegen im zweiten Falle $F = e^{-\infty} = 0$.

Nach §. 125. ist aber die Reihe 2), vorausgesetzt, dafs sie eine fallende ist (dabei darf man nicht vergessen, dafs wenn diese Reihe die Form erhält $l(1 \pm z_1) + l(1 \pm z_2) + l(1 \pm z_3) + \ldots + l(1 \pm z_n)$, wo die Gröfsen $z, z_2, \ldots z_n$ unendlich abnehmen, diese auch für die untern Zeichen fallend ist, weil der numerische Werth von $l\frac{1}{m} > l\frac{1}{r}$ wird, wenn $\frac{1}{m} < \frac{1}{r}$ ist, und dafs zuletzt $l1 = 0$ wird) convergent, wenn bei der unendlichen Zunahme von n, der Quotient

$$Q = \frac{la_n \, la_{n+1}}{la_n - la_{n+1}}$$

unendlich abnimmt und für $n = \infty$ verschwindet, dagegen divergent, wenn er sich irgend einer von Null verschiedenen Grenze nähert; je nachdem diese Grenze positiv oder negativ ist, ist auch die Summe der Reihe 2), wenn man so sagen darf, $+\infty$ oder $-\infty$.

§. 141.

Beispiel 1.

Für die unendliche Factorenfolge:

$$(1+1)(1+\tfrac{1}{4})(1+\tfrac{1}{9})(1+\tfrac{1}{16})\dots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\dots$$

hat man

$$Q=\frac{l\left(1+\frac{1}{n^2}\right)l\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{l\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-l\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)}$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}\right)^2+\dots\right]\left[\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)^2+\dots\right]}{\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}\right)^2+\dots\right]-\left[\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)^2+\dots\right]}$$

(§. 129, 2)), oder da bei der unendlichen Zunahme von n, die Brüche $\frac{1}{n^2}$ und $\frac{1}{(n+1)^2}$ unendlich abnehmen, also die folgenden Glieder dieser unendlichen Reihe gegen die ersten verschwinden, auch:

$$Q=\frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{1}{(n+1)^2-n^2}=\frac{1}{2n+1}.$$

Da nun dieser Quotient für $n=\infty$ Null wird, also die betreffende Reihe 2) convergirt, so ist auch die gegebene Factorenfolge convergent und entspricht einer endlichen Grenze.

Beispiel 2.

Für die Factorenfolge

$$(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{4})\dots\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots$$

wird

$$Q=\frac{l\left(1-\frac{1}{n}\right)l\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{l\left(1-\frac{1}{n}\right)-l\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\dots\right]\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\dots\right]}{-\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\dots\right]+\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\dots\right]}$$

oder aus dem vorigen Grunde:

$$Q = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \frac{1}{n-(n+1)} = -1.$$

Da also in diesem Beispiele die Summe der Reihe 2) $-\infty$ wird *); so folgt, daſs die gegebene Factorenfolge für $n = \infty$ Null ist oder verschwindet.

B e i s p i e l 3.

Für die unendliche Factorenfolge:

$$(1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})(1+\tfrac{1}{4})\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots$$

hingegen ist

$$Q = \frac{l\left(1+\frac{1}{n}\right) l\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{l\left(1+\frac{1}{n}\right) - l\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{\left[\frac{1}{n}-\ldots\right]\left[\frac{1}{n+1}-\ldots\right]}{\left[\frac{1}{n}-\ldots\right]-\left[\frac{1}{n+1}-\ldots\right]},$$

oder wieder

$$Q = \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1-n} = +1.$$

Dieser Quotient zeigt aber, daſs die Summe der Reihe 2) für dieses Beispiel $+\infty$ wird; es ist also die gegenwärtige unendliche Factorenfolge, welche für $n = \infty$ ebenfalls Unendlich wird, d i v e r g e n t.

B e i s p i e l 4.

Um bei der unendlichen Zunahme von n, die Factorenfolge

$$(1 \pm x^2)\left(1 \pm \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 \pm \frac{x^2}{3^2}\right)\ldots\left(1 \pm \frac{x^2}{n^2}\right)$$

*) Man findet dieses Resultat auch unmittelbar aus der Reihe selbst, denn diese ist:

$$l\tfrac{1}{2} + l\tfrac{2}{3} + l\tfrac{3}{4} + \ldots + l\left(\frac{n-1}{n}\right) = l\,1 + l\,2 + l\,3 + \ldots$$
$$\ldots + l(n-1) - l\,2 - l\,3 - l\,4 - \ldots - l\,n = -l\,n,$$

also $= -\infty$ für $n = \infty$.

zu untersuchen, hat man

$$Q = \frac{l\left(1 \pm \frac{x^2}{n^2}\right) l\left(1 \pm \frac{x^2}{(n+1)^2}\right)}{l\left(1 \pm \frac{x^2}{n^2}\right) - l\left(1 \pm \frac{x^2}{(n+1)^2}\right)},$$

oder, wenn man dafür die Reihen (aus 2), §. 129.) setzt, und aufser dem ersten Gliede gleich alle übrigen, die für $n = \infty$ ohnehin verschwinden, wegläfst:

$$Q = \frac{+\frac{x^4}{n^2(n+1)^2}}{\pm\frac{x^2}{n^2} \mp \frac{x^2}{(n+1)^2}} = \frac{x^2}{\pm(n+1)^2 \mp n^2} = \frac{\pm x^2}{2n+1}.$$

Da also, wie dieser Quotient zeigt, die Reihe 2) für unser Beispiel bei jedem endlichen Werth von x convergirt, so convergirt auch die gegenwärtige unendliche Factorenfolge, für jeden solchen Werth von x, gegen eine bestimmte Grenze.

Beispiel 5.

Für die unendliche Factorenfolge

$$\alpha) \quad \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,\ldots\, n \,.\, n^z}{(z+1)(z+2)(z+3)\ldots(z+n)}$$

welche sich auch so darstellen läfst:

$$\frac{1^{z+1}}{z+1} \cdot \frac{2^{z+1}}{1^z(z+2)} \cdot \frac{3^{z+1}}{2^z(z+3)} \cdots \frac{n^{z+1}}{(n-1)^z(z+n)},$$

wobei n eine ganze positive, unendlich wachsende, und z was immer für eine Zahl bezeichnet, ist:

$$\beta) \quad a_n = \frac{n^{z+1}}{(n-1)^z(z+n)} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^z \cdot \frac{n}{z+n},$$

also

$$la_n = zl\left(\frac{n}{n-1}\right) + l\left(\frac{n}{z+n}\right) = -zl\left(\frac{n-1}{n}\right) - l\left(\frac{z+n}{n}\right)$$
$$= -\left[zl\left(1 - \frac{1}{n}\right) + l\left(1 + \frac{z}{n}\right)\right],$$

oder wegen $zl\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{z}{n} - \frac{z}{2n^2} - \ldots$

und $l\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \frac{z}{n} - \frac{z^2}{2n^2} + \ldots$

auch: $la_n = \frac{z(1+z)}{2n^2} + \frac{z(1-z^2)}{3n^3} + \ldots$

$$= \frac{z}{n^2}\left[\frac{1+z}{2} + \frac{1-z^2}{3n} + \frac{1+z^3}{4n^2} + \ldots\right],$$

und eben so:

$$la_{n+1} = \frac{z}{(n+1)^2}\left[\frac{1+z}{2} + \frac{1-z^2}{3(n+1)} + \ldots\right].$$

Mit Berücksichtigung endlich, daſs bei der unendlichen Zunahme von n, wieder die folgenden Glieder dieser Reihen gegen das erste wegfallen, ist

$$Q = \frac{\frac{z}{n^2} \cdot \frac{z}{(n+1)^2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^2}{\left(\frac{1+z}{2}\right)\left(\frac{z}{n^2} - \frac{z}{(n+1)^2}\right)} = \frac{z(1+z)}{4n+2}.$$

Aus diesen Quotienten erhellet die Convergenz der in diesem Beispiele betreffenden Reihe 2), für jeden endlichen Werth von z. Da es indeſs für einen ganzen negativen Werth von z immer einen Werth von n gibt, für welchen $z + n = 0$, also der obige Werth a_n in β) ∞, folglich auch $la_n = \infty$ wird; so folgt aus dem Gange dieser Untersuchung von selbst, daſs dieser Werth von z ausgeschlossen bleibt:

Die gegebene unendliche Factorenfolge convergirt also, *ganze negative* Werthe ausgeschlossen, für jeden endlichen Werth von z*).

Beispiel 6.

Um endlich noch die Factorenfolge:

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m+1-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots\ldots n} x^n$$

welche sich auch so darstellen läſst:

$$\pm m \frac{(1-m)}{1}\frac{(2-m)}{2}\frac{(3-m)}{3} \ldots \frac{(n-1-m)}{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

$$= \pm m\left(1 - \frac{m}{1}\right)\left(1 - \frac{m}{2}\right)\left(1 - \frac{m}{3}\right)\ldots\left(1 - \frac{m}{n-1}\right)\frac{x^n}{n},$$

*) Es zeigt auch der obige Bruch α) unmittelbar, daſs für jeden negativen ganzen Werth von z, immer ein Factor im Nenner gleich Null vorkommt, wodurch also der Bruch selbst ∞ wird.

für $n = \infty$ zu untersuchen (vergl. §. 125., Beisp. 10), hat man nach dieser Darstellung für die Reihe 2):

$$l\left(1-\frac{m}{1}\right)+l\left(1-\frac{m}{2}\right)+l\left(1-\frac{m}{3}\right)+\ldots$$
$$\ldots+l\left(1-\frac{m}{n-1}\right)+n\left(lx-\frac{ln}{n}\right);$$

dabei reducirt sich das letzte Glied, bei der unendlichen Zunahme von n, auf nlx, indem $\frac{ln}{n}$ gegen Null convergirt, oder für $n = \infty$ verschwindet *).

Ist daher a), m positiv, so ist die Reihe von $l\left(1-\frac{m}{1}\right)$ bis $l\left(1-\frac{m}{n-1}\right)$ offenbar steigend, also divergent, und da zugleich die Zahlen $1-\frac{m}{1}$, $1-\frac{m}{2}$, ... kleiner als die Einheit, also die Logarithmen oder die Glieder dieser Reihe negativ sind; so ist die Summe dieser Reihe $= -\infty$, folglich die der ganzen Reihe, den letzten Theil mit begriffen, wenn man $n = \infty$ setzt:

$$-\infty + \infty\, lx = \infty\,(-1+lx).$$

Für solche Werthe von x also, für welche $lx < 1$ oder negativ wird, also im Allgemeinen für $x \overline{\gtrless}\, 1$, erhält man als Summe der genannten Reihe 2): $-\infty$; mithin ist für

*) Diefs ist eine Folge von der im §. 125 (Beisp. 5) erwiesenen Eigenschaft, dafs $\frac{x^n}{n}$ für $n = \infty$ Unendlich wird; was aber auch direct auf folgende Art entwickelt werden kann:

Setzt man in der Reihe 4), §. 128., statt x $\frac{1}{x}$, so erhält man $e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \ldots$; folglich ist, wenn man auf natürliche Logarithmen übergeht, wegen $le = 1$:

$$\frac{1}{x} = l\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\ldots\right), \text{ und auch}$$

$$\frac{lx}{x} = lx\,l\left(1+\frac{1}{x}+\ldots\right) = l\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\ldots\right)^{lx}.$$

Für $x = \infty$ reducirt sich das Polynom auf das erste Glied 1, und man hat dafür $\frac{lx}{x} = l(1)^{l\infty} = l(1)^{\infty} = l\,1 = 0.$

diese Hypothese die gegebene unendliche Factorenfolge gleich Null.

Für solche Werthe von $x > 1$ hingegen, für welche $lx > 1$ ist, hat man, da solche Logarithmen zugleich auch positiv sind, zur Summe dieser Reihe $+\infty$; zum Beweise, dafs in diesem Falle die Factorenfolge divergirt und Unendlich wird.

Ist b), m negativ, wodurch, wenn man gleich das Zeichen von m ändert, und unter m dann wieder nur den numerischen Werth versteht, die vorige Reihe in folgende übergeht:

$$l\left\{\left(1+\frac{m}{1}\right)+l\left(1+\frac{m}{2}\right)+l\left(1+\frac{m}{3}\right)+\ldots+l\left(1+\frac{m}{n-1}\right)\right\}$$
$$+n\left(lx-\frac{ln}{n}\right),$$

so ist die eingeschlossene Reihe fallend; für diese hat man aber, um ihre Convergenz oder Divergenz zu prüfen:

$$Q=\frac{l\left(1+\frac{m}{n-1}\right)l\left(1+\frac{m}{n}\right)}{l\left(1+\frac{m}{n-1}\right)-l\left(1+\frac{m}{n}\right)}$$
$$=\frac{\left[\frac{m}{n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n-1}\right)^2+\ldots\right]\left[\frac{m}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^2+\ldots\right]}{\left[\frac{m}{n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n-1}\right)^2+\ldots\right]-\left[\frac{m}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^2+\ldots\right]}$$

(§. 129., 2), oder, wenn man wieder nur das erste Glied von jeder Reihe beibehält, indem die übrigen für $n=\infty$ verschwinden:

$$Q=\frac{\frac{m^2}{(n-1)\,n}}{\frac{m}{n-1}-\frac{m}{n}}=\frac{m}{n-(n-1)}=m.$$

Diese Reihe ist nämlich divergent und ihre Summe gleich $+\infty$. Die betreffende Reihe 2) ist also jetzt für $n=\infty$:

$$\infty+\infty\, lx=\infty\,(1+lx).$$

Für $x \gtreqless 1$ erhält man daher zur Summe $+\infty$, und für solche Werthe von $x<1$, für welche lx, der nun negativ ausfällt, numerisch genommen >1 ist, hat man zur

Summe $-\infty$; im ersten Falle ist daher die in Rede stehende unendliche Factorenfolge divergent, und im zweiten Falle convergent und gleich Null.

Die gegebene unendliche Factorenfolge ist also für jeden Werth von m *convergent* und gleich *Null*, wenn $x < 1$, dagegen *divergent* und *Unendlich*, wenn $x > 1$ ist*).

Anmerkungen.

A) Entwicklung von a^x.

Zum Beschlusse dieses Capitels wollen wir noch ganz kurz für a^x und lx folgende Entwicklungen, die übrigens mehr oder weniger streng, jedenfalls aber bemerkenswerth sind, nebst einigen andern interessanten Ableitungen als Anmerkungen hersetzen.

1) Nimmt man, da für $x = 0$, $a^x = 1$ werden mufs, für a^x eine unbestimmte Reihe an und setzt:

$$1)\quad a^x = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

so wird, wenn man quadrirt:

$$a^{2x} = 1 + 2A_1 x + (2A_2 + A_1^2)x^2 + (2A_3 + 2A_1 A_2)x^3 + \ldots$$

da aber auch a^{2x} entsteht, indem man in 1) statt x $2x$ schreibt; so hat man die identische Gleichung:

$$\begin{aligned} 1 + 2A_1 x + 4A_2 x^2 + 8A_3 x^3 + \ldots \\ = 1 + 2A_1 x + (2A_2 + A_1^2)x^2 + (2A_3 + 2A_1 A_2)x^3 \\ + (2A_4 + 2A_1 A_3 + A_2^2)x^4 + \ldots \end{aligned}$$

und daraus:

$$4A_2 = 2A_2 + A_1^2, \quad \text{oder } A_2 = \frac{A_1^2}{1\,.\,2};$$

$$8A_3 = 2A_3 + 2A_1 A_2, \quad \text{oder } A_3 = \frac{A_1^3}{1\,.\,2\,.\,3};$$

$$16A_4 = 2A_4 + 2A_1 A_3 + A_2^2, \quad \text{oder } A_4 = \frac{A_1^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \quad \text{u. s. w.}$$

also

$$a^x = 1 + A_1 x + \frac{A_1^2}{1\,.\,2}x^2 + \frac{A_1^3}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \frac{A_1^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}x^4 + \ldots$$

Um A_1 zu bestimmen, hat man für $x = 1$:

$$a - 1 = A_1 + \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_1^3}{2\,.\,3} + \ldots$$

*) Man sieht leicht, dafs, wenn m positiv ist, diese Factorenfolge auch noch für $x = 1$, und für solche Werthe von $x > 1$, für welche noch $lx < 1$ bleibt (was für Werthe von $x < e$ der Fall ist) convergirt.

und wenn man diese Reihe umkehrt:

$$A_1 = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 + \ldots$$

(Man vergl. §. 127.)

2) Aus der Annahme von

$$a^x = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

folgt auch: $a^y = 1 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \ldots$ weil nämlich die Coefficienten von der Variablen unabhängig sind; es ist also, wenn man subtrahirt:

$$\alpha)\ a^x - a^y = A_1(x-y) + A_2(x^2-y^2) + A_3(x^3-y^3) + \ldots$$

Da nun aber auch

$$a^x - a^y = a^y(a^{x-y}-1) = a^y[A_1(x-y) + A_2(x-y)^2 + A_3(x-y)^3 + \ldots]$$

ist, wenn man nämlich in der ersten Reihe $a^x - 1 = A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ statt x, $x-y$ schreibt; so erhält man durch Vergleichung dieser letztern Entwicklung von $a^x - a^y$ mit der erstern α) die identische Gleichung, wenn man gleich beiderseits durch $x-y$ abkürzt, und sodann $y = x$ setzt:

$$A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \ldots = A_1(1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots)$$

wenn man nämlich auch für $a^y = a^x = 1 + A_1 x + \ldots$ seinen Werth substituirt.

Die Vergleichung der gleichnamigen Coefficienten gibt:

$$2A_2 = A_1^2,\ 3A_3 = A_1 A_2,\ 4A_4 = A_1 A_3, \ldots nA_n = A_1 A_{n-1}$$

oder $A_2 = \frac{A_1^2}{2}$, $A_3 = \frac{A_1^3}{2.3}$, $A_4 = \frac{A_1^4}{2.3.4}, \ldots$

und wenn man dieses Gesetz für A_{n-1} gelten läfst, auch $A_n = \frac{A_1^n}{2.3\ldots n}$; woraus die allgemeine Giltigkeit desselben erhellt.

Es ist also wieder

$$a^x = 1 + A_1 x + \frac{A_1^2}{2}x^2 + \ldots + \frac{A_1^n}{2.3\ldots n}x^n$$

wobei A_1 wie vorhin bestimmt werden kann.

3) *Lagrange* schlägt zur Entwicklung von a^x folgenden Weg ein:

Es ist offenbar auch $a^x = \left\{[1+(a-1)]^n\right\}^{\frac{x}{n}}$, wobei n eine ganz unbestimmte Gröfse ist, die aus der Entwicklung von selbst herausfallen mufs. Man hat aber

$$[1+(a-1)]^n = 1+n(a-1)+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(a-1)^2+\cdots$$

welche Reihe, wenn man multiplicirt und nach n ordnet die Form annimmt:

$$1+An+Bn^2+Cn^3+\ldots$$

dabei ist, wie leicht zu sehen,

$$A=(a-1)-\tfrac{1}{2}(a-1)^2+\tfrac{1}{3}(a-1)^3-\ldots$$

Es ist also auch:

$$a^x=[1+(An+Bn^2+Cn^3+\ldots)]^{\frac{x}{n}}$$

$$=1+\frac{x}{n}(An+Bn^2+\ldots)+\frac{x(x-n)}{2\,n^2}(An+\ldots)^2$$

$$+\frac{x(x-n)(x-2n)}{2\,.\,3\,.\,n^3}(An+\ldots)^3+\cdots$$

oder auch

$$a^x=1+x(A+Bn+\ldots)+\frac{x(x-n)}{2}(A+Bn+\ldots)^2$$

$$+\frac{x(x-n)(x-2n)}{1\,.\,2\,.\,3}(A+Bn+\ldots)^3+\cdots$$

Da sich nun alle mit n verbundenen Glieder zusammen aufheben müssen (oder da man auch $n=0$ setzen darf); so hat man endlich:

$$a^x=1+Ax+\frac{Ax^2}{2}+\frac{Ax^3}{2\,.\,3}+\cdots$$

B) Entwicklung von $log.(1+x)$.

4) Um die Grundreihen für die natürlichen Logarithmen zu finden, hat man aus $a^x=1+Ax+\frac{A^2}{2}x^2+\frac{A^3}{2\,.\,3}x^3+\cdots$, wenn man $x=\frac{1}{A}$ setzt und noch bemerkt, daſs (§. 128.) $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\ldots=e$ ist:

$$a^{\frac{1}{A}}=1+1+\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\ldots,\quad\text{oder } a^{\frac{1}{A}}=e;$$

folglich, wenn man auf natürliche Logarithmen übergeht, wegen $le=1$:

$$\frac{1}{A}la=1\quad\text{oder}\quad la=A=(a-1)-\tfrac{1}{2}(a-1)^2+\tfrac{1}{3}(a-1)^3-\ldots$$

5) Mit Berücksichtigung, daſs $log.\,1=0$ ist, kann man für $log.(1+x)$ folgende unbestimmte Reihe annehmen:

$$log.(1+x)=A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\cdots$$

und weil die Coefficienten A_1, A_2, ... von x unabhängig sind, so ist eben so

$$log.(1+y) = A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + A_4 y^4 + \ldots;$$

zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so entsteht wegen $l\alpha - l\beta = l\frac{\alpha}{\beta}$:

$$m)\ l\left(\frac{1+x}{1+y}\right) = (x-y)[A_1 + A_2(x+y) + A_3(x^2+xy+y^2) + \ldots]$$

Um eine zweite Entwicklung für $l\left(\frac{1+x}{1+y}\right)$ zu erhalten, setze man $\frac{1+x}{1+y} = 1+z$, so folgt $z = \frac{x-y}{1+y}$ und $l\left(\frac{1+x}{1+y}\right)$ $= l(1+z) = A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$ (nach der ursprünglichen Reihe).

Diese Entwicklung also, in welcher man für z seinen Werth setzt, mit der vorigen $m)$ verglichen, gibt, wenn man gleich durch $x-y$ abkürzt:

$$A_1 + A_2(x+y) + A_3(x^2+xy+y^2) + \ldots$$
$$= \frac{A_1}{1+y} + \frac{A_2(x-y)}{(1+y)^2} + \frac{A_3(x-y)^2}{(1+y)^3} + \ldots$$

Setzt man endlich in dieser Gleichung $y = x$, so entsteht:

$$A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \ldots = \frac{A_1}{1+x}$$
$$= A_1(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots)$$

Die Vergleichung der Coefficienten gibt sofort:

$$2A_2 = -A_1,\ 3A_3 = A_1,\ 4A_4 = -A_1, \ldots nA_n = \pm A_1$$

oder $A_2 = -\frac{1}{2}A_1$, $A_3 = \frac{1}{3}A_1$, $A_4 = -\frac{1}{4}A_1$, .. $A_n = \pm\frac{1}{n}A_1$

Diese Werthe in der ursprünglich angenommenen Reihe substituirt, geben:

$$log.(1+x) = A_1\left[x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots \pm \frac{1}{n}x^n\right],$$

wobei A_1 ein unbestimmter Factor (der Modul) ist, welcher, wie man leicht findet, von der Grundzahl a des logarithmischen Systems so abhängt, daſs

$$A_1 = \frac{1}{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \ldots} = \frac{1}{la} \text{ wird.}$$

6) Läſst man in der Reihe

$$m)\ l(1+x) = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots;$$

x in $x+z$ übergehen, wobei z eine ganze willkürliche, von x unabhängige Gröſse seyn soll; so wird

$$l(1+x+z)=A_1(x+z)+A_2(x+z)^2+\ldots+A_n(x+z)^n+\ldots$$

und wenn man von dieser Gleichung die vorige abzieht:

$$l(1+x+z)-l(1+x)=A_1[(x+z)-x]+A_2[(x+z)^2-x^2]$$
$$+A_3[(x+z)^3-x^3]+\ldots+A_n[(x+z)^n-x^n]+\ldots$$

oder, wenn man die angedeuteten Potenzen des Binoms $(x+z)$ nur immer bis zum zweiten Gliede entwickelt, gehörig reducirt und nach z ordnet, endlich noch berücksichtiget, daſs $l(1+a)-la=l\left(\frac{1+a}{a}\right)=l\left(1+\frac{1}{a}\right)$ ist:

$$l\left(1+\frac{z}{1+x}\right)=$$
$$(A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots+nA_nx^{n-1}+\ldots)z+pz^2+\ldots$$

wobei $p,\ldots$ die leicht zu findenden (aber hier nicht nöthigen) Coefficienten von $z^2,\ldots$ bezeichnen.

Nun ist aber auch, wenn man in der obigen Reihe m) statt x $\frac{z}{1+x}$ schreibt:

$$l\left(1+\frac{z}{1+x}\right)=\frac{A_1}{1+x}z+\frac{A_2}{(1+x)^2}z^2+\ldots$$

mithin hat man die identische Gleichung:

$$\frac{A_1}{1+x}z+p'z^2+\ldots=$$
$$(A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots+nA_nx^{n-1}+\ldots)z+pz^2+\ldots$$

und daraus nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten, wenn man nur die Coefficienten von z in der ersten Potenz mit einander vergleicht und sogleich den Nenner $1+x$ wegbringt:

$$A_1=A_1+\left.\begin{matrix}2A_2\\A_1\end{matrix}\right\}x+\left.\begin{matrix}3A_3\\2A_2\end{matrix}\right\}x^2+\ldots+\left.\begin{matrix}nA_n\\(n-1)A_{n-1}\end{matrix}\right\}x^{n-1}+\ldots$$

endlich folgt aus dieser Gleichung:

$$A_2=-\tfrac{1}{2}A_1$$
$$A_3=-\tfrac{2}{3}A_2=\tfrac{1}{3}A_1$$
$$A_4=-\tfrac{3}{4}A_3=-\tfrac{1}{4}A_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n=-\frac{(n-1)}{n}A_{n-1}=\pm\frac{1}{n}A_1$$

so, daſs man wieder wie vorhin hat:

$$log.(1+x)=A_1(1-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\ldots\pm\frac{1}{n}x^n\mp\ldots).$$

7) Nach *Lagrange* hat man, wenn man für die logarithmische Grundgleichung $a^x = y$, die damit gleichgeltende $[1+(a-1)]^{nx} = [1+(y-1)]^n$ setzt (wobei n eine willkürliche Gröfse ist, die in der vollendeten Entwicklung nicht vorkommen oder enthalten seyn darf), diese letztere entwickelt und beiderseits gleich durch n abkürzt:

$$x(a-1) + \frac{x(nx-1)}{2}(a-1)^2 + \frac{x(nx-1)(nx-2)}{2 \cdot 3}(a-1)^3 + \ldots$$

$$= (y-1) + \frac{n-1}{2}(y-1)^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}(y-1)^3 + \ldots$$

Da sich nun aber die mit n verbundenen Glieder von selbst aufheben oder gegenseitig zerstören müssen, so hat man auch, wenn man wieder Kürze halber

$$(a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \ldots = A \text{ setzt:}$$

$$Ax = (y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \ldots$$

also für $\frac{1}{A} = M$:

$$x = log.\, y = M[(y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \ldots]$$

C) Entwicklung von $l(1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots)$.

8) Um den Logarithmus eines Polynomes von der Form $1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ zu finden, darf man nur in der Grundreihe 2), §. 129., $y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$ setzen. Man findet sofort ganz einfach:

$$l(1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots)$$

$$= A_1 x + (A_2 - \tfrac{1}{2} A_1^2)\, x^2 + (A_3 - \tfrac{1}{2} \cdot 2 A_1 A_2 + \tfrac{1}{3} A_1^3)\, x^3$$

$$+ [A_4 - \tfrac{1}{2}(2 A_1 A_3 + A_2^2) + \tfrac{1}{3} \cdot 3 A_1^2 A_2 - \tfrac{1}{4} A_1^4]\, x^4 + \ldots$$

D) Bestimmung der 2ten, 3ten, ... Potenzen der Wurzeln einer höhern Gleichung.

9) Die im §. 41. behandelte Aufgabe: die Summe der 2ten, 3ten, ... mten Potenzen der Wurzeln der Gleichung $x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = 0$ zu finden, kann nun auch noch auf folgende Art aufgelöst werden. Es ist, wenn $w_1, w_2, \ldots w_n$ die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = (x - w_1)(x - w_2) \ldots (x - w_n),$$

oder, wenn man in dieser Gleichung $x = \frac{1}{z}$ setzt, und dann beide Theile mit z^n multiplicirt:

$$1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_n z^n$$

$$= (1 - w_1 z)(1 - w_2 z)(1 - w_3 z) \ldots (1 - w_n z),$$

und wenn man auf natürliche Logarithmen übergeht:

$$l(1+A_1z+A_2z^2+\ldots)=l(1-w_1z)+l(1-w_2z)+l(1-w_3z)+\ldots$$

Werden die Logarithmen im zweiten Theile nach der Grundreihe $l(1-y)=-(y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\ldots)$ entwickelt, so erhält man auch:

$$\begin{aligned}-l(1+A_1z+A_2z^2+\ldots)=\;&w_1z+\tfrac{1}{2}w_1^2z^2+\tfrac{1}{3}w_1^3z^3+\ldots\\&+w_2z+\tfrac{1}{2}w_2^2z^2+\tfrac{1}{3}w_2^3z^3+\ldots\\&+w_3z+\tfrac{1}{2}w_3^2z^2+\tfrac{1}{3}w_3^3z^3+\ldots\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

oder, wenn man diese Reihen nach verticalen Columnen summirt, und $w_1+w_2+w_3+\ldots+w_n=S_1$, $w_1^2+w_2^2+\ldots=S_2$, $w_1^3+w_2^3+\ldots=S_3$ u. s. w. und endlich auch noch für den ersten Theil oder Logarithmus des Polynoms die Entwicklung aus 8) setzt:

$$-A_1z-(A_2-\tfrac{1}{2}A_1^2)z^2-(A_3-\tfrac{1}{2}.2A_1A_2+\tfrac{1}{3}A_1^3)z^3-\ldots$$
$$=S_1z+\tfrac{1}{2}S_2z^2+\tfrac{1}{3}S_3z^3+\ldots$$

aus dieser identischen Gleichung folgen nun die nachstehenden Relationen:

$$\begin{aligned}S_1&=-A_1\\\tfrac{1}{2}S_2&=-A_2+\tfrac{1}{2}A_1^2\\\tfrac{1}{3}S_3&=-A_3+\tfrac{1}{2}2A_1A_2-\tfrac{1}{3}A_1^3\\\tfrac{1}{4}S_4&=-A_4+\tfrac{1}{2}(2A_1A_3+A_2^2)-\tfrac{1}{3}3A_1^2A_2+\tfrac{1}{4}A_1^4\end{aligned}$$

u. s. w.

wie im erwähnten Paragraphe (Formel c)).

Auch kann man daraus leicht A_1, A_2, ... durch S_1, S_2, ... ausdrücken, oder diese Relationen unabhängig von den eben gefundenen, auf einem ähnlichen Wege ableiten.

Neuntes Capitel.

Entwickelung der vorzüglichsten trigonometrischen Reihen; der Reihen zur Berechnung von π und der *Moivre*'schen Formel; Anwendung der letztern auf die Auflösung der binomischen und einiger trinomischen Gleichungen.

§. 142.

Setzt man zur gröfsern Einfachheit $\sqrt{-1}=i$, und in der Reihe (4, §. 128., statt x einmal xi, und einmal $-xi$, so erhält man:

$$e^{xi}=1+xi-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3 i}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+\frac{x^5 i}{2.3.4.5}-\frac{x^6}{2.3\ldots6}-\ldots$$

$$e^{-xi}=1-xi-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3 i}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^5 i}{2.3.4.5}-\frac{x^6}{2.3\ldots6}+\ldots$$

Aus diesen beiden Reihen entsteht ferner, wenn man diese addirt und subtrahirt, und im ersten Falle gleich durch 2, im zweiten aber durch $2i$ dividirt:

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2.3.4.5.6}+\ldots$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-\frac{x^7}{2.3\ldots7}+\ldots$$

Bezeichnet man den ersten Exponentialausdruck $\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$ durch $f(x)$, und den letztern $\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ durch $\varphi(x)$; so erhält man ganz einfach folgende Relationen:

$$f(0)=1;\ \varphi(0)=0;$$

$$[f(x)]^2+[\varphi(x)]^2=1;\ f(-x)=f(x);\ \varphi(-x)=-\varphi(x);$$

$$\varphi(2x)=2\varphi(x)f(x);\ f(2x)=2[f(x)]^2-1=1-2[\varphi(x)]^2$$

u. s. w.

Auch findet man ohne Mühe die Gleichungen:

$$\varphi(x \pm y) = \varphi(x) f(y) \pm \varphi(y) f(x);$$
$$f(x \pm y) = f(x) f(y) \mp \varphi(x) \varphi(y) \text{ *)}.$$

Schon die beiden ersten dieser Relationen reichen hin, um zu sehen, daſs $\varphi(x) = sin. x$ und $f(x) = cos. x$ für den Halbmesser 1 ist **). Man hat also:

$$1) \; sin. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}; \quad 2) \; cos. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$3) \; sin. x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3\ldots7} + \ldots$$

$$4) \; cos. x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3\ldots6} + \ldots$$

$$\left\{\begin{matrix} \text{von } x = -\infty \\ \text{bis } x = +\infty \end{matrix}\right\} \text{ (§. 125., Beisp. 7. u. 8.).}$$

*) Man hat nämlich

$$2 f(x) f(y) = \frac{e^{(x+y)i} + e^{-(x-y)i} + e^{(x-y)i} + e^{-(x+y)i}}{2}$$
$$= f(x+y) + f(x-y),$$
$$-2\varphi(x)\varphi(y) = \frac{e^{(x+y)i} - e^{-(x-y)i} - e^{(x-y)i} + e^{-(x+y)i}}{2}$$
$$= f(x+y) - f(x-y),$$
$$2 f(x) \varphi(y) = \frac{e^{(x+y)i} - e^{(x-y)i} + e^{-(x-y)i} - e^{-(x+y)i}}{2i}$$
$$= \varphi(x+y) - \varphi(x-y),$$
$$2\varphi(x) f(y) = \frac{e^{(x+y)i} + e^{(x-y)i} - e^{-(x-y)i} - e^{-(x+y)i}}{2i}$$
$$= \varphi(x+y) + \varphi(x-y).$$

Die Summe und Differenz der beiden ersten Gleichungen gibt, wenn man gleich mit 2 durchaus abkürzt:

$$f(x+y) = f(x) f(y) - \varphi(x)\varphi(y),$$
$$f(x-y) = f(x) f(y) + \varphi(x)\varphi(y);$$

und die der beiden letztern:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) f(y) + \varphi(y) f(x),$$
$$\varphi(x-y) = \varphi(x) f(y) - \varphi(y) f(x).$$

**) Ignorirt man das Daseyn und die Eigenschaften der goniometrischen Linien, die doch füglich als ein Theil der Elementargeometrie der höhern Analysis vorausgehen sollten, ganz und gar; so macht man die genannten beiden Relationen zu einem Gegenstande der bloſsen Definition, und nennt die Function $\varphi(x)$ den Sinus, und $f(x)$ den Cosinus von x. Daſs man aber dabei dennoch Notiz von der Existenz dieser Linien nimmt, beweist eben diese Definition, indem man diesen beiden Functionen sonst eben so gut ganz andere Benennungen beilegen könnte.

Anmerk. Wir wollen hier, von den bekannten Eigenschaften des Sinus und Cosinus der Trigonometrie ausgehend, diese beiden Reihen 3) und 4) noch direct auf folgende Art ableiten.

Wegen $\sin. 0 = 0$ und $\cos. 0 = 1$ wird man fürs Erste die unbestimmten Reihen so wählen:

$$\sin. x = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots,$$
$$\cos. x = 1 + A'x + B'x^2 + C'x^3 + \ldots;$$

dabei wird der Verlauf der Entwickelung zeigen, ob diese Form hinsichtlich der Exponenten der Variablen zulässig ist oder nicht. Um indeſs diese Form sogleich etwas näher zu bestimmen, berücksichtigen wir die Relationen

$$\sin. -x = -\sin. x \text{ und } \cos. -x = \cos. x:$$

dadurch wird auch:

$$-\sin. x = -Ax + Bx^2 - Cx^3 + \ldots,$$
$$\cos. x = 1 - A'x + B'x^2 - C'x^3 + \ldots$$

Wird die erste dieser Reihen mit der ersten der beiden vorigen addirt, und die zweite von der zweiten der obigen subtrahirt, und jede Gleichung sogleich durch 2 abgekürzt, so findet man:

$$0 = Bx^2 + Dx^4 + \ldots \text{ und } 0 = A'x + C'x^3 + \ldots;$$

woraus hervorgeht, daſs in der Reihe des Sinus keine geraden, und in jener des Cosinus keine ungeraden Potenzen vorkommen können. Wir setzen also bestimmter:

$$\sin. x = A_1 x + A_2 x^3 + A_3 x^5 + \ldots$$
$$\text{und } \cos. x = 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6 + \ldots$$

Zur Bestimmung der Coefficienten kann man die Relationen von $\sin. (x+y)$, $\cos. (x+y)$, oder noch einfacher, ein Paar daraus abgeleitete, wie z. B. $\sin.^2 x + \cos.^2 x - 1 = 0$ und $\frac{1}{2} \sin. 2x - \sin. x \cos. x = 0$, benützen.

Nach der ersten dieser beiden Gleichungen hat man:

$$0 = \left.\begin{matrix} A_1^2 \\ 2a_1 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 2A_1A_2 \\ 2a_2 \\ a_1^2 \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} 2A_1A_3 \\ A_2^2 \\ 2a_3 \\ 2a_1a_2 \end{matrix}\right\} x^6 + \ldots,$$

und nach der zweiten:

$$0 = \left.\begin{matrix} A_1 \\ -A_1 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} 4A_2 \\ -A_2 \\ -A_1a_1 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} 16A_3 \\ -A_3 \\ -A_2a_1 \\ -A_1a_2 \end{matrix}\right\} x^5 + \ldots$$

Setzt man nun in diesen beiden Gleichungen, da die Coef-

ficienten A_1, A_2, . . . von x ganz unabhängig sind, die einzelnen Coefficienten (§. 2.) gleich Null, und bestimmt aus den entstehenden Gleichungen A_2, A_3, . . .; a_1, a_2, . . .; so findet man ganz leicht:

$$A_2 = -\frac{A_1^3}{2.3},\ A_3 = \frac{A_1^5}{2.3.4.5}, \ldots$$

$$a_1 = -\frac{A_1^2}{2},\ a_2 = \frac{A_1^4}{2.3.4},\ a_3 = \frac{-A_1^6}{2.3.4.5.6}, \ldots$$

so dafs man hat:

$$sin.\,x = A_1 x - \frac{A_1^3 x^3}{2.3} + \frac{A_1^5 x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

$$cos.\,x = 1 - \frac{A_1^2 x^2}{2} + \frac{A_1^4 x^4}{2.3.4} - \frac{A_1^6 x^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

Um endlich noch den unbestimmten Coefficienten A_1 zu bestimmen, berücksichtige man, dafs, weil bekanntlich die Sehne irgend eines kleinen Bogens $2x$ kleiner als der Bogen, und die Summe der beiden an den Endpuncten desselben errichteten Tangenten, als ein Theil des umschriebenen Polygons, gröfser als dieser Bogen, nämlich $2\,sin.\,x < 2x$ und $2\,tang.\,x > 2x$ ist, auch $sin.\,x < x$, und wegen $tang.\,x = \frac{sin.\,x}{cos.\,x}$, $\frac{sin.\,x}{cos.\,x} > x$, oder wenn man beide Ungleichungen durch $sin.\,x$ dividirt: $1 < \frac{x}{sin.\,x}$ und $\frac{1}{cos.\,x} > \frac{x}{sin.\,x}$ ist. Das Verhältnifs von $\frac{x}{sin.\,x}$ bleibt also für jeden noch so kleinen Werth von x zwischen den Grenzen 1 und $\frac{1}{cos.\,x}$, also jenes von $\frac{sin.\,x}{x}$ zwischen 1 und $cos.\,x$ eingeschlossen. Da nun bei der unendlichen Abnahme von x, $cos.\,x$ gegen 1 convergirt, und für $x = 0$, $cos.\,x = 1$ wird, also die beiden Grenzen dann zusammenfallen; so wird auch für diesen Werth von $x = 0$, das Verhältnifs $\frac{sin.\,x}{x} = 1$. Aus der Gleichung

$$\frac{sin.\,x}{x} = A_1 + A_1^3 \frac{x^2}{2.3} + \ldots$$

folgt also endlich, wenn man darin $x = 0$ setzt: $A_1 = 1$, und mit diesem Werthe erhält man für $sin.\,x$ und $cos.\,x$ genau die obigen Reihen 3) und 4).

Setzt man

$$a)\quad \sin. x = x\left(1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \ldots\right) = 0,$$

so sind, da man in $\sin. x = 0$ offenbar aufser 0 für x die Werthe π, 2π, 3π, ... und $-\pi$, -2π, -3π, ... nehmen kann, diese Werthe $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, ... die Wurzeln der Gleichung $1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \ldots \pm \frac{x^n}{2.3\ldots n} = 0$, oder, wenn man $x = \frac{1}{y}$ setzt (und mit y^n multiplicirt): $y = \frac{1}{\pm\pi}$, $\frac{1}{\pm 2\pi}$, ... $\left(\text{wegen } y = \frac{1}{x}\right)$ die Wurzeln der Gleichung $0 = y^n - \frac{y^{n-2}}{2.3} + \frac{y^{n-4}}{2.3.4.5} - \ldots$; folglich ist auch (§. 27., I.)

$$y^n - \frac{y^{n-2}}{2.3} + \frac{y^{n-4}}{2.3.4.5} - \ldots$$
$$= \left(y - \frac{1}{\pi}\right)\left(y + \frac{1}{\pi}\right)\left(y - \frac{1}{2\pi}\right)\left(y + \frac{1}{2\pi}\right)\ldots$$
$$= y^n\left(1 - \frac{1}{\pi y}\right)\left(1 + \frac{1}{\pi y}\right)\left(1 - \frac{1}{2\pi y}\right)\left(1 + \frac{1}{2\pi y}\right)\ldots;$$

oder, wenn man durch y^n dividirt, und die Factoren paarweise zusammennimmt:

$$1 - \frac{1}{2.3.y^2} + \frac{1}{2.3.4.5.y^4} - \ldots$$
$$= \left(1 - \frac{1}{\pi^2 y^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4\pi^2 y^2}\right)\left(1 - \frac{1}{9\pi^2 y^2}\right)\ldots;$$

und wenn man endlich für y wieder den Werth in x zurück substituirt:

$$1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \ldots$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

Es ist daher auch nach der obigen Gleichung a):

$$a)\quad \sin. x = x\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\ldots$$
$$= x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots,$$

welche unendliche Factorenfolge für j e d e n r e e l l e n Werth von x c o n v e r g i r t (m. s. §. 141., Beisp. 4.).

Aus dieser Reihe folgt auch ganz einfach:

$$\frac{\sin.x}{\sin.y} = \frac{x}{y}\left(\frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2 - y^2}\right)\left(\frac{4\pi^2 - x^2}{4\pi^2 - y^2}\right)\left(\frac{9\pi^2 - x^2}{9\pi^2 - y^2}\right)\ldots$$

$$= \frac{x}{y}\left(\frac{\pi - x}{\pi - y}\right)\left(\frac{\pi + x}{\pi + y}\right)\left(\frac{2\pi - x}{2\pi - y}\right)\left(\frac{2\pi + x}{2\pi + y}\right)\left(\frac{3\pi - x}{3\pi - y}\right)\left(\frac{3\pi + x}{3\pi + y}\right)\ldots,$$

und wenn man in dieser $x = \frac{\pi}{2} - x$ und $y = \frac{\pi}{2}$ setzt:

$$b)\quad \cos.x = \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{2x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{2x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{2x}{3\pi}\right)\ldots$$

$$= \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{16\pi^2}\right)\ldots$$

Setzt man in $a)$ $x = \frac{\pi}{2}$, so entsteht:

$$1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\ldots,$$

und daraus folgt

$$c)\quad \frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots};$$

ein Ausdruck für die Ludolphische Zahl, welchen *Wallis* (geb. zu Kent 1616; gest. zu Oxford 1703) zuerst gefunden hat *).

§. 143.

Es ist

$$\tang.x = \frac{\sin.x}{\cos.x} = x\left\{\frac{1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \ldots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \ldots}\right\},$$

oder, wenn man diesen in den Klammern eingeschlossenen Bruch gleich $1 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \ldots$ setzt, mit dem Nenner multiplicirt, und aus der entstehenden Gleichung nach §. 2. die unbestimmten Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ bestimmt, auch:

$$5)\quad \tang.x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{3^2.5.7} + \frac{62x^9}{3^2.5.7.9} + \ldots$$

Eben so findet man:

*) Noch andere Ausdrücke für $\sin.x$ und $\cos.x$, so wie eine Anwendung der gefundenen unendlichen Factorenfolgen zur Summirung von unendlichen Reihen, findet man im ersten Bande des oben angezogenen *Euler*'schen Werkes *(Introductio etc.)* im X. und XI. Capitel.

6) $cot. x = \frac{cos. x}{sin. x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2 . 5} - \frac{2 x^5}{3^3 . 5 . 7} - \ldots$ *)

Und so können auch leicht noch die übrigen trigonometrischen Functionen: $sec. x = \frac{1}{cos. x}$, $cosec. x = \frac{1}{sin. x}$, $sinv. x = 1 - cos. x$ und $cosinv. x = 1 - sin. x$ in Reihen entwickelt werden.

Anmerk. Merkwürdig sind auch die Reihen für $l\, sin. x$, $l\, cos. x$, u. s. w.; sie lassen sich ganz einfach auf folgende Weise entwickeln:

*) Bezeichnen $B_1, B_2, B_3, \ldots$ die aufeinander folgenden Bernoullischen Zahlen [§. 92. *C*)], so können diese Reihen auch auf folgende Art, wodurch ein bestimmtes Gesetz hineingebracht wird, dargestellt werden:

$$tang. x = \frac{2^2(2^2-1)}{1.2} B_1 x + \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4} B_2 x^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{1.2\ldots 6} B_3 x^5 + \ldots,$$

$$cot. x = \frac{1}{x} - \frac{2^2}{1.2} B_1 x - \frac{2^4}{1.2.3.4} B_2 x^3 - \frac{2^6}{1.2\ldots 6} B_3 x^5 - \ldots$$

Auch die Reihe der Cosecante läſst sich so ausdrücken. Es ist nämlich:

$$Cosec. x = \frac{1}{x} + \frac{2(2-1)}{1.2} B_1 x + \frac{2(2^3-1)}{1.2.3.4} B_2 x^3 + \frac{2(2^5-1)}{1.2\ldots 6} B_3 x^5 + \ldots$$

Dagegen läſst sich bei der Secantenreihe der n^{te} Coefficient nicht mehr, wie bei diesen Reihen, durch die n^{te} Bernoullische Zahl allein ausdrücken, sondern es müssen auch alle vorhergehenden bis zum ersten zu Hilfe genommen werden. Setzt man nämlich

$$Sec. x = 1 + \frac{a_1}{1.2} x^2 + \frac{a_2}{1.2.3.4} x^4 + \ldots + \frac{a_n}{1.2\ldots 2n} x^{2n},$$

so ist, wenn man nach *Bessel* (Unters. über die Bahn des im Jahre 1807 erschien. Cometen) den m^{ten} Binomialcoefficienten der $2n+1^{ten}$ Potenz durch P^m_{2n+1} bezeichnet:

$$(2n+1) a_n = 2^{2n}(2^{2n}-1) P^1_{2n+1} B_n - 2^{2n-2}(2^{2n-2}-1) P^3_{2n+1} B_{n-1} + \ldots$$
$$\ldots (-1)^{n-1} 2^2(2^2-1) P^{2n-1}_{2n+1} B_1 + (-1)^n (2n+1).$$

Es ist

$$cos. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \frac{1 + e^{2x\sqrt{-1}}}{2e^{x\sqrt{-1}}},$$

und auch wegen $cos. -x = cos. x$, wenn man statt $+x$, $-x$ schreibt:

$$cos. x = \frac{1 + e^{-2x\sqrt{-1}}}{2e^{-x\sqrt{-1}}};$$

folglich aus der ersten Relation:

$$l\,cos. x = l\left(\frac{1 + e^{2x\sqrt{-1}}}{2e^{x\sqrt{-1}}}\right) = l(1 + e^{2x\sqrt{-1}}) - l2 - x\sqrt{-1};$$

oder wenn man $l(1 + e^{2x\sqrt{-1}})$ nach der Formel 2), §. 129., auflöst, auch

$$l\,cos. x = e^{2x\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2}e^{4x\sqrt{-1}}$$
$$+ \tfrac{1}{3}e^{6x\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{4}e^{8x\sqrt{-1}} + \ldots - l2 - x\sqrt{-1}.$$

Eben so ist nach der zweiten Relation

$$l\,cos. x = e^{-2x\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2}e^{-4x\sqrt{-1}}$$
$$+ \tfrac{1}{3}e^{-6x\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{4}e^{-8x\sqrt{-1}} + \ldots - l2 + x\sqrt{-1},$$

indem nur x negativ genommen werden darf. Diese beiden Gleichungen addirt, geben, wenn man gleich durch 2 dividirt:

$$l\,cos. x = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}}}{2} - \tfrac{1}{2}\frac{e^{4x\sqrt{-1}} + e^{-4x\sqrt{-1}}}{2}$$
$$+ \tfrac{1}{3}\frac{e^{6x\sqrt{-1}} + e^{-6x\sqrt{-1}}}{2} - \tfrac{1}{4}\frac{e^{8x\sqrt{-1}} + e^{-8x\sqrt{-1}}}{2} + \ldots - l2;$$

oder endlich, da aus der Formel 2) des vorigen Paragraphes $\frac{e^{nx\sqrt{-1}} + e^{-nx\sqrt{-1}}}{2} = cos. nx$ folgt, auch:

$$\alpha)\quad l\,cos. x = l\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{1}cos. 2x - \tfrac{1}{2}cos. 4x$$
$$+ \tfrac{1}{3}cos. 6x - \tfrac{1}{4}cos. 8x + \ldots$$

Setzt man in dieser Formel statt x, $90 - x$; so erhält man ganz einfach:

$$\beta)\quad l\,sin. x = l\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{1}cos. 2x - \tfrac{1}{2}cos. 4x$$
$$- \tfrac{1}{3}cos. 6x - \tfrac{1}{4}cos. 8x - \ldots$$

Es ist ferner

$$l\,tang.\,x = l\frac{sin.\,x}{cos.\,x} = l\,sin.\,x - l\,cos\,x;$$

folglich, wenn man die Werthe aus α) und β) setzt:

γ) $l\,tang.\,x = -2\,cos.\,2x - \frac{2}{3}cos.\,6x - \frac{2}{5}cos.\,10x - \ldots,$

und eben so:

δ) $l\,cot.\,x = 2\,cos.\,2x + \frac{2}{3}cos.\,6x + \frac{2}{5}cos.\,10x + \ldots$ *).

§. 144.

Um den Bogen x durch $sin.\,x$, $cos.\,x$ u. s. w. auszudrücken, dürfen blofs die obigen Reihen 3), 4), 5), . . . nach §. 121. umgekehrt werden. Die wichtigsten unter diesen Reihen sind jene beiden, die aus der Umkehrung der Reihen 3) und 5) entstehen; man erhält dafür (§. 121., Beispiel 1. und 2.):

7) $$x = sin.\,x + \frac{1\,sin.^3\,x}{2\,.\,3} + \frac{1\,.\,3\,sin.^5\,x}{2\,.\,4\,.\,5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,sin.^7\,x}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,7} + \ldots$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{von } sin.\,x = -1\\ \text{bis } sin.\,x = +1\end{array}\right\}$ (wie man nach §. 125. und 141. leicht findet).

8) $$x = tang.\,x - \tfrac{1}{3}tang.^3\,x + \tfrac{1}{5}tang.^5\,x - \tfrac{1}{7}tang.^7\,x + \ldots$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{von } tang.\,x = -1\\ \text{bis } tang.\,x = +1\end{array}\right\}$ (§. 125., Beisp. 6.; in beiden Fällen sind die Grenzwerthe mit zu rechnen).

Anmerk. Diese letzte Reihe 8) kann einfacher und mit Umgehung der Umkehrung direct auf folgende Art entwickelt werden.

Aus den Gleichungen 1) und 2) (§. 142.) folgt durch Addition und Subtraction:

$$e^{x\sqrt{-1}} = cos.\,x + \sqrt{-1}\,sin.\,x = cos.\,x\,(1 + \sqrt{-1}\,tang.\,x);$$
$$e^{-x\sqrt{-1}} = cos.\,x - \sqrt{-1}\,sin.\,x = cos.\,x\,(1 - \sqrt{-1}\,tang.\,x);$$

und, wenn man auf natürliche Logarithmen übergeht (wegen $l\,e = 1$):

$$x\sqrt{-1} = l\,cos.\,x + l(1 + \sqrt{-1}\,tang.\,x)\ \ldots\ (m$$
$$-x\sqrt{-1} = l\,cos.\,x + l(1 - \sqrt{-1}\,tang.\,x).$$

*) Ob diese einfache Ableitung der Reihen α), β), γ), δ) schon bemerkt wurde, ist dem Verfasser nicht bekannt.

Wird die untere dieser beiden Gleichungen von der obern abgezogen, so erhält man, nachdem beiderseits durch $2\sqrt{-1}$ dividirt worden:

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{1 + \sqrt{-1}\, tang.\, x}{1 - \sqrt{-1}\, tang.\, x}\right) \ldots (p$$

Nun ist aber, wenn man in der Formel β), §. 131., $M = 1$, $y = \sqrt{-1}\, tang.\, x$ setzt, und sogleich den gemeinschaftlichen Factor $\sqrt{-1}$ herausnimmt:

$$l\left(\frac{1 + \sqrt{-1}\, tang.\, x}{1 - \sqrt{-1}\, tang.\, x}\right) =$$
$$2\sqrt{-1}\,(tang.\, x - \tfrac{1}{3}\, tang.^3 x + \tfrac{1}{5}\, tang.^5 x - \ldots);$$

folglich auch, wenn man diesen Werth in (p substituirt [wie vorhin in 8)]:

$$x = tang.\, x - \tfrac{1}{3}\, tang.^3 x + \tfrac{1}{5}\, tang.^5 x - \tfrac{1}{7}\, tang.^7 x + \ldots$$

Zugleich wollen wir hier bemerken, daſs die Formel (p dazu dienen kann, Logarithmen von einer imaginären Form in Kreisbogen zu verwandeln.

Reihen zur Berechnung von π.

§. 145.

Die vorige Reihe 8) läſst sich zur Berechnung der Ludolphischen Zahl π, oder der Länge der halben Kreisperipherie für den Halbmesser Eins, auf folgende Weise benützen.

1. Setzt man in dieser Reihe $x = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$; so wird, wegen $tang.\, x = 1$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots$$

Durch diese von *Leibnitz* (geb. zu Leipzig 1646; gest. zu Hannover 1716) gefundene Reihe *) wird zwar π auf eine sehr einfache Weise dargestellt, sie ist aber (wie *Leibnitz* selbst erinnert) zur wirklichen Berechnung von π, ihrer ungemein geringen Convergenz wegen, nicht brauchbar.

*) *Leibnitz* machte diese bekannt in den Leipziger »*Acta Eruditorum*,« 1682. Auch *Lagny* kam um diese Zeit darauf; sie soll indeſs schon von *Jacob Gregory* im Jahre 1670 gefunden worden seyn.

2. Setzt man dagegen $x = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, so folgt $tang. x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, und man hat nach der genannten Reihe 8):

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3.3\sqrt{3}} + \frac{1}{5.3^2\sqrt{3}} - \ldots$$

oder

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3.3^1} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \frac{1}{9.3^4} - \ldots\right).$$

Um noch stärker convergirende Reihen zu erhalten, zerlegt man (nach *Euler*) einen Bogen, welcher zur halben Peripherie ein rationales Verhältniſs besitzt, am bequemsten den Bogen von 45 Grad oder $\frac{\pi}{4}$, in zwei oder mehrere Bogen von solcher Beschaffenheit, daſs die Tangenten derselben rational ausfallen, und wo möglich durch kleine und einfache Brüche ausgedrückt werden.

3. Setzt man z. B. $a + b = 45^\circ$, so wird

$$tang. (a + b) = 1 = \frac{tang\ a + tang. b}{1 - tang. a\ tang. b},$$

und daraus folgt, wenn man $tang. a = \frac{1}{2}$ annimmt: $tang. b = \frac{1}{3}$. Man hat daher nach der Reihe 8):

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \ldots$$

$$\text{und}\quad b = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \ldots,$$

folglich auch, wenn man addirt, wegen $a + b = \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \ldots\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \ldots\right),$$

welches die *Euler*'sche Reihe ist. Da man dabei immer durch die einfachen Factoren 4 und 9 dividiren kann, so ist sie zur wirklichen Rechnung äuſserst bequem.

4. Nimmt man $2A + B = 45^\circ$, so ist, wenn $tang. A = \frac{1}{3}$ gesetzt wird, $tang. 2A = \frac{2\, tang. A}{1 - tang.^2 A} = \frac{3}{4}$, also

$$1 = tang. (2A + B) = \frac{\frac{3}{4} + tang. B}{1 - \frac{3}{4} tang. B},$$

und daraus $tang. B = \frac{1}{7}$. Es ist daher wieder nach der Reihe 8):

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \ldots \text{ und } B = \frac{1}{7} - \frac{1}{3.7^3} + \ldots,$$

demnach, wegen $2A + B = \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \ldots\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{1.7} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - \ldots\right).$$

5. Setzt man $4A + B = 45^0$ und $tang. A = \frac{1}{5}$, wodurch $tang. 4A = \frac{120}{119}$ wird; so folgt

$$1 = \frac{\frac{120}{119} + tang. B}{1 - \frac{120}{119} tang. B}, \text{ und daraus } tang. B = -\frac{1}{239}.$$

Es ist demnach, wegen $4A + B = \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{1.5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \ldots\right).$$

6. So wie wir zuletzt $\frac{\pi}{4} = 4\ arc. tang. \frac{1}{5} - arc. tang. \frac{1}{239}$ gefunden haben, so findet man auch:

$$\frac{\pi}{4} = 8\ arc. tang. \frac{1}{10} - 4\ arc. tang. \frac{1}{515} - arc. tang. \frac{1}{239}$$
$$= 5\ arc. tang. \frac{1}{7} + 2\ arc. tang. \frac{3}{79}.$$

Die erste Relation, welche von *Buzengeiger* herrührt, gibt:

$$\frac{\pi}{4} = 8\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{3.10^3} + \ldots\right) - 4\left(\frac{1}{515} - \frac{1}{3.515^3} + \ldots\right)$$
$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \ldots\right),$$

und die letztere:

$$\frac{\pi}{4} = 5\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - \ldots\right) + 2\left(\frac{3}{79} - \frac{3^3}{3.79^3} + \ldots\right) \text{*)}.$$

*) Noch andere hieher gehörige Reihen kann man nachsehen: in der Trigonometrie, §. 64.; in der Sammlung trigonometrischer Formeln, S. 27; und in den »Abhandlungen über einige wichtige Gegenstände der practischen Geometrie« (Wien 1825, bei *Wimmer*), wo man (S. 82) eine sehr gut convergirende Reihe vom Verfasser findet. Auch kann man in dieser Beziehung *Grunert's* mathematische Abhandlungen, erste Sammlung (Altona 1822), S. 115 u. f. vergleichen.

Auch die Reihe 7) (§. 144.) kann zu diesem Zwecke dienen.

7. Setzt man nämlich $x = 45^0$, wodurch $sin.\, x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ wird, so folgt aus dieser Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2^1 . 2 . 3} + \frac{1 . 3}{2^2 . 2 . 4 . 5} + \frac{1 . 3 . 5}{2^3 . 2 . 4 . 6 . 7} + \ldots\right).$$

8. Für $x = 30^0 = \frac{\pi}{6}$ ist $sin.\, x = \frac{1}{2}$, also nach der genannten Reihe:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3 . 2 . 3} + \frac{1 . 3}{2^5 . 2 . 4 . 5} + \frac{1 . 3 . 5}{2^7 . 2 . 4 . 6 . 7} + \ldots$$

Die ersten zwanzig Decimalstellen der Zahl π, welche bereits auf 140 Stellen genau bekannt ist, sind:

3·14159265358979323846 2.

Anmerk. Nach der in 2. angeführten Reihe hat schon *Abraham Sharp* (geb. zu Little-Horton in Yorkshire 1651; gest. ebendaselbst 1742), einer der gröſsten Rechner seiner Zeit in England, gegen Ende des siebzehnten Jahrhunderts π auf 72 Decimalstellen berechnet. (M. s. *Sherwin's Mathematical Tables.* 3. Aufl. London 1742.)

Bald darauf berechnete *Machin*, Professor der Astronomie am Gresham College zu London, diese Zahl π nach der in 5. entwickelten Doppelreihe bis auf die 100ste Decimalstelle.

Der französische Geometer *Lagny* (geb. zu Lyon 1660; gestorb. zu Paris 1734) suchte diese Zahl, nach einer besondern Anordnung der Reihe 2. und einem nicht bekannten Kunstgriffe, bis auf 127 Decimalstellen.

Endlich hat *Vega* nach der letzten in 6. angeführten Reihe, welche nämlich aus der Formel $\frac{\pi}{4} = 5\, arc.tang.\, \frac{1}{7} + 2\, arc\, tang.\, \frac{3}{79}$ entsteht, diese Ludolphische Zahl π bis auf 140 Decimalen berechnet, und die Rechnung noch überdieſs nach der aus der Formel $arc.\, tang.\, 45^0 = arc.\, tang.\, \frac{1}{7} + 2\, arc.\, tang.\, \frac{1}{3}$ resultirenden Reihe bis auf die 126ste Decimalstelle verificirt und geprüft (*Thesaurus Logarithmorum*, S. 633).

Die *Moivre*'sche Formel.

§. 146.

Aus den Gleichungen 1) und 2), §. 142., folgt

$$a)\quad cos.\, x \pm \sqrt{-1}\, sin.\, x = e^{\pm x\sqrt{-1}}.$$

Eben so ist $\cos. y \pm \sqrt{-1}\ \sin. y = e^{\pm y \sqrt{-1}}$, also auch

$$(\cos. x \pm \sqrt{-1}\ \sin. x)(\cos. y \pm \sqrt{-1}\ \sin. y) =$$

$$\cos. x \cos. y - \sin. x \sin. y \pm \sqrt{-1}\ (\sin. x \cos. y + \sin. y \cos. x),$$

d. i.:

$$b)\quad (\cos. x \pm \sqrt{-1}\ \sin. x)(\cos. y \pm \sqrt{-1}\ \sin. y)$$
$$= \cos. (x + y) \pm \sqrt{-1}\ \sin. (x + y)$$

Setzt man in a) statt x, $x \pm 2r\pi$, wo r jede ganze positive Zahl bezeichnen soll; so wird, wegen $\cos. (x \pm 2r\pi)$, $= \cos. x$ und $\sin. (x \pm 2r\pi) = \sin. x$:

$$\cos. x \pm \sqrt{-1}\ \sin. x = e^{\pm (x \pm 2r\pi) \sqrt{-1}},$$

und wenn man diese Gleichung zur n^{ten} Potenz erhebt, wo n jede rationale oder irrationale, ja sogar imaginäre Gröfse bezeichnen kann:

$$(\cos. x \pm \sqrt{-1}\ \sin. x)^n = e^{\pm n (x \pm 2r\pi) \sqrt{-1}},$$

oder auch, mit Berücksichtigung der Gleichung a), wenn man dort statt x, $n(x \pm 2r\pi)$ setzt:

$$1)\quad (\cos. x \pm \sqrt{-1}\ \sin. x)^n =$$
$$\cos. n (x \pm 2r\pi) \pm \sqrt{-1}\ \sin. n (x \pm 2r\pi);$$

und dieses ist die merkwürdige von *De Moivre* (geb. zu Vitri in Frankreich 1667; gestorb. zu London 1754) zuerst entwickelte und nach ihm benannte Formel *).

*) Eigentlich war die *Moivre*'sche Formel, selbst bis auf die neueste Zeit, nur unter der Form

$$(\cos. a \pm \sqrt{-1}\ \sin. a)^n = \cos. n a \pm \sqrt{-1}\ \sin. n a$$

bekannt, und wurde unter dieser Gestalt auch von *Euler* in die Elemente übertragen, bei deren Ableitung er den oben in der Gleichung b) angedeuteten Weg einschlug. (Für $y = x$ folgt nämlich aus b):

$$(\cos. x \pm \sqrt{-1}\ \sin. x)^2 = \cos. 2x \pm \sqrt{-1}\ \sin. 2x.$$

Multiplicirt man diese Gleichung wieder mit $\cos. x \pm \sqrt{-1}\ \sin. x$, so entsteht

$$(\cos. x \pm \sqrt{-1}\ \sin. x)^3 = \cos. 3x \pm \sqrt{-1}\ \sin. 3x;\ \text{u. s. w.})$$

In dieser Form ist die Gleichung nur für ganze Werthe von n richtig, dagegen unvollständig, wenn n gebrochen ist; weil dann der n^{ten} Potenz des Binoms genau so viele Werthe zukommen, als der Nenner des zur kleinsten Benennung gebrachten Bruches Einheiten hat, während der zweite Theil dieser Gleichung nur einen einzigen Werth dafür liefert.

Ist n eine ganze Zahl, so erhält man aus dieser Formel, man mag für r was immer für ganze Zahlen setzen (da $cos.$ und $sin.$ $(nx \pm 2rn\pi) = cos.$ und $sin.\, nx$ ist), für die n^{te} Potenz von $cos\, x \pm \sqrt{-1}\, sin.\, x$, wie es seyn soll, nur einen Werth. Ist dagegen $n = \frac{s}{m}$ ein Bruch, welcher schon zur kleinsten Benennung gebracht seyn soll, und man setzt in diesem Falle für r nach und nach die Werthe 0, 1, 2, ... $m-1$, m, $m+1$, ..., so entstehen aus $n(x \pm 2r\pi)$ der Reihe nach die Werthe:

$$\frac{s}{m}x,\quad \frac{s}{m}x \pm \frac{2s}{m}\pi,\ \ldots$$

$$\frac{s}{m}x \pm \frac{2s(m-1)}{m}\pi,\quad \left(\frac{s}{m}x \pm 2s\pi\right),$$

$$\frac{s}{m}x \pm \frac{2s(m+1)}{m}\pi = \left(\frac{s}{m}x \pm \frac{2s}{m}\pi \pm 2s\pi\right),\ \ldots;$$

von diesen Bögen haben aber offenbar, wenn man von den doppelten Zeichen durchaus entweder bloſs die obern oder untern berücksichtiget, die m ersten verschiedene Sinusse und Cosinusse; dagegen hat der $m+1^{ste}$ mit dem ersten, der $m+2^{te}$ mit dem zweiten Bogen u. s. f. einerlei Sinus und Cosinus, so, daſs sich in Bezug auf den Sinus und Cosinus, die Reihe vom $m+1^{sten}$ Gliede angefangen wiederholt.

Man sieht aber auch ohne Mühe, daſs mit Beibehaltung der doppelten Zeichen, für r bloſs die Werthe 0, 1, 2, ... $\frac{m}{2}$ oder $\frac{m-1}{2}$, je nachdem m gerad oder ungerad ist, und nicht weiter substituirt werden dürfen, um die sämmtlichen m Bogen zu erhalten, deren Sinusse und Cosinusse unter einander verschieden sind; weil z B. im ersten Falle (wenn m gerad ist) die Substitution von $r = \frac{m}{2} + 1$ einen Bogen gibt, welcher für das obere Zeichen denselben Sinus und Cosinus besitzt, als der aus der zweit vorhergehenden Substitution von $r = \frac{m}{2} - 1$ entstehende Bogen für das untere Zeichen, und umgekehrt.

Eben so ist es mit den folgenden gegen die correspondirend vorhergehenden. Ferner findet man im zweiten Falle (wenn m ungerad ist), dafs für $r = \frac{m-1}{2} + 1 = \frac{m+1}{2}$ der Bogen mit dem obern Zeichen, mit jenem für $r = \frac{m-1}{2}$ für das untere Zeichen wieder einerlei Sinus und Cosinus hat, und umgekehrt; dasselbe gilt hinsichtlich der Bogen für $r = \frac{m+3}{2}$ und $r = \frac{m-3}{2}$ u. s. w.

In so ferne man eine Irrationalzahl als einen Bruch von unendlich grofsem Nenner ansehen kann, folgt auch, dafs, wenn n irrational ist, der n^{ten} Potenz des obigen Binoms unendlich viele Werthe zukommen.

§. 147.

Setzt man in der Formel 1) des vorigen Paragraphes $x = 0$, so erhält man, wegen $\sin. 0 = 0$ und $\cos. 0 = 1$:

$$2)\quad (+1)^n = \cos. 2rn\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin. 2rn\pi.$$

Für $x = \pi$ dagegen erhält man, wegen $\sin. \pi = 0$ und $\cos. \pi = -1$:

$$3)\quad (-1)^n = \cos.(2r+1)n\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin.(2r+1)n\pi;$$

und es gilt von diesen beiden Formeln genau das, was vorhin von der Allgemeinen 1) bemerket worden ist. Es erhält nämlich sowohl $(+1)^n$, wie auch $(-1)^n$, nur einen Werth, wenn n ganz, dagegen m Werthe, wenn $n = \frac{s}{m}$ ist; und zwar werden diese aus 2) und 3) erhalten, indem man für r nach und nach die Zahlen $0, 1, 2 \ldots \frac{m}{2}$, wenn m gerad, und $0, 1, 2, \ldots \frac{m-1}{2}$, wenn m ungerad ist, setzt.

Die Gleichung 3) läfst sich, wenn man jene b) des vorigen Paragraphes, in welcher nur statt x, $2rn\pi$, und statt y, $n\pi$ gesetzt werden darf, mit berücksichtiget, auch so darstellen:

$$(-1)^n = (\cos.2rn\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin.2rn\pi)(\cos.n\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin.n\pi);$$

oder, wegen der Gleichung 2) auch:

$$4)\ (-1)^n = (+1)^n\,(\cos. n\pi \pm \sqrt{-1}\ \sin. n\pi).$$

Läfst man in der genannten Gleichung b) hingegen, x $2rn\pi$ und y nx bedeuten, so sieht man sogleich, dafs die obige Gleichung 1) (des vorigen Paragraphes) auch so dargestellt werden kann:

$$(\cos. x \pm \sqrt{-1}\ \sin. x)^n$$
$$= (\cos. 2rn\pi \pm \sqrt{-1}\ \sin. 2rn\pi)(\cos. nx \pm \sqrt{-1}\ \sin. nx),$$

oder auch, mit Berücksichtigung der vorigen Gleichung 2), auf folgende Art:

$$5)\ (\cos. x \pm \sqrt{-1}\ \sin. x)^n = (+1)^n\,(\cos. nx \pm \sqrt{-1}\ \sin. nx).$$

Aus diesem Ausdrucke erhält man sofort, wenn $n = \frac{s}{m}$ ist, die m verschiedenen Werthe wieder dadurch, dafs man den Werth $\cos. \frac{s}{m} x \pm \sqrt{-1}\ \sin. \frac{s}{m} x$ mit den m verschiedenen Werthen von $(+1)^{\frac{s}{m}}$ (die aus 2) erhalten werden) der Reihe nach multiplicirt.

Anmerk. Wir werden, um die nöthige Bestimmtheit in die gegenwärtigen Untersuchungen zu bringen, unter der gewöhnlichen Bezeichnung $(1)^{\frac{s}{m}}$ wie bisher die sämmtlichen m Wurzeln von $1^{\frac{s}{m}}$, dagegen unter $\overline{1}^{\frac{s}{m}}$ nur den einen gewöhnlichen oder sogenannten arithmetischen Werth verstehen.

Derselbe Unterschied soll auch zwischen $(a)^n$ und $\overline{a}^n$ (wenn nämlich n ein Bruch ist) $\log. (a)$ und $\log. \overline{a}$ u. s. w. gelten *).

Man erhält also auch die m Wurzeln von $\sqrt[m]{\pm a} = (\pm a)^{\frac{1}{m}}$,

*) *Cauchy* in seinem originellen Werke: *Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique. Paris* 1821. (Deutsche Uebersetzung von *Huzler*. Königsberg 1828.) umgibt durchaus die Gröfse, welche durch eine auszuführende Rechnungsoperation mehrere verschiedene Werthe erhält, mit doppelten Zügen oder Klammern, wenn er unter diesen Werthen unbestimmt irgend einen verstanden wissen will, und behält die gewöhnliche einfache Bezeichnung für den einfachsten unter diesen Werthen bei.

indem man die gewöhnliche oder arithmetische $\overline{a}^{\frac{1}{m}}$ mit den sämmtlichen Wurzeln $(\pm 1)^{\frac{1}{m}}$ der Reihe nach multiplicirt; denn es ist offenbar:

$$\sqrt[m]{\pm a} = (\pm 1 . a)^{\frac{1}{m}} = (\pm 1)^{\frac{1}{m}} \times \overline{a}^{\frac{1}{m}}.$$

Man vergl. auch den Vortrag auf Seite 104.

§. 148.

Setzt man in der Gleichung 5) des vorigen Paragraphes $x = \frac{\pi}{2}$, so erhält man, wegen $cos. \frac{\pi}{2} = 0$ und $sin. \frac{\pi}{2} = 1$:

$$6) \quad (\pm \sqrt{-1})^n = (+1)^n \left(cos. \frac{n\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\ sin. \frac{n\pi}{2} \right).$$

Mit Beziehung auf die Gleichung a) (§. 146.), lassen sich die Formeln 2), 3) und 6) auch so darstellen:

$$7) \quad (+1)^n = e^{\pm 2rn\pi\sqrt{-1}}, \quad (-1)^n = e^{\pm(2r+1)n\pi\sqrt{-1}}$$

$$\text{und} \quad (\pm\sqrt{-1})^n = e^{\pm 2rn\pi\sqrt{-1}} \times e^{\pm\frac{1}{2}n\pi\sqrt{-1}}$$

$$= e^{\pm(2r+\frac{1}{2})n\pi\sqrt{-1}}.$$

Für $n = \sqrt{-1}$ folgt aus der letzten Gleichung:

$$(\pm\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{\mp(2r+\frac{1}{2})\pi}.$$

Nimmt man in den beiden Gleichungen 7) natürliche Logarithmen, so entsteht, da $le = 1$ ist:

$$l(+1) = \pm 2r\pi\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad l(-1) = \pm(2r+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Da aber allgemein (§. 130.) $log. (+1) = Ml(+1)$ und $log (-1) = Ml(-1)$ ist, so folgt, dafs der positiven Einheit unendlich viele Logarithmen (die für $r = 0, 1, 2, \ldots$ erhalten werden) zukommen, von denen jedoch nur ein einziger, nämlich jener für $r = 0$, reell ist; und dafs die unzähligen Logarithmen, die der negativen Einheit entsprechen, sämmtlich imaginär sind (denn auch für $r = 0$ wird $l(-1) = \pm \pi \sqrt{-1}$). Dasselbe gilt überhaupt beziehungsweise für jede positive und negative Zahl; man darf nur berücksichtigen, dafs $log. (+a)$

$= log. (+ 1) a = log. (+ 1) + log. \bar{a}$, und $log. (- a)$ $= log. (- 1) + log. \bar{a}$ ist, wo $log. \bar{a}$ den gewöhnlichen, reellen Logarithmen bezeichnet*).

Anwendung des Vorhergehenden auf die Auflösung der binomischen Gleichungen.

§. 149.

Wir können nun auch die im §. 56 zum Theile behandelten zweigliederigen Gleichungen von der Form $x^n \mp 1 = 0$, auf welche sich, wie wir im angeführten Paragraphe gesehen haben, alle binomischen Gleichungen $y^n = \pm A$ bringen lassen, sehr einfach und für jeden Exponenten n auflösen.

Aus der Gleichung $x^n - 1 = 0$ folgt nämlich $x = (+1)^{\frac{1}{n}}$, also ist, wenn man in der Formel 2), §. 147., statt n $\frac{1}{n}$ setzt:

*) Auf diese Weise hat zuerst *Euler (Mém. de l'Acad. de Berlin,* 1749) bewiesen, daſs die Logarithmen aller negativen Zahlen imaginär sind, und dadurch einen Punct ins Reine gebracht, welcher zwischen *Leibnitz* und *Joh. Bernoulli,* so wie auch zwischen *Euler* und *d'Alembert*, von denen der letztere behauptete, daſs solche Logarithmen möglich, und jenen der positiven Zahlen gleich seyen, einen anhaltenden Streit erregt hatte. Ein Haupt-Argument für diese letztere Behauptung war folgendes:

Es ist $(-a)^2 = a^2$, also $l(-a)^2 = l\,a^2$, daher $2\,l(-a) = 2\,l\,a$ oder $l(-a) = l(+a)$. Allein obgleich die Folgerung $l(-a)^2 = l(+a)^2$ richtig ist, so ist doch die darauf folgende eben so falsch, als wenn man aus $(-a)^2 = (+a)^2$ ohne Einschränkung auf $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{(+a)^2}$, woraus sofort $-a = +a$ folgen würde, schlieſsen wollte. Auch läſst sich dieses aus den zuletzt oben angeführten Gleichungen auf folgende Art nachweisen:

Man hat $l(a) = l\bar{a} \pm 2r\pi\sqrt{-1}$, also $2l(a) = 2l\bar{a} \pm 4r\pi\sqrt{-1}$; ferner $l(-a) = l\bar{a} \pm (2r+1)\pi\sqrt{-1}$, daher $2\,l(-a) = 2\,l\bar{a} \pm 2(2r+1)\pi\sqrt{-1}$. Obschon aber dieser letzte Ausdruck, da $2(2r+1)$ gerade Zahlen bezeichnet, auch in $2\,l\,a \pm 4r\pi = l\,a^2 \pm 4r\pi$, welche Formel alle Logarithmen (mögliche wie unmögliche) von $l\,a^2$ darstellt, enthalten ist, oder davon einen Theil ausmacht; so können dennoch die Ausdrücke $2\,l(+a)$ und $2\,l(-a)$ nicht einander gleich seyn, weil sonst auch die durch $4r$ ausgedrückten geraden Zahlen, jenen durch $2(2r+1)$ dargestellten gleich seyn müſsten, was unmöglich ist. Obschon also $l(-a)^2 = l(+a)^2$ ist, so ist doch keineswegs auch $l(-a) = l(+a)$.

$$\alpha)\quad x = \cos.\frac{2r\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\ \sin.\frac{2r\pi}{n},$$

welche Formel sofort die sämmtlichen n Wurzeln der gegebenen Gleichung enthält und dieselbe liefert, wenn man für r nach und nach die Werthe 0, 1, 2,... bis einschlüssig $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ setzt, je nachdem n gerad oder ungerad ist.

Man sieht, dafs x für ein gerades n zwei reelle Wurzeln $+1$ und -1 erhält, welche aus der Substitution von $r = 0$ und $r = \frac{n}{2}$ hervorgehen; dafs für ein ungerades n x nur eine reelle Wurzel $+1$ erhält, welche aus $r = 0$ entsteht; dafs in beiden Fällen für einen sonstigen beliebigen Werth von r, x im Allgemeinen zwei conjugirte imaginäre Werthe, nämlich $\cos.\frac{2r\pi}{n} + \sqrt{-1}\ \sin.\frac{2r\pi}{n}$ und $\cos.\frac{2r\pi}{n} - \sqrt{-1}\ \sin.\frac{2r\pi}{n}$ erhält*), was mit

*) Es entsprechen also jedem Paare solcher imaginären Wurzeln die zusammengehörigen einfachen Factoren:

$$x - \left(\cos.\frac{2r\pi}{n} + \sqrt{-1}\ \sin.\frac{2r\pi}{n}\right)$$

$$\text{und } x - \left(\cos.\frac{2r\pi}{n} - \sqrt{-1}\ \sin.\frac{2r\pi}{n}\right)$$

welche zusammen multiplicirt den trinomischen oder quadratischen:

$$x^2 - 2\cos.\frac{2r\pi}{n}.x + 1 \text{ geben.}$$

Multiplicirt man das Binom $x^n - 1$ mit a^n, also auch jeden der n einfachen Factoren desselben mit a, oder jeden quadratischen mit a^2; so erhalten die quadratischen Factoren des Binoms $(ax)^n - a^n$, die Form

$$(ax)^2 - 2a\cos.\frac{2r\pi}{n}(ax) + a^2;$$

und daher sind, wenn man $ax = z$ setzt, die quadratischen Factoren des Binoms $i) \ldots z^n - a^n$ von der Form: $k) \ldots z^2 - 2a\cos.\frac{2r\pi}{n}.z + a^2$. Man findet daraus nach und nach alle quadratischen Factoren von $z^n - a^n$, wenn man $r = 1, 2, 3, \ldots$ setzt und mit dieser Substitution so lange fortfährt, als nicht $2r > n$ wird. Für $r = 0$, und wenn n gerade ist, noch für $r = \frac{n}{2}$, sind blofs respective

§. 28. übereinstimmt; und dafs endlich diese beiden Wurzeln zugleich auch reciprok sind, weil

$$\left(\cos.\frac{2r\pi}{n}+\sqrt{-1}\ \sin.\frac{2r\pi}{n}\right)\left(\cos.\frac{2r\pi}{n}-\sqrt{-1}\ \sin.\frac{2r\pi}{n}\right)$$

$$=\cos.^2\frac{2r\pi}{n}+\sin.^2\frac{2r\pi}{n}=1$$

ist, was wieder mit §. 56. im Einklange steht.

Für eine numerische oder Zahlengleichung wird man die irrationalen Werthe von $\cos.\frac{2r\pi}{n}$ und $\sin.\frac{2r\pi}{n}$ aus der Sinustafel herausnehmen, und sofort auch schon die Wurzeln x berechnet haben.

Beispiel 1.

Für $x^4-1=0$ ist $n=4$, also aus α)

$$x=\cos.\frac{r\pi}{2}\pm\sqrt{-1}\ \sin.\frac{r\pi}{2},$$

daraus folgt für

$r=0$: $x=\cos.0\pm\sqrt{-1}\ \sin.0=1$, die erste rat. W.

$r=1$: $x=\cos.\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{-1}\ \sin.\frac{\pi}{2}=\pm\sqrt{-1}$, die beid. imag.

$r=2$: $x=\cos.\pi\pm\sqrt{-1}\ \sin.\pi=-1$, die zweite rat. W.

Die vier Wurzeln der Gleichung $x^4-1=0$ sind demnach:

$$+1,\ -1,\ +\sqrt{-1}\ \text{und}\ -\sqrt{-1}.$$

Beispiel 2.

Für $x^5-1=0$ wird

$$n=5\ \text{und}\ x=\cos.\frac{2r\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\ \sin.\frac{2r\pi}{5},$$

die einfachen Factoren $z-a$ und $z+a$ zu setzen. So hat man z. B.

$$z^4-a^4=(z-a)\left(z^2-2a\cos.\frac{\pi}{2}.z+a^2\right)(z+a)$$

$$=(z^2-a^2)(z^2+a^2)$$

$$z^5-a^5=(z-a)\left(z^2-2a\cos.\frac{2\pi}{5}.z+a^2\right)\times$$

$$\left(z^2-2a\cos.\frac{4\pi}{5}.z+a^2\right).$$

daraus hat man für

$r=0:\ x=\cos.0\pm\sqrt{-1}\ \sin.0=1$

$r=1:\ x=\cos.\frac{2\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin.\frac{2\pi}{5}=\cos.72\pm\sqrt{-1}\ \sin.72$

$=\cdot3090170\pm\cdot9510565\sqrt{-1}\left(=\frac{-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}\right)$

$r=2:\ x=\cos.\frac{4\pi}{5}\pm\sqrt{-1}\sin.\frac{4\pi}{5}=\cos.144\pm\sqrt{-1}\ \sin.144$

$=-\cdot8090170\pm\cdot5877853\sqrt{-1}\left(=\frac{-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}\right)$

Die Wurzeln der Gleichung $x^5-1=0$ sind also:

$1,\ \cdot309\ldots+(\cdot951\ldots)\sqrt{-1},\ \cdot309\ldots-(\cdot951\ldots)\sqrt{-1}$

$-\cdot809\ldots+(\cdot587\ldots)\sqrt{-1}$ und $-\cdot809\ldots-(\cdot587\ldots)\sqrt{-1}$.

Anmerk. Bezeichnet man die erste imaginäre Wurzel der Gleichung a), welche nämlich aus $r=1$ entsteht, d. i. jene $\cos.\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\ \sin.\frac{2\pi}{n}$ mit a; so folgt nach der Gleichung 1), §. 146.:

$$\cos.\frac{2.2\pi}{n}+\sqrt{-1}\ \sin.\frac{2.2\pi}{n}=a^2,\ \cos.\frac{3.2\pi}{n}+\sqrt{-1}\ \sin.\frac{3.2\pi}{n}=a^3$$

u. s. w., so, daſs die Wurzeln, welche aus dem obern Zeichen entstehen, durch a, a^2, a^3, ... $a^{\frac{n}{2}}$ oder $a^{\frac{n-1}{2}}$ dargestellt werden. Da ferner die Wurzeln ans den untern Zeichen, wie wir gesehen haben, die reciproken von den vorigen sind, so werden diese durch $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, ... $\frac{1}{a^{\frac{n}{2}}}$ oder $\frac{1}{a^{\frac{n-1}{2}}}$ (je nachdem n gerad oder ungerad ist), oder wegen $1=a^n$ auch durch a^{n-1}, a^{n-2}, a^{n-3}, ... $a^{\frac{n}{2}}$ oder $a^{\frac{n+1}{2}}$ ausgedrückt. Die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $x^n-1=0$ sind also, für n gerad:

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ \ldots\ a^{\frac{n}{2}},\ a^{\frac{n+2}{2}},\ \ldots\ a^{n-2},\ a^{n-1},$$

und für n ungerade:

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ \ldots\ a^{\frac{n-1}{2}},\ a^{\frac{n+1}{2}},\ \ldots\ a^{n-2},\ a^{n-1}.$$

§. 150.

Aus der Gleichung $x^n + 1 = 0$ folgt $x = (-1)^{\frac{1}{n}}$, und mit Berücksichtigung der Formel 3) (§. 147.), in welcher man statt n $\frac{1}{n}$ setzen wird, auch:

$$\beta)\quad x = cos.\left(\frac{2r+1}{n}\right)\pi \pm \sqrt{-1}\, sin.\left(\frac{2r+1}{n}\right)\pi.$$

Aus dieser Formel werden die n Wurzeln der gegebenen Gleichung erhalten, indem man nach und nach $r = 0, 1, 2, \ldots \frac{n}{2} - 1 = \frac{n-2}{2}$, wenn n gerad ist, und $0, 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}$ setzt, wenn n ungerad ist. Man sieht wieder leicht, dafs im ersten Falle die sämmtlichen Wurzeln imaginär sind, und dafs im zweiten Falle die einzige reelle Wurzel -1 vorhanden ist, welche aus dem letzten Werthe von $r = \frac{n-1}{2}$ entsteht *).

*) Hier erhält man aus dem Producte zweier zusammengehöriger imaginären einfachen Factoren den reellen quadratischen oder trinomischen Factor:

$$x^2 - 2\,cos.\left(\frac{2r+1}{n}\right)\pi . x + 1;$$

und man findet genau so wie im vorigen Falle (§. 149., Note), dafs die quadratischen Factoren des Binoms $i') \ldots z^n + a^n$ von der Form sind:

$$k') \ldots z^2 - 2a\,cos.\left(\frac{2r+1}{n}\right)\pi z + a^2.$$

Um daraus alle quadratischen Factoren zu erhalten, setzt man $r = 0, 1, 2, \ldots \frac{n}{2} - 1$, wenn n gerad, und $0, 1, 2 \ldots \frac{n-1}{2} - 1$, wenn n ungerad ist, und fügt in diesem letztern Falle noch den einfachen Factor $z + a$ bey. So ist z. B.

$$z^4 + a^4 = \left(z^2 - 2a\,cos.\frac{\pi}{4}.z + a^2\right)\left(z^2 - 2a\,cos.\frac{3\pi}{4}.z + a^2\right)$$
$$= (z^2 - az\sqrt{2} + a^2)(z^2 + az\sqrt{2} + a^2)$$

und

$$z^5 + a^5 = \left(z^2 - 2a\,cos.\frac{\pi}{5}.z + a^2\right)\left(z^2 - 2a\,cos.\frac{3\pi}{5}.z + a^2\right)(z + a)$$

Beispiel 1.

Für $x^6 + 1 = 0$ hat man $n = 6$, also

$$x = \cos.\left(\frac{2r+1}{6}\right)\pi \pm \sqrt{-1}\ \sin.\left(\frac{2r+1}{6}\right)\pi,$$

$r = 0$ gibt: $x = \cos.\frac{1}{6}\pi \pm \sqrt{-1}\ \sin.\frac{1}{6}\pi = \cdot 866\ldots$

$$\pm \cdot 5\sqrt{-1}\left(= \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2}\right)$$

$r = 1$ gibt: $x = \cos.\frac{3}{6}\pi \pm \sqrt{-1}\ \sin.\frac{3}{6}\pi = 0 \pm \sqrt{-1}$

$r = 2$ gibt: $x = \cos.\frac{5}{6}\pi \pm \sqrt{-1}\ \sin.\frac{5}{6}\pi = -\cdot 866\ldots$

$$\pm \cdot 5\sqrt{-1}\left(= \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2}\right).$$

Beispiel 2.

Für die Gleichung $x^5 + 1 = 0$ folgt $n = 5$ und $x = \cos.\left(\frac{2r+1}{5}\right)\pi \pm \sqrt{-1}\ \sin.\left(\frac{2r+1}{5}\right)\pi$; daraus ist

für $r = 0$: $x = \cos.\frac{1}{5}\pi \pm \sqrt{-1}\ \sin.\frac{1}{5}\pi = \cdot 809\ldots$

$$\pm(\cdot 587\ldots)\sqrt{-1}\left(= \frac{1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4}\right)$$

für $r = 1$: $x = \cos.\frac{3}{5}\pi \pm \sqrt{-1}\ \sin.\frac{3}{5}\pi = -\cdot 309\ldots$

$$\pm(\cdot 951\ldots)\sqrt{-1}\left(= \frac{1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4}\right)$$

für $r = 2$: $x = \cos.\frac{5}{5}\pi \pm \sqrt{-1}\ \sin.\frac{5}{5}\pi = -1$.

Anmerk. Man findet auf die nämliche Art wie im vorigen Falle, daſs, wenn die erste imaginäre Wurzel der Gleichung $x^n + 1 = 0$, d. i. jene $\cos.\frac{\pi}{n} + \sqrt{-1}\ \sin.\frac{\pi}{n} = a$ gesetzt wird: a, a^3, a^5, ... bis a^n, wenn n ungerad, und a^{n-1}, wenn n gerad ist, alle Wurzeln darstellen, die dem obern Zeichen in der Formel β) entsprechen; und da die aus den untern Zeichen entspringenden Wurzeln wieder die reciproken der erstern sind, so hat man für diese: $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^5}, \ldots \frac{1}{a^n}$, oder $\frac{1}{a^{n-1}}$, oder wegen $1 = -a^n = +a^{2n}$, auch $\frac{a^{2n}}{a} = a^{2n-1}$, a^{2n-3}, a^{2n-5}, ... a^n oder a^{n+1}. Die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $x^n + 1$ sind also

für n ungerad: $a, a^3, a^5, \ldots a^n, a^{n+2}, \ldots a^{2n-3}, a^{2n-1}$

und für n gerad: $a, a^3, a^5, \ldots a^{n-1}, a^{n+1}, \ldots a^{2n-3}, a^{2n-1}$.

Auch läfst sich, wenn n ungerad ist, die Auflösung der Gleichung $x^n + 1 = 0$ auf jene $x^n - 1 = 0$ zurückführen; denn setzt man in der erstern statt x, $-x$, so entsteht $-x^n + 1 = 0$ oder $x^n - 1 = 0$, so, dafs also in diesem Falle die Wurzeln von $x^n + 1 = 0$ jenen von $x^n - 1 = 0$, diese blofs mit entgegengesetzten Zeichen genommen, gleich sind.

Auflösung der trinomischen Gleichungen $x^{2n} + px^n + q = 0$. *Moivre*'scher und *Cotes*'scher Lehrsatz.

§. 151.

Die trinomischen Gleichungen der Form $x^{2n} + px^n + q = 0$, lassen sich immer auf binomische zurückführen. Denn man hat zuerst, wenn man diese Gleichung wie eine quadratische behandelt:

$$s) \quad x^n = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Setzt man also

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = a \text{ und } -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = a',$$

so hat man die beiden Gleichungen:

$$x^n = a \text{ und } x^n = a',$$

deren jede n, also beide zusammen die $2n$ Wurzeln der gegebenen Gleichung liefern. Man hat nämlich, wenn a und a' reelle Gröfsen sind, je nachdem diese positiv oder negativ ausfallen:

$$t) \quad x = \sqrt[n]{a} \cdot (\pm 1)^{\frac{1}{n}} \text{ und } x = \sqrt[n]{a'} \cdot (\pm 1)^{\frac{1}{n}};$$

daraus werden sofort die sämmtlichen Wurzeln erhalten, indem man die arithmetische $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ und $\sqrt[n]{a'} = a'^{\frac{1}{n}}$ mit den n Wurzeln von $+1$ oder von -1, je nachdem das obere oder untere Zeichen gilt, der Reihe nach multiplicirt.

Anmerk. Da die Berechnung der Wurzeln t), auf die Ausziehung der nten Wurzel aus einem surdischen Binom von der Form $a \pm \sqrt{b}$ führt; so wollen wir noch kurz das Nöthigste hierüber anführen.

Man setze allgemein

$$l) \quad \sqrt[n]{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt[n]{z} \cdot (x \pm \sqrt{y}),$$

so entsteht, wenn man diese Gleichung zur n^{ten} Potenz erhebt, und die rationalen, so wie die irrationalen Theile, einem bekannten Satze gemäfs, für sich einander gleich setzt:

$$m)\quad a = z\left[x^n + \binom{n}{2} x^{n-2} y + \binom{n}{4} x^{n-4} y^2 + \cdots\right]$$

$$\text{und } \sqrt{b} = z\left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{3} x^{n-3} y + \cdots\right] \sqrt{y}.$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich aber auch so darstellen:

$$a = \frac{z}{2}\left[(x + \sqrt{y})^n + (x - \sqrt{y})^n\right]$$

$$\sqrt{b} = \frac{z}{2}\left[(x + \sqrt{y})^n - (x - \sqrt{y})^n\right]$$

und daraus folgt, wenn man quadrirt und abzieht:

$$a^2 - b = \frac{z^2}{4}\left[4 (x + \sqrt{y})^n (x - \sqrt{y})^n\right],$$

$$\text{d. i. } a^2 - b = z^2 (x^2 - y)^n,$$

woraus wieder folgt

$$x^2 - y = \frac{1}{z} \sqrt[n]{(a^2 - b)\, z^{n-2}}.$$

Wählt man nun den unbestimmten Factor z dergestalt, dafs $(a^2 - b)\, z^{n-2}$ eine vollständige n^{te} Potenz wird, was immer möglich ist, und setzt

$$\frac{1}{z} \sqrt[n]{(a^2 - b)\, z^{n-2}} = \alpha,$$

so wird $x^2 - y = \alpha$ und $y = x^2 - \alpha$. Wird dieser Werth für y endlich in der obigen Gleichung m) substituirt, so erhält man eine Gleichung in x, welche wenigstens eine rationale Wurzel besitzen mufs.

Beisp. 1. So hat man z. B. für $\sqrt[3]{148 + 46\sqrt{11}}$: $a = 148$, $\sqrt{b} = 46\sqrt{11}$, oder $b = 23276$ und $n = 3$. Es ist demnach $a^2 - b = -1372 = -343 \cdot 4 = -7^3 \cdot 2^2$, daher $(a^2 - b)\, z^{n-2} = -7^3 \cdot 2^2 z$, und es ist leicht zu sehen, dafs dieses Product ein vollständiger Cubus, für $z = 2$ wird. Mit diesem Werthe ist aber ferner $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt[3]{-7^3 \cdot 2^3} = -7$; mithin auch $y = x^2 - \alpha = x^2 + 7$. Dieser Werth in der betreffenden Gleichung m): $a = z(x^3 + 3xy)$ substituirt, gibt

$$148 = 2x^3 + 6x^3 + 42x \text{ oder } 4x^3 + 21x - 74 = 0.$$

Da endlich diese letzte Gleichung die reelle Wurzel $x = 2$ besitzt, so hat man nach der Gleichung l):

$$\sqrt[3]{148 + 46\sqrt{11}} = (2 + \sqrt{11})\sqrt[3]{2}.$$

Beisp. 2. Für die Wurzel $\sqrt[4]{-7+24\sqrt{-1}}$ wird $n=4$, $a=-7$, $b=-576$, also $a^2-b=625=5^4$, so, daſs es hier hinreicht, $z=1$ zu setzen, um $\alpha=\sqrt[4]{5^4.1}=5$, rational zu haben. Mit diesem Werthe ist $y=x^2-\alpha=x^2-5$, und wenn dieser Ausdruck in der Gleichung (m) $a=z(x^4+6x^2y+y^2)$ substituirt wird, so erhält man $-7=8x^4-40x^2+25$ oder

$$x^4-5x^2+4=0,$$

welche Gleichung die reellen Wurzeln ± 1 und ± 2 besitzt. Man hat sofort, wenn man alle vier Wurzeln benützt:

$$\sqrt[4]{-7+24\sqrt{-1}}=\pm(-1+2\sqrt{-1}) \text{ und auch} =\pm(2+\sqrt{-1}).$$

Beisp. 3. Eben so findet man auch

$$\sqrt[5]{228+132\sqrt{3}}=(1+\sqrt{3})\sqrt[5]{3}.$$

§. 152.

Eine besondere Untersuchung verdienet der Fall, in welchem x^n aus der obigen Gleichung s) des vorigen Paragraphes imaginär ausfällt, in welchem nämlich $q>\frac{1}{4}p^2$ ist. In diesem Falle hat man aus dieser Gleichung:

$$x^n=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{-1}\sqrt{q-\tfrac{1}{4}p^2}.$$

1. Ist p negativ, so erhält man

$$x^n=\tfrac{1}{2}p\left[1\pm\sqrt{-1}.\frac{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}}{\frac{1}{2}p}\right],$$

oder, wenn man

$$c)\quad \frac{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}}{\frac{1}{2}p}=tang\ \varphi \text{ setzt,}$$

wo also $\varphi=arc.\ tang.\frac{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}}{\frac{1}{2}p}$ einen Hilfswinkel bezeichnet, auch: $x^n=\frac{1}{2}p\,(1\pm\sqrt{-1}\ tang.\varphi)$, oder da aus der vorigen Gleichung c), $\frac{1}{2}p=cos.\varphi\sqrt{q}\ldots d)$ folgt, und wenn man zur gröſsern Einfachheit $\sqrt{q}=a^n\ldots e)$ setzt, endlich:

$$x^n=a^n(cos.\varphi\pm\sqrt{-1}\ sin.\varphi).$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, mit Rücksicht der frühern Ausdrücke, ganz einfach:

$$x = a\left(\cos.\frac{\varphi}{n} \pm \sqrt{-1}\ \sin.\frac{\varphi}{n}\right)(+1)^{\frac{1}{n}}$$

und wenn man für $(+1)^{\frac{1}{n}}$ den Werth aus 2), §. 147., substituirt:

$$x = a\left(\cos.\frac{\varphi}{n} \pm \sqrt{-1}\ \sin.\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos.\frac{2r\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\ \sin.\frac{2r\pi}{n}\right),$$

so daſs endlich, wenn noch die Gleichung b), §. 146., berücksichtiget wird, in diesem hier angenommenen Falle, in welchem sofort nach d) und e), $p = 2a^n \cos.\varphi$ folgt, die Wurzeln der Gleichung

$$x^{2n} - px^n + q = x^{2n} - 2a^n x^n \cos.\varphi + a^{2n} = 0$$

in dem Ausdrucke

$$x = a\left(\cos.\frac{\varphi \pm 2r\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\ \sin.\frac{\varphi \pm 2r\pi}{n}\right)$$

begriffen sind.

Sucht man (auf dieselbe Art, wie im §. 149., Note) aus zwei zusammengehörigen einfachen imaginären Factoren den quadratischen, so findet man, daſs sich das Trinom

$$A) \ldots x^{2n} - 2a^n x^n \cos.\varphi + a^{2n}$$

in lauter reelle quadratische Factoren von der Form

$$a') \ldots x^2 - 2ax\ \cos.\frac{\varphi \pm 2r\pi}{n} + a^2$$

zerlegen läſst.

2. Ist p positiv, so hat man eben so für

$$\varphi = arc.\ tang.\frac{\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}}{-\frac{1}{2}p}:\ x^n = -a^n(\cos.\varphi \pm \sqrt{-1}\ \sin.\varphi),$$

und daraus

$$x = a\left(\cos.\frac{\varphi}{n} \pm \sqrt{-1}\ \sin.\frac{\varphi}{n}\right)(-1)^{\frac{1}{n}},$$

oder vermöge der Gleichung 3), §. 147.:

$$x = a\left(\cos.\frac{\varphi}{n} \pm \sqrt{-1}\ \sin.\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos.\frac{2r+1}{n}\pi \pm \sqrt{-1}\ \sin\frac{2r+1}{n}\pi\right)$$

so, daſs man wieder mit Berücksichtigung der Gleichung b), §. 146., für die Wurzeln der Gleichung

$$x^{2n} + px^n + q = x^{2n} + 2a^n x^n \cos.\varphi + a^{2n} = 0$$

den Ausdruck erhält:

$$x = a\left(\cos.\frac{\varphi + (2r+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin.\frac{\varphi + (2r+1)\pi}{n}\right).$$

Daraus findet man nun, wie im vorigen Falle, daſs das Trinom

$$B) \ldots x^{2n} + 2a^n x^n \cos.\varphi + a^{2n}$$

immer in reelle quadratische Factoren, von der Form

$$b') \ldots x^2 - 2ax\cos.\frac{\varphi \pm (2r+1)\pi}{n} + a^2$$

zerlegt werden kann.

In beiden Fällen werden diese n verschiedenen reellen Factoren aus a') und b') durch das schon mehrmal angegebene Verfahren (indem $r = 0, 1, 2, \ldots$ gesetzt wird) erhalten.

Da der Ausdruck $x^2 - 2ax\cos.\alpha + a^2$ das Quadrat der dritten Seite eines Dreieckes bezeichnet, dessen beide übrige Seiten a und x den Winkel α einschlieſsen (Trigonom. S. 91); so lassen sich in beiden Fällen 1. und 2. für jeden reellen Werth von x die sämmtlichen aus a') und b') (für $r = 0, 1, 2, \ldots$) entspringenden n quadratischen Factoren construiren, indem man aus dem einen Endpunct der für x angenommenen Geraden, mit dem Halbmesser a einen Kreis beschreibt, von diesem Puncte aus die Halbmesser a gegen die Gerade x unter den verschiedenen Winkeln $\left(\frac{\varphi}{n}, \frac{(\varphi \pm 2\pi)}{n}, \ldots\right.$ im ersten und $\frac{\varphi \pm \pi}{n}, \frac{\varphi \pm 3\pi}{n}, \ldots$ im zweiten Falle$\left.\right)$ zieht, wodurch, wie man leicht sieht, der Umfang des Kreises in n gleiche Theile getheilt wird *), und

*) Der erste Punct der Peripherie, von welchem aus der Umfang des Kreises in die n gleichen Theile getheilt wird, steht von dem Endpunct des mit der Geraden x zusammenfallenden Durchmessers im ersten Falle um den Bogen $\frac{\varphi}{n}$ (correspond. Werth von $r = 0$ in $\frac{\varphi \pm 2r\pi}{n}$) und im zweiten Falle um jenen $\frac{\varphi \pm \pi}{n}$ (corresp. W. von $r = 0$ in $\frac{\varphi \pm (2r+1)\pi}{n}$) ab. Die an diese Theilungspuncte gezogenen Halbmesser bilden mit dem genannten Durchmesser offenbar im ersten

diese Theilungspuncte, als Scheiteln der genannten Dreiecke, mit dem zweiten Endpuncte der Geraden x verbindet. Diefs vorausgesetzt ist also, wenn man beide Fälle zusammenzieht, das Product der Quadrate dieser n Verbindungslinien gleich dem numerischen Werthe des Trinoms:

$$x^{2n} \pm 2\,a^n x^n \cos.\varphi + a^{2n};$$

und dieses ist das *Moivre*'sche Theorem.

Für den besondern Fall von $\varphi = 0$ ist das Product dieser Verbindungslinien selbst dem Binome $x^n \pm a^n$ gleich, welches sofort mit der Quadratwurzel des betreffenden Trinoms

$$x^{2n} \pm 2\,a^n x^n + a^{2n}$$

zusammenfällt*). In dieser Beschränkung wurde der obige Satz zuerst von dem ausgezeichneten englischen Mathematiker *Cotes* (*Roger C.*, geb. zu Burboge in der Herrschaft Leicester 1682; gest. zu Rochester 1716) aufgestellt, und später, wie man sieht, von *Moivre* blofs erweitert.

Falle die Winkel $\frac{\varphi}{n}$, $\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)$, $\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2.2\pi}{n}\right)$, ... und im zweiten jene: $\frac{\varphi+\pi}{n}$, $\left(\frac{\varphi+\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)$, $\left(\frac{\varphi+\pi}{n}+\frac{2.2\pi}{n}\right)$, ... die, wie man sieht, in der That auch den Werthen von $r = 0, 1, 2, \ldots$ in den betreffenden allgemeinen Ausdrükken entsprechen.

*) In diesem besonderen Falle trifft also der erste Theilungspunct mit dem Endpunct des vorhin genannten Durchmessers zusammen. Theilt man von diesem Puncte aus die Peripherie des Kreises sogleich in $2n$ gleiche Theile, und verbindet diese Puncte mit dem erwähnten zweiten Endpuncte von x; so ist das Product aus den n Verbindungslinien, welche zu den geraden Theilungspuncten gezogen sind, gleich $x^n - a^n$ (oder $a^n - x^n$, je nachdem dieser Endpunct innerhalb oder aufserhalb des Kreises liegt), so wie jenes aus den durch die ungeraden Theilungspuncte gehenden Geraden gleich $x^n + a^n$.

Zehntes Capitel.

Entwickelung der Sinus und Cosinus der vielfachen, und der Potenzen von Sinus und Cosinus der einfachen Bogen.

§. 153.

Nach der Gleichung 1), §. 146., ist

$$\cos. n(x \pm 2r\pi) + \sqrt{-1}\,\sin. n(x \pm 2r\pi)$$
$$= (\cos. x + \sqrt{-1}\,\sin. x)^n.$$

Entwickelt man den zweiten Theil der Gleichung nach dem binomischen Lehrsatze und nimmt sogleich die reellen wie auch die imaginären Glieder für sich zusammen, so erhält man:

$$\cos. n(x \pm 2r\pi) + \sqrt{-1}\,\sin. n(x \pm 2r\pi)$$
$$= \cos.^n x - \binom{n}{2}\cos.^{n-2} x \sin.^2 x + \binom{n}{4}\cos.^{n-4} x \sin.^4 x - \ldots$$
$$+ \sqrt{-1}\left[\binom{n}{1}\cos.^{n-1} x \sin. x - \binom{n}{3}\cos.^{n-3} x \sin.^3 x + \ldots\right]$$
$$= \cos.^n x\left[1 - \binom{n}{2}\,tang.^2 x + \binom{n}{4}\,tang.^4 x - \ldots\right]$$
$$+ \sqrt{-1}\,\cos.^n x\left[\binom{n}{1}\,tang. x - \binom{n}{3}\,tang.^3 x + \ldots\right],$$

oder, wenn man berücksichtiget, dafs, im Falle n gebrochen ist, die sämmtlichen Werthe von $\cos.^n x$ erhalten werden, wenn man (§. 147.) den einen arithmetischen Werth mit allen Wurzeln von $(+1)^n$ multiplicirt; so erhält man auch, wenn unter $\cos.^n x$ dieser arithmetische Werth verstanden wird:

$$1)\quad \cos. n(x \pm 2r\pi) + \sqrt{-1}\,\sin. n(x \pm 2r\pi)$$
$$= (+1)^n \cos.^n x\left[1 - \binom{n}{2}\,tang^2 x + \binom{n}{4}\,tang.^4 x - \ldots\right]$$
$$+ \sqrt{-1}\,(+1)^n \cos.^n x\left[\binom{n}{1}\,tang. x - \binom{n}{3}\,tang.^3 x + \ldots\right]$$
$$\left\{\text{von}\quad x = -\frac{\pi}{4}\quad\text{bis}\quad x = +\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Es convergiren nämlich, wie die Vergleichung mit §. 125., Beisp. 10. zeigt, diese Reihen nur für Werthe von $tang.\, x < 1$, also innerhalb der Grenzen von $x = -\frac{\pi}{4}$ und $x = +\frac{\pi}{4}$; zugleich dürfen diese Grenzwerthe selbst noch genommen werden, wenn n positiv ist.

Wendet man demnach diese Reihen nur innerhalb der Grenzen ihrer Convergenz an, so ist $cos.\, x$ immer positiv, und es gibt daher für jeden reellen Werth von n wenigstens einen möglichen Werth von $cos.^n x$.

§. 154.

a) Ist n eine ganze positive oder negative Zahl, so hat $(+1)^n\, cos.^n x$ nur einen einzigen, und zwar reellen Werth; es ist demnach im zweiten Theile der vorigen Gleichung 1) der eine Theil reell, und der andere imaginär, und es zerfällt diese nach dem Satze, nach welchem das Reelle dem Reellen, und das Imaginäre dem Imaginären gleich seyn mufs, in die beiden folgenden:

$$2)\quad cos.\, nx = cos.^n x \left[1 - \binom{n}{2} tang.^2 x + \binom{n}{4} tang.^4 x - \ldots\right]$$

$$= cos.^n x - \binom{n}{2} cos.^{n-2} x\, sin.^2 x + \binom{n}{4} cos.^{n-4} x\, sin.^4 x - \ldots$$

und

$$3)\quad sin.\, nx = cos.^n x \left[\binom{n}{1} tang.\, x - \binom{n}{3} tang.^3 x + \ldots\right]$$

$$= \binom{n}{1} cos.^{n-1} x\, sin.\, x - \binom{n}{3} cos.^{n-3} x\, sin.^3 x + \ldots,$$

wenn man nämlich in der zweiten Gleichung durch $\sqrt{-1}$ abkürzt und noch bemerkt, dafs sowohl $cos.\, n\,(x \pm 2\, r\pi)$, als auch $sin.\, n\,(x \pm 2r\pi)$ in diesem Falle nur einen Werth gibt.

Für den besondern Fall, dafs auch noch n positiv ist, brechen diese beiden Reihen 2) und 3) ab, und sind daher nicht an die Bedingung der Convergenz gebunden; es kann also dabei x was immer für Werthe erhalten. Uebrigens läfst sich der andere Fall, in welchem nämlich n negativ ist, immer auf den ersten zurückführen; man darf

nur berücksichtigen, daſs $\cos. -n = \cos. +n$ und $\sin. -n = -\sin. +n$ ist.

b) Ist n gebrochen und z. B. gleich $\frac{s}{m}$, so hat $(+1)^n = (+1)^{\frac{s}{m}}$ (§. 147.) m verschiedene Werthe, von denen nur einer, wenn m ungerad, und nur zwei, wenn m gerad ist, reell, alle übrigen aber imaginär sind. Man kann also offenbar in diesem Falle die obige Gleichung 1) nicht mehr für alle Werthe von $\cos. \frac{s}{m}(x \pm 2r\pi)$ und $\sin. \frac{s}{m}(x \pm 2r\pi)$, sondern nur für jene Werthe von r, für welche $(+1)^{\frac{s}{m}}$ mögliche Werthe erhält, d. i. (§. 149.) für $r=0$, wenn m ungerad, und $r=0$ und $r=\frac{m}{2}$, wenn m gerad ist, auf die vorige Weise trennen; denn für alle übrigen Werthe von r erhalten die beiden Glieder im zweiten Theile der Gleichung 1) ganz andere Werthe, und werden jedes zum Theil reell, zum Theil imaginär.

Setzt man nämlich für $(+1)^{\frac{s}{m}}$ den aus 2), §. 147. folgenden Werth: $\cos. \frac{2rs}{m}\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin. \frac{2rs}{m}\pi$, so verwandelt sich die obige Formel 1) für diesen Fall, wenn man der Kürze wegen noch n für $\frac{s}{m}$ stehen läſst, in die folgende:

$$\cos. n(x \pm 2r\pi) \pm \sqrt{-1}\,\sin. n(x \pm 2r\pi) =$$
$$\cos. 2rn\pi . \cos.^n x \left[1 - \binom{n}{2}\tan g.^2 x + \ldots\right]$$
$$\mp \sin. 2rn\pi . \cos.^n x \left[\binom{n}{1}\tan g. x - \binom{n}{3}\tan g.^3 x + \ldots\right]$$
$$\pm \sqrt{-1}\,\sin. 2rn\pi . \cos.^n x \left[1 - \binom{n}{2}\tan g.^2 x + \ldots\right]$$
$$+ \sqrt{-1}\,\cos. 2rn\pi . \cos.^n x \left[\binom{n}{1}\tan g. x - \binom{n}{3}\tan g.^3 x + \ldots\right]$$

und man erhält daraus durch die gehörige Gleichsetzung der reellen, so wie auch der imaginären Theile, die beiden Formeln:

$$4)\quad \cos. n\,(x \pm 2r\pi) =$$

$$\cos.^n x \Big\{ \cos. 2rn\pi \left[1 - \binom{n}{2} \mathrm{tang.}^2 x + \ldots\right]$$

$$\mp \sin. 2rn\pi \left[\binom{n}{1} \mathrm{tang.}\, x - \binom{n}{3} \mathrm{tang.}^3 x + \ldots\right]\Big\}$$

$$= \cos. 2rn\pi \left[\cos.^n x - \binom{n}{2} \cos.^{n-2} x \sin.^2 x + \ldots\right]$$

$$\mp \sin. 2rn\pi \left[\binom{n}{1} \cos.^{n-1} x \sin. x - \binom{n}{3} \cos.^{n-3} x \sin.^3 x + \ldots\right]$$

und

$$5)\quad \sin. n\,(x \pm 2r\pi) =$$

$$\pm \cos.^n x \Big\{ \sin. 2rn\pi \left[1 - \binom{n}{2} \mathrm{tang.}^2 x + \ldots\right]$$

$$\pm \cos. 2rn\pi \left[\binom{n}{1} \mathrm{tang.}\, x - \binom{n}{3} \mathrm{tang.}^3 x + \ldots\right]\Big\}$$

$$= \pm \sin. 2rn\pi \left[\cos.^n x - \binom{n}{2} \cos.^{n-2} x \sin.^2 x + \ldots\right]$$

$$+ \cos. 2rn\pi \left[\binom{n}{1} \cos.^{n-1} x \sin. x - \binom{n}{3} \cos.^{n-3} x \sin.^3 x + \ldots\right].$$

Für $r = 0$, und wenn m gerad ist, noch für $r = \frac{m}{2}$, gehen diese beiden Formeln 4) und 5), wegen (beziehungsweise) $\cos. \frac{2rs}{m}\pi = \pm 1$ und $\sin. \frac{2rs}{m}\pi = 0$, wie es seyn soll, in die obigen 2) und 3) über.

Wollte man von den doppelten Zeichen nur das eine beibehalten, so müſste man r auch negative Zahlen bedeuten lassen und berücksichtigen, daſs $\cos. -\alpha = \cos. \alpha$ und $\sin. -\alpha = -\sin. \alpha$ ist.

Da endlich diese von 2) bis 5) entwickelten Formeln ebenfalls nur innerhalb der Grenzen von $x = -\frac{\pi}{4}$ bis $x = +\frac{\pi}{4}$, den Fall ausgenommen, in welchem n eine ganze positive Zahl ist, verläſsliche Resultate geben; so wird man für auſserhalb dieser Grenzen liegende Werthe von x, $x = y + k.\frac{\pi}{4}$ setzen, und dann, was immer möglich ist, für k eine ganze Zahl von solcher Beschaffenheit wählen, daſs dadurch der Bogen $y = x - k.\frac{\pi}{4}$ in diese ge-

nannten Grenzen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ fällt. Wäre z. B. $x = 125^\circ$, so würde für $k = 2$, $y = 125 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 125 - 90 = 35^\circ$; welcher Bogen offenbar zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ liegt. Da ferner

$$\cos. nx = \cos.\left(ny + \frac{kn}{4}\pi\right)$$

$$= \cos. ny \cos. \frac{kn}{4}\pi - \sin. ny \sin. \frac{kn}{4}\pi$$

und $\sin. nx = \sin. ny \cos. \frac{kn}{4}\pi + \cos. ny \sin. \frac{kn}{4}\pi$

ist; so wird man aus diesen Ausdrücken, nachdem $\cos. ny$ und $\sin. ny$ nach den obigen Formeln gefunden worden, $\cos. nx$ und $\sin. nx$ bestimmen können.

§. 155.

Die Formeln 2) und 3) des nächst vorhergehenden Paragraphes, welche für jeden ganzen Werth von n, der auch den gemachten Bemerkungen gemäſs, noch überdieſs immer positiv angenommen werden kann, gelten; lassen sich unter einigen Beschränkungen auch so darstellen, daſs entweder bloſs die Sinus, oder bloſs die Cosinus darin vorkommen. Dazu wird man am einfachsten folgenden Weg einschlagen.

1. Nach der Gleichung 2), §. 142., ist

$$2 \cos. x = e^{x\sqrt{-1}} + \frac{1}{e^{x\sqrt{-1}}} \ldots (\alpha$$

oder, wenn man $e^{x\sqrt{-1}} = z$ setzt:

$$2 \cos. x = z + \frac{1}{z} \ldots (\beta$$

Eben so ist, wenn man in α) statt x, nx schreibt:

$$2 \cos. nx = e^{nx\sqrt{-1}} + \frac{1}{e^{nx\sqrt{-1}}},$$

oder, wegen $e^{nx\sqrt{-1}} = (e^{x\sqrt{-1}})^n = z^n$, auch

$$2 \cos. nx = z^n + \frac{1}{z^n} \ldots \gamma)$$

Setzt man jetzt in der Formel III., §. 15., $a = z$,

$b = \frac{1}{z}$, wodurch $y = a + b = z + \frac{1}{z} = 2\cos. x$ (nach β)) und $ab = 1$ wird; so erhält man daraus $z^n + \frac{1}{z^n}$, d. i. (γ)):

$$1)\quad 2\cos. nx = (2\cos. x)^n - n(2\cos. x)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}(2\cos. x)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(2\cos. x)^{n-6} + \ldots,$$

wobei man, wie schon a. a. O. bemerkt wurde, für solche Werthe von n (nämlich für $n = 1$ und 2), für welche die Reihe nicht von selbst abbricht, so viele Glieder der Reihe nimmt, als es, ohne negative Exponenten von $2\cos. x$ zu erhalten, möglich ist.

2. Nach der Gleichung 1) des erwähnten §. 142. ist eben so:

$$2\sqrt{-1}\, \sin. x = z - \frac{1}{z} \quad \text{und} \quad 2\sqrt{-1}\, \sin. nx = z^n - \frac{1}{z^n}.$$

Setzt man also in der vorhin angezogenen Formel III., §. 15., $a = z$ und $b = -\frac{1}{z}$, wodurch $y = a + b = z - \frac{1}{z} = 2\sqrt{-1}\, \sin. x$ und $ab = -1$ wird; so erhält man, da n gerad oder ungerad seyn kann:

$$z^n \pm \frac{1}{z^n} = (\sqrt{-1})^n (2\sin. x)^n + n(\sqrt{-1})^{n-2}(2\sin. x)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}(\sqrt{-1})^{n-4}(2\sin. x)^{n-4} + \ldots,$$

wobei von den doppelten Zeichen das obere oder untere gilt, je nachdem n gerad oder ungerad ist. Daraus erhält man, wenn n gerad ist, weil bei dieser Annahme lauter gerade Potenzen von $\sqrt{-1}$ vorkommen (γ)):

$$2)\quad 2\cos. nx = \pm\Big[(2\sin. x)^n - n(2\sin. x)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}(2\sin. x)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(2\sin. x)^{n-6} + \ldots\Big];$$

dabei gilt von den doppelten Zeichen + oder —, je nachdem n die Form $4m$ oder $2m$ hat.

Ist dagegen n ungerad, so erhält man, wenn sogleich, da nun lauter ungerade Potenzen von $\sqrt{-1}$ vorkommen $\left(\text{und } z^n - \frac{1}{z^n} = 2\sqrt{-1}\, \sin. nx \text{ ist}\right)$, durchaus durch $\sqrt{-1}$

abgekürzt wird:

3) $$2\, sin.\, nx = \pm \left[(2\, sin.\, x)^n - n\,(2\, sin.\, x)^{n-2} + \frac{n\,(n-3)}{1\,.\,2}\,(2\, sin.\, x)^{n-4} - \ldots \right];$$

dabei gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem n die Form $4m+1$ oder $2m+1$ hat *).

*) Unter der Voraussetzung, dafs n eine ganze Zahl bezeichnet, lassen sich $cos\; nx$ und $sin.\; nx$ auch nach steigenden Potenzen von $sin.\, x$ und $cos.\, x$ entwickeln. Man findet nämlich (m. s. z. B. *Cauchy Cours d'Analyse, Chap. VII.*, §. 5.) für n gerad:

$$cos.\, nx = (-1)^{\frac{n}{2}} \left[1 - \frac{m^2}{2} cos.^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{2\,.\,3\,.\,4} cos.^4 x - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} cos.^6 x + \ldots \right];$$

$$sin.\, nx = (-1)^{\frac{n}{2}+1}\, sin.\, x \left[m\, cos.\, x - \frac{m\,(m^2-4)}{2\,.\,3} cos.^3 x + \frac{m\,(m^2-4)(m^2-16)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} cos.^5 x - \ldots \right];$$

für n ungerad:

$$cos.\, nx = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[m\, cos.\, x - \frac{m\,(m^2-1)}{2\,.\,3} cos.^3 x + \frac{m\,(m^2-1)(m^2-9)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} cos.^5 x - \ldots \right];$$

$$sin.\, nx = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, sin.\, x \left[1 - \frac{(m^2-1)}{2} cos.^2 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2\,.\,3\,.\,4} cos.^4 x - \ldots \right].$$

Setzt man in diesen Formeln statt x, $\frac{\pi}{2} - x$, und berücksichtiget, dafs für ein gerades n

$$cos.\left(\frac{n\pi}{2} - nx\right) = (-1)^{\frac{n}{2}}\, cos.\, nx;$$

$$sin.\left(\frac{n\pi}{2} - nx\right) = (-1)^{\frac{n}{2}+1}\, sin.\, nx;$$

und für ein ungerades n

$$cos.\left(\frac{n\pi}{2} - nx\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, sin.\, nx \quad \text{und}$$

Anmerk. Im Falle man die *Moivre*'sche Formel auf dem durch die Gleichung *b*), §. 146. angedeuteten Wege, nämlich durch die Multiplication und Induction, für jeden ganzen positiven Werth von n gefunden hat; kann man dann die daraus hergeleiteten Formeln 2) und 3) des §. 154. zur Entwickelung der Reihen für $sin.y$ und $cos.y$ nach *Euler* auf folgende Weise benützen.

Setzt man in diesen genannten Reihen 2) und 3) $nx = y$, also $n = \frac{y}{x}$, so entsteht:

$$cos.y = cos.^n x - \frac{y(y-x)}{1.2.x^2} cos.^{n-2} x \, sin.^2 x + \frac{y(y-x)(y-2x)(y-3x)}{1.2.3.4.x^4} cos.^{n-4} x \, sin.^4 x - \ldots,$$

$$sin.y = \frac{y}{x} cos.^{n-1} x \, sin.x - \frac{y(y-x)(y-2x)}{1.2.3.x^3} cos.^{n-3} x \, sin.^3 x + \ldots$$

Nimmt man jetzt x unendlich klein an, wodurch $cos.x = 1$ und $sin.x = x$ wird, so erhält man, gemäfs den Sätzen des §. 19., da y eine endliche Gröfse seyn soll, die bekannten Reihen:

$$cos.y = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

$$sin.y = y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

Potenzen der Sinus und Cosinus.

§. 156.

1. Aus der im vorigen Paragraphe angeführten Gleichung *a*) folgt auch

$$sin.\left(\frac{n\pi}{2} - nx\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} cos.nx$$

ist, so erhält man $cos.nx$ und $sin.nx$ nach steigenden Potenzen von $sin.x$ ausgedrückt.

Wie man diese und die übrigen Formeln, mit Beibehaltung des Factors $cos.x$ in der Formel von $sin.nx$, und des Factors $sin.x$ in jener für $cos.nx$, durch Induction ableiten kann, findet man sehr vollständig in *Lagrange's* Vorlesungen über die Functionslehre in der X. Vorles., und zum Theile auch in des Verfassers Handbuch der Trigonometrie.

$$2\cos.x = \frac{1 + e^{2x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}},$$

und wenn man diese Gleichung zur n^{ten} Potenz erhebt, wo n jeden Werth haben kann:

$$2^n \cos.^n x = \frac{1 + \binom{n}{1} e^{2x\sqrt{-1}} + \binom{n}{2} e^{4x\sqrt{-1}} + \binom{n}{3} e^{6x\sqrt{-1}} + \ldots}{e^{nx\sqrt{-1}}}$$

oder wenn man wirklich dividirt:

$$2^n \cos.^n x = e^{-nx\sqrt{-1}} + \binom{n}{1} e^{-(n-2)x\sqrt{-1}}$$
$$+ \binom{n}{2} e^{-(n-4)x\sqrt{-1}} + \binom{n}{3} e^{-(n-6)x\sqrt{-1}} + \ldots$$

Da nun aber nach der Formel a), §. 146.,

$$e^{-nx\sqrt{-1}} = \cos.nx - \sqrt{-1}\,\sin.nx,$$

also auch allgemein

$$h) \ldots e^{-(n-\alpha)x\sqrt{-1}} = \cos.(n-\alpha)x - \sqrt{-1}\,\sin.(n-\alpha)x$$

folgt; so hat man auch:

$$2^n \cos.^n x = \cos.nx + \binom{n}{1}\cos.(n-2)x + \binom{n}{2}\cos.(n-4)x + \ldots$$
$$-\sqrt{-1}\left[\sin.nx + \binom{n}{1}\sin.(n-2)x + \binom{n}{2}\sin.(n-4)x + \ldots\right].$$

Wegen $\cos.-x = \cos.x$ erhält man aus dieser Formel noch einen Ausdruck für $2^n \cos.^n x$, indem man statt x, $-x$ schreibt; dadurch ändert sich aber, wie man leicht sieht, nichts, als das Zeichen des imaginären Theiles, so, daſs also beide Zeichen gelten und man sofort allgemein hat:

$$(1)\quad 2^n\cos.^n x = \cos.nx + \binom{n}{1}\cos.(n-2)x + \binom{n}{2}\cos.(n-4)x + \ldots$$
$$\pm\sqrt{-1}\left[\sin.nx + \binom{n}{1}\sin.(n-2)x + \binom{n}{2}\sin.(n-4)x + \ldots\right].$$

2. Eben so findet man, wegen

$$2\sqrt{-1}\,\sin.x = e^{x\sqrt{-1}} - \frac{1}{e^{x\sqrt{-1}}} = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{x\sqrt{-1}}} \text{ (Gl. 1), §. 142.)}:$$

$$(2\sqrt{-1})^n \sin.^n x = \left[\frac{-1 + e^{2x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}}\right]^n$$

$$= \frac{(-1)^n\left[1 - \binom{n}{1}e^{2x\sqrt{-1}} + \binom{n}{2}e^{4x\sqrt{-1}} - \binom{n}{3}e^{6x\sqrt{-1}} + \ldots\right]}{e^{nx\sqrt{-1}}}$$

oder auch:

$$(2\sqrt{-1})^n \sin.^n x = (-1)^n \Big[e^{-nx\sqrt{-1}} - \binom{n}{1} e^{-(n-2)x\sqrt{-1}} + \binom{n}{2} e^{-(n-4)x\sqrt{-1}} - \binom{n}{3} e^{-(n-6)x\sqrt{-1}} + \ldots \Big]$$

$$= (-1)^n \Big[(\cos. nx - \sqrt{-1}\, \sin. nx) - \binom{n}{1} [\cos.(n-2)x - \sqrt{-1}\, \sin.(n-2)x] + \ldots \Big],$$

mit Berücksichtigung nämlich der vorigen Gleichung *h*).

Aus dieser letzten Entwickelung folgt für n gerad:

$$(2)\quad 2^n \sin.^n x = \pm \Big[\cos. nx - \binom{n}{1} \cos.(n-2)x + \binom{n}{2} \cos.(n-4)x - \binom{n}{3} \cos.(n-6)x + \ldots \Big]$$
$$\mp \sqrt{-1} \Big[\sin. nx - \binom{n}{1} \sin.(n-2)x + \binom{n}{2} \sin.(n-4)x - \binom{n}{3} \sin.(n-6)x + \ldots \Big];$$

dabei gilt von den doppelten Zeichen das obere oder untere, je nachdem n von der Form $4m$ oder $2m$ ist.

Für n ungerad hat man, wenn sogleich beide Theile der Gleichung mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt werden:

$$(3)\quad 2^n \sin.^n x = \pm \Big[\sin. nx - \binom{n}{1} \sin.(n-2)x + \binom{n}{2} \sin.(n-4)x - \ldots \Big]$$
$$\pm \sqrt{-1} \Big[\cos. nx - \binom{n}{1} \cos.(n-2)x + \binom{n}{2} \cos.(n-4)x - \ldots \Big];$$

hier gelten die obern oder untern Zeichen, je nachdem n die Form $4m+1$ oder $2m+1$ hat.

Es läſst sich auch noch eine Formel für $\sin.^n x$ aus jener (1) ableiten, wenn man in dieser statt x, $\frac{\pi}{2} - x$ setzt; man hat dadurch

$$(4)\quad 2^n \sin.^n x = \cos. n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \binom{n}{1} \cos.(n-2)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \ldots$$
$$\pm \sqrt{-1} \Big[\sin. n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \binom{n}{1} \sin.(n-2)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \ldots \Big].$$

§. 157.

In Bezug auf die im vorigen Paragraphe entwickelten Formeln (1) — (4) mufs wieder bemerkt werden, dafs, wenn n keine ganze Zahl, sondern ein Bruch vom Nenner m ist, $\cos.^n x$ in (1), und $\sin.^n x$ in (2), (3), (4) m verschiedene Werthe bekommen müsse; man erhält dieselben, indem man in allen diesen Formeln (wie in §. 146.) statt x, $x \pm 2r\pi$ schreibt, wodurch $\cos.^n x$ und $\sin.^n x$ nicht geändert werden, und dann nach und nach $r = 0, 1, 2, \ldots \frac{m}{2}$, wenn m gerad, oder $0, 1, 2, \ldots \frac{m-1}{2}$ setzt, wenn m ungerad ist; oder auch, indem man den einen aus der betreffenden Formel (1) — (4) gefundenen Werth von $\cos.^n x$ oder $\sin.^n x$ noch mit den n Wurzeln von $(+1)^n$ multiplicirt. Da man übrigens den Bogen x, wie im §. 154. gezeigt worden, immer zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ liegend voraussetzen kann, so gelten auch, wie man sich leicht überzeugt, die genannten Formeln für jeden reellen Werth von n, den man übrigens auch noch immer positiv voraussetzen kann, weil z. B. $\cos.^{-n} x = \frac{1}{\cos^n x}$ ist.

Ist n eine ganze positive Zahl, so verschwindet die in der Formel (1) vorkommende Reihe

$$\sin. nx + \binom{n}{1} \sin. (n-2)x + \binom{n}{2} \sin. (n-4)x + \ldots$$

Denn erstlich bricht diese Reihe mit dem $n+1^{\text{sten}}$ Gliede ab; ferner sind je zwei von den beiden äufsern gleich weit abstehende Glieder numerisch genommen gleich, aber mit entgegengesetzten Zeichen behaftet, so, dafs sich diese zusammen immer aufheben; erscheint (was geschieht, wenn n gerad ist) ein mittleres Glied, so ist dieses für sich Null. Von allem diesem kann man sich auf eine ganz einfache Weise überzeugen. Durch ähnliche Betrachtungen findet man überhaupt, dafs auch in den Reihen (2), (3) und (4) die mit dem Factor $\sqrt{-1}$ verbundenen Reihen verschwinden. Man hat also unter dieser Voraussetzung, als

specielle Fälle, folgende aus (1), (2), (3) und (4) der Reihe nach entstehende Formeln:

$$(1') \quad 2^n \cos.^n x = \cos. nx + n \cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos.(n-4)x + \ldots$$

$$(2') \quad 2^n \sin.^n x = (-1)^{\frac{n}{2}} \Big[\cos. nx - n \cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos.(n-4)x - \ldots \Big], \text{ für } n \text{ gerad.}$$

$$(3') \quad 2^n \sin.^n x = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \Big[\sin. nx - n \sin.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin.(n-4)x - \ldots \Big], \text{ für } n \text{ ungerad.}$$

$$(4') \quad 2^n \sin.^n x = \cos. n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + n \cos.(n-2)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos.(n-4)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \ldots$$

Dabei ist noch

$$\sin. nx + n \sin.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin.(n-4)x + \ldots = 0.$$

$$\sin. nx - n \sin.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin.(n-4)x - \ldots = 0,$$

für n gerad.

$$\cos. nx - n \cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos.(n-4)x - \ldots = 0,$$

für n ungerad.

Alle diese Reihen sind so weit fortzusetzen, bis sie von selbst abbrechen, d. i. bis einschlüssig zum $n+1^{\text{sten}}$ Gliede *).

*) Ueber die Entwickelung der obigen Formel (1), welche im Allgemeinen und wenn sie vollständig seyn soll, die Form $P \pm Q\sqrt{-1}$ hat, ist in der neuesten Zeit viel geschrieben worden, weil *Euler* und selbst *Lagrange* noch den zweiten Theil vernachlässigt und $Q = 0$ genommen haben; ein Irrthum, auf welchen zuerst *Poisson* im zweiten Bande der *Correspond. sur l'école polytechn.* aufmerksam machte. Es blieb dann noch zu bestimmen, für welchen Werth von r, in $(x \pm 2r\pi)$, der Ausdruck $(2 \cos. x)^n$ die obige Form verläſst, und entweder bloſs $= P$ oder $= Q\sqrt{-1}$ wird; hierüber findet man Bemerkungen von *Deſlers* im III. Bande von *Lacroix's* »*Traité du calcul diff. et int.* 2. Aufl. S. 605 und 620. Auch kann man über diesen Gegenstand nachsehen: *Lagrange's* Vorles. über die Functionen-Rechnung. XI. Vorles.

Anmerkung.

I. Der Vollständigkeit wegen fügen wir diesem Capitel noch kurz die Methode bei, nach welcher man eine gegebene unendliche Reihe in einen continuirlichen oder Kettenbruch verwandeln kann; obschon das dabei nöthige Verfahren genau dasselbe ist, welches man in der Arithmetik beobachtet, um einen numerischen Bruch in einen Kettenbruch aufzulösen.

Denn soll die Reihe R in einen continuirlichen Bruch verwandelt werden, so betrachte man diese als einen Bruch von der Form $\frac{R}{1}$, und verfahre damit auf die bekannte Weise; setzt man nämlich:

$$1 : R = q + \frac{r}{R}; \quad R : r = q' + \frac{r'}{r};$$

$$r : r' = q'' + \frac{r''}{r'}; \text{ u. s. w.}$$

so ist, wie man leicht findet:

$$R = \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q'' + \text{etc.}}}}$$

Beisp. 1. Um die unendliche Reihe

$$R = 1 - 4x + 7x^2 - 10x^3 + 13x^4 - 16x^5 + 19x^6 - \ldots,$$

deren Bildungsgesetz sogleich in die Augen springt, in einen Kettenbruch zu verwandeln, hat man nach dem vorigen Verfahren:

Deutsche Uebers. *Crelle's* Journ. f. Mathem. 1. Bd. S. 338; 5. Bd S. 197. Zeitschrift für Phys. u. Mathem. v. *Baumgartner* und v. *Ettingshausen*, 1. Bd. S. 96. *Crelle's* analyt. Facultäten. III. Abschnitt. *Exercices de Mathématiques* von *Cauchy*. 1. Bd. S. 6 u. n. m. A.

$$\begin{array}{l|l|l}
\begin{array}{rl}
 & 1 \\
 & 1 - 4x + 7x^2 - 10x^3 + 13x^4 - 16x^5 + \ldots \\
 & - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \\
\hline
(r =) & 4x - 7x^2 + 10x^3 - 13x^4 + 16x^5 - \ldots \\
 & 4x - 8x^2 + 12x^3 - 16x^4 + 20x^5 - \ldots \\
 & - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \\
\hline
(r'' =) & x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 4x^5 + 5x^6 - \ldots
\end{array}
&
\begin{array}{rl}
 & 1 - 4x + 7x^2 - 10x^3 + 13x^4 - 16x^5 + \ldots \\
 & 1 - \frac{7}{4}x + \frac{10}{4}x^2 - \frac{13}{4}x^3 + \frac{16}{4}x^4 - \frac{19}{4}x^5 \\
 & + \quad - \quad + \quad - \quad + \\
\hline
(r' =) & -\frac{9}{4}x + \frac{18}{4}x^2 - \frac{27}{4}x^3 + \frac{36}{4}x^4 - \frac{45}{4}x^5 + \ldots \\
 & -\frac{9}{4}x + \frac{18}{4}x^2 - \frac{27}{4}x^3 + \frac{36}{4}x^4 - \frac{45}{4}x^5 + \ldots \\
 & + \quad - \quad + \quad - \quad + \\
\hline
(r''' =) & 0
\end{array}
&
\begin{array}{l}
1 \; (= q) \\
\frac{1}{4x} \; (= q') \\
-\frac{16}{9} \; (= q'') \\
-\frac{9}{4x} \; (= q''')
\end{array}
\end{array}$$

folglich ist hier $R = \frac{1}{1} + \cfrac{1}{\frac{1}{4x} + \cfrac{1}{\frac{-16}{9} + \cfrac{1}{\frac{-9}{4x}}}}$,

oder nach einer ganz einfachen Reduction auch: $R = \frac{1}{1} + \cfrac{4x}{1 - \cfrac{9x}{4 + \cfrac{x}{1}}}$.

Dieser endliche Kettenbruch reducirt sich auf den gemeinen Bruch $\frac{1 - 2x}{1 + 2x + x^2}$, welcher auch in der That der erzeugende Bruch für die gegebene Reihe ist.

Beisp. 2. Um die Reihe der Exponentialgröfse $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$ in einen

Kettenbruch zu verwandeln, hat man eben so:

1 $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + ..$ $- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + ..$ $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{2.3.4} + \frac{x^4}{2.3.4.5} + ..$ $- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$	$1 \; (=q)$ $-\frac{1}{x} \; (=q')$
$(r=) \; -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^4}{2.3.4} - ..$ $-x - \frac{4x^2}{2.3} - \frac{6x^3}{2.3.4} - \frac{8x^4}{2.3.4.5} - ..$ $+ \quad + \quad + \quad + \quad +$	$(r'=) \; \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{2.3} + \frac{3x^3}{2.3.4} + \frac{4x^4}{2.3.4.5} + ..$ $\frac{x}{2} + \frac{6x^2}{2.3.4} + \frac{9x^3}{2.3.4.5} + \frac{12x^4}{2.3\ldots6} + ..$ $- \quad - \quad - \quad - \quad -$	$-2 \; (=q'')$ $\frac{3}{x} \; (=q''')$
$(r''=) \; \frac{x^2}{2.3} + \frac{2x^3}{2.3.4} + \frac{3x^4}{2.3.4.5} + \frac{4x^5}{2.3\ldots6} + ..$ $\frac{x^2}{2.3} + \frac{12x^3}{2.3\ldots5} + \frac{24x^4}{2.3\ldots6} + \frac{40x^5}{2.3\ldots7} + ..$ $- \quad - \quad - \quad - \quad -$	$(r'''=) \; \frac{2x^2}{2.3.4} + \frac{6x^3}{2.3.4.5} + \frac{12x^4}{2.3.4.5.6} + \frac{20x^5}{2\ldots7} + ..$ $\frac{2x^2}{2.3.4} + \frac{30x^3}{2.3\ldots6} + \frac{60x^4}{2.3\ldots7} + \frac{100x^5}{2\ldots8} + ..$ $- \quad - \quad - \quad - \quad -$	$2 \; (=q^{IV})$ $-\frac{5}{x} \; (=q^{V})$
$(r^{IV}=) \; -\frac{2x^3}{2.3.4.5} - \frac{6x^4}{2.3.4.5.6} - \frac{12x^5}{2.3\ldots7} - \frac{20x^6}{2.3\ldots8} - ..$ $-\frac{2x^3}{2.3.4.5} - \frac{48x^4}{2.3\ldots7} - \frac{120x^5}{2.3\ldots8} - \frac{240x^6}{2.3\ldots9} - ..$ $+ \quad + \quad + \quad + \quad +$	$(r^{V}=) \; \frac{6x^3}{2.3\ldots6} + \frac{24x^4}{2.3\ldots7} + \frac{60x^5}{2.3\ldots8} + ..$	$-2 \; (=q^{VI})$ $\frac{7}{x} \; (=q^{VII})$
$(r^{VI}=) \; \frac{6x^4}{2.3\ldots7} + \frac{24x^5}{2.3\ldots8} + \frac{60x^6}{2.3\ldots9} + ..$		etc.

wobei man leicht ein bestimmtes Gesetz erkennen wird. Es ist also:

$$e^x = \cfrac{1}{1} + \cfrac{1}{-\cfrac{1}{x} + \cfrac{1}{-2 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{-\cfrac{5}{x} + \cfrac{1}{-2 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{x} + \text{etc.}}}}}}}}$$

oder auch

$$e^x = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{2 - \cfrac{x}{3 + \cfrac{x}{2 - \cfrac{x}{5 + \cfrac{x}{2 - \cfrac{x}{7 + \text{etc.}}}}}}}}}$$

welcher unendliche Kettenbruch beliebig fortgesetzt werden kann. Für $x = 1$ erhält man

$$e = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{7 + \text{etc.}}}}}}}}}$$

bleibt man bei dem Gliede $-\frac{1}{11}$ stehen, so ist der reducirte gemeine Bruch: $\frac{517656}{190435}$, also ist, wenn man diesen in einen Decimalbruch verwandelt:

$$e = 2{\cdot}718281828445\ \ldots$$

welcher Werth noch in der zehnten Decimalstelle richtig ist. (Vergl. §. 128. . 5).)

Ganz auf dieselbe Art findet man

$$x \cdot \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \cfrac{x^2}{2 + \cfrac{x^2}{6 + \cfrac{x^2}{10 + \cfrac{x^2}{14 + \cfrac{x^2}{18 + \ldots}}}}}$$

Beisp. 3. Um die Reihe

$$l(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln, erhält man, wenn man wieder genau wie in den beiden vorigen, ausführlich behandelten, Beispielen verfährt, der Reihe nach die Quotienten: $\frac{1}{x}, \frac{2}{1}, \frac{3}{x}, \frac{2}{2}, \frac{5}{x}, \frac{2}{3}, \frac{7}{x}, \frac{2}{4}$ u. s. w., welche ein leicht zu

übersehendes Gesetz beobachten; es ist daher

$$\alpha)\quad l(1+x)=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{2}{1}+\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{2}{2}+\cfrac{1}{\cfrac{5}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{2}{3}+\ldots}}}}}}$$

oder auch, wie man leicht findet:

$$l(1+x)=\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{3+\cfrac{2x}{2+\cfrac{2x}{5+\cfrac{3x}{2+\cfrac{3x}{7+\cfrac{4x}{2+\cfrac{4x}{9+\ldots}}}}}}}}}$$

wobei das Fortgangsgesetz klar ist. Für $x=1$ z. B. erhält man

$$l\,2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{5+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{7+\cfrac{4}{2+\cfrac{4}{9+\cfrac{5}{2+\cfrac{5}{11+\ldots}}}}}}}}}}}$$

Bleibt man bei dem Gliede $\frac{5}{11}$ stehen, so reducirt sich dieser Kettenbruch auf den gemeinen $\frac{1823088}{2630160}$, und dieser wieder auf den Decimalbruch ·6931471849 . . ., welches in der That, bis auf die achte Stelle genau, der natürliche Logarithmus von 2 ist (vergl. §. 131.).

Setzt man in der Entwicklung α) statt $\frac{1}{x}$ x, also statt x $\frac{1}{x}$, so erhält man

$$l\left(\frac{1+x}{x}\right)=\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3x+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{5x+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{7x+\ldots}}}}}}}$$

Beisp. 4. Es ist

$$tang.\,x=\frac{sin.\,x}{cos.\,x}=\frac{x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-\frac{x^7}{2.3..7}+\ldots}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2.3..6}+\ldots}$$

Verfährt man nun mit diesem Bruche wieder auf die obige Weise, indem man den ersten Quotienten aus der Division des Nenners durch den Zähler bildet; so entsteht die Quotienten-Reihe: $\frac{1}{x}$, $-\frac{3}{x}$, $\frac{5}{x}$, $-\frac{7}{x}$, $\frac{9}{x}$, $-\frac{11}{x}$ und nach diesem Gesetze weiter, folglich wird

$$tang.\,x = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{-3}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{-7}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{9}{x} + \ldots}}}}}$$

oder auch

$$x\,tang.\,x = \cfrac{x^2}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cfrac{x^2}{11 - \ldots}}}}}}$$

Beisp. 5. Behandelt man schliefslich noch die sehr divergirende Reihe

$$R = x - 1.2\,x^2 + 1.2.3\,x^3 - 1.2.3.4\,x^4 + 1.2.3.4.5\,x^5 - \text{etc.}$$

(welches, wie man in der Integralrechnung findet, die Entwicklung von $\frac{\sqrt{e}}{x}\int\frac{\partial x}{\sqrt{x}}$ ist) auf die nämliche Art; so erhält man der Reihe nach die Quotienten

$$\frac{1}{x},\ \frac{1}{1.2},\ \frac{2}{x},\ \frac{1}{2.3},\ \frac{3}{x},\ \frac{1}{3.4},\ \frac{4}{x},\ \frac{1}{4.5}$$

und nach diesem Gesetze weiter, also für die vorige Reihe

$$R = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{1.2} + \cfrac{1}{\cfrac{2}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{2.3} + \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{3.4} + \cfrac{1}{\cfrac{4}{x} + \ldots}}}}}}}$$

oder nach einer leichten Reduction auch

$$R = \cfrac{x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{3x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{4x}{1 + \cfrac{3x}{1 + \cfrac{5x}{1 + \ldots}}}}}}}}$$

Für $x = 1$ erhält man $1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + 1.2.3.4.5 - \text{etc.}$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{5}{1 + \cfrac{4}{1 + \ldots}}}}}}}}}$$

so, dafs also diese divergirende Reihe durch einen convergenten Kettenbruch ausgedrückt ist; denn man erhält für die reducirten oder Näherungbrüche:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{13}, \frac{5}{9}, \frac{17}{37}, \frac{7}{17}, \frac{67}{167}, \frac{85}{209}, \ldots$$

welche abwechselnd zu grofs und zu klein sind, aber zugleich gegen den wahren Werth ·4036526 . . . convergiren.

Diese Beispiele sind hinreichend, um zu zeigen, wie jede gegebene Reihe in einen Kettenbruch verwandelt werden könne.

II. Eben so einfach ist das umgekehrte Verfahren: einen Kettenbruch in eine unendliche Reihe zu verwandeln. Nimmt man nämlich von dem gegebenen unendlichen Kettenbruche n Glieder, reducirt diesen auf einen gemeinen Bruch und löst denselben endlich nach §. 110. in eine recurrirende Reihe auf; so hat man die verlangte unendliche Reihe, und zwar wie eine einfache Betrachtung, gestützt auf die Form des erzeugenden Bruches, zeigt, in den ersten n Gliedern vollkommen genau. Ist der Kettenbruch ein endlicher und behält man alle seine Glieder bey; so werden auch alle entwickelten Glieder der unendlichen Reihe richtig seyn.

Einige Beispiele mögen das Gesagte erläutern:

Beisp. 1. Um den im Beispiele 2 für e^x gefundenen unendlichen Kettenbruch wieder in eine unendliche Reihe zu verwandeln, deren fünf erste Glieder genau seyn sollen, hat man, wenn vom genannten Bruche fünf Glieder beibehalten werden:

$$e^x = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{2 - \cfrac{x}{3 + \cfrac{x}{2}}}}}$$

und wenn dieser Kettenbruch auf einen gemeinen reducirt wird, auch $e^x = \dfrac{12 + 6x + x^2}{12 - 6x + x^2}$.

Um diesen letztern in eine recurrirende Reihe aufzulösen, ist nach §. 110.:

$$\frac{12 + 6x + x^2}{12 - 6x + x^2} = 1 + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots$$
$$\ldots + t_n x^n + t_{n+1} x^{n+1} + t_{n+2} x^{n+2} + \ldots$$

oder $12 + 6x + x^2 = 12 + \left.\begin{matrix}12 t_1 \\ -6\end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix}+12 t_2 \\ -6 t_1 \\ +1\end{matrix}\right\} x^2 + \ldots$

$$\ldots + 12 t_{n+2} - 6 t_{n+1} + t_n = 0,$$

also $t_1 = \frac{12}{12} = 1$; $t_2 = \frac{1+6-1}{12} = \frac{1}{2}$; und $t_{n+2} = \frac{6 t_{n+1} - t_n}{12}$;
mithin endlich

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \ldots$$

in welcher Reihe, wie man sieht, die fünf ersten Glieder noch genau sind; die Abweichung fängt im sechsten Gliede an und beträgt in diesem die Gröfse $\frac{x^5}{720}$.

Beisp. 2. Um den unendlichen Kettenbruch

$$\frac{x}{1} + \frac{x}{1} + \frac{x}{1} + \frac{2x}{1} + \frac{2x}{1} + \frac{3x}{1} + \frac{3x}{1} + \ldots$$

in welchem wir sieben Glieder beibehalten wollen, in eine unendliche Reihe zu verwandeln, hat man zuerst dafür den gemeinen Bruch: $\frac{1 + 11x + 26x^2 + 6x^3}{1 + 12x + 36x^2 + 24x^3}\, x$, und wenn man diesen (den Factor x indefs weggelassen) gleich $1 + t_1 x + t_2 x^2 + t_3 x^3 + \ldots$ setzt; so erhält man ganz einfach $t_1 = -1$, $t_2 = 2$, $t_3 = -6$, und für das Gesetz der Bildung:

$$t_{n+3} = -12 t_{n+2} - 36 t_{n+1} - 24 t_n,$$

folglich für die recurrirende Reihe:

$$1 - x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 4896x^7 + \ldots$$

und endlich, wenn man noch mit x multiplicirt, für die gesuchte unendliche Reihe:

$$x - 1.x^2 + 1.2x^3 - 1.2.3x^4 + 1.2.3.4x^5$$
$$- 1.2.3.4.5x^6 + 1.2.3.4.5.6x^7 - \text{etc.}$$

in welcher Reihe (mit der sich auch *Euler* beschäftigt hat) in der That das siebente Glied noch genau ist.

Beisp. 3. Fs sey schliefslich der endliche Kettenbruch

$$\frac{1}{1} + \frac{2x}{1} - \frac{x}{2} + x$$

in eine unendliche Reihe aufzulösen.

Der reducirte Bruch ist $\frac{1}{1 + 2x + x^2}$, und dieser gibt die recurrirende, also auch zugleich die gesuchte unendliche Reihe: $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \text{etc.}$

Eilftes Capitel.

Die Elemente der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

§. 158.

Erklärungen.

1. Die mathematische Wahrscheinlichkeit oder Probabilität irgend eines Ereignisses, ist das Verhältniſs aus jenen Fällen, welche diesem Ereignisse günstig sind, zu allen Fällen, welche überhaupt eintreten können und gleich möglich sind; es wird diese daher durch einen Bruch ausgedrückt, dessen Zähler die Anzahl der dem Ereigniſs günstigen, und Nenner die Anzahl aller gleich möglichen Fälle bezeichnet. Da es z. B. bei einem genau gearbeiteten Würfel gleich möglich ist, irgend eine der sechs Zahlen zu werfen; so ist die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Zahl, z B. jene 3 zu werfen, da dem gehofften Ereigniſs nur ein Fall günstig ist, $= \frac{1}{6}$; die W. aber, daſs man z. B. irgend eine der beiden Zahlen 2 oder 4 werfen wird $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, u. s. w.

2. Die W. also, welche für das Eintreffen irgend eines Ereignisses Statt findet, ist um so gröſser, je näher die Anzahl der günstigen, mit der Anzahl aller gleich möglichen Fälle zusammenfällt, oder je mehr sich der die W. darstellende Bruch der Einheit nähert. Kann von allen möglichen Fällen keiner dem erwarteten Ereignisse entgegen oder ungünstig seyn; so wird die W. zur Gewiſsheit, welche also, da jetzt Zähler und Nenner einander gleich sind, durch die Einheit ausgedrückt wird; es ist demnach die Einheit das Symbol der Gewiſsheit.

3. Die W., daſs irgend ein Ereigniſs nicht, sondern das Gegentheil davon eintreffen werde, wird die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit des erwarteten Ereignisses genannt, und diese wird offenbar zur W. des Er-

eignisses selbst addirt, gleich der Einheit seyn müssen, weil es gewifs ist, dafs entweder das gehoffte Ereignifs eintrifft, oder nicht eintrifft. So ist im vorigen Beispiele die W., dafs man die Zahl 3 nicht werfen wird, indem es dafür fünf günstige Fälle (wenn man 1, 2, 4, 5, oder 6 wirft) gibt, $= \frac{5}{6}$; es ist aber in der That $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$.

Nimmt man z. B. die acht Karten von einer Farbe, gesetzt die Coeurs, und zieht eine davon auf Gerathewohl oder blindlings heraus; so ist die W. das Afs oder überhaupt eine bestimmte Karte zu ziehen $= \frac{1}{8}$; die W., dafs man eine Figur ziehen werde $= \frac{3}{8}$; die entgegengesetzte W. davon, oder die, dafs man keine Figur zieht $= \frac{5}{8}$ (weil diesem Ereignifs fünf Fälle günstig sind). Diese beiden letzten Wahrscheinlichkeiten betragen zusammen $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$, wie es seyn soll, weil es gewifs ist, dafs man entweder eine Figur, oder keine ziehen wird. Endlich ist noch die W., dafs man ein Coeur überhaupt ziehen wird $= \frac{8}{8} = 1$, welches gleichfalls die Gewifsheit ist*).

*) Ist die Wahrscheinlichkeit irgend eines Ereignisses $> \frac{1}{2}$, so hat dieses eine absolute Wahrscheinlichkeit für sich, und man sagt dann auch im gemeinen Leben schon, dafs das Eintreffen desselben »wahrscheinlich« sey. In diesem Falle nämlich ist es wahrscheinlicher, dafs das Ereignifs eintrifft, als dafs es nicht, oder das Gegentheil eintritt. So wenig nun die Wahrscheinlichkeitsrechnung für wenige oder einzelne bestimmte Fälle, den künftigen Erfolg unfehlbar anzugeben vermag, so gewifs ist es, dafs diejenigen im Vortheile sind, welche für das Eintreffen eines für sie günstigen Ereignisses eine, wenn auch noch so geringe absolute W. (d. i. eine W. $> \frac{1}{2}$) für sich haben und dabei die Handlung oder der Versuch, von welchem das Eintreffen oder Nichteintreffen dieses Ereignisses abhängt, sehr oft wiederholt wird; wie diefs der sichere Gewinn der Lotterien und Spielhäuser, deren Einrichtungen auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung gegründet sind, hinlänglich beweiset. Befinden sich z. B. in einem Topfe 90 weifse und 10 schwarze Kugeln von übrigens ganz gleicher Beschaffenheit; so wird Niemand anstehen, dem Resultate des Probabilitätscalculs beizustimmen, nach welchem es wahrscheinlicher ist, dafs man eine weifse, als eine schwarze Kugel ziehen wird. Der erste Fall hat nämlich die W. $= \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$, und der letztere nur die W. $= \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ für sich, so dafs die erstere neun Mal so grofs als die letztere ist. Obgleich aber dieses Ergebnifs nicht so zu verste-

4. Aufser der eben betrachteten Wahrscheinlichkeit, welche auch die einfache oder absolute W. genannt wird, hat man noch die relative und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit zu berücksichtigen. Unter der relativen W. versteht man jene, welche durch die Vergleichung jener Fälle, welche zweien bestimmten Ereignissen günstig sind, ohne dabei die noch übrigen Fälle in Betracht zu ziehen, hervorgeht. Die Wahrscheinlichkeit z. B., dafs man aus einer Urne, in welcher sich weifse, schwarze, rothe und blaue Kugeln befinden, eher eine rothe, als blaue Kugel ziehen wird, wobei demnach die Fälle, in denen man eine weifse oder schwarze Kugel zieht, nichts entscheiden, ist eine relative.

5. Die Wahrscheinlichkeit, dafs zwei von einander unabhängige Ereignisse zusammentreffen werden, so wie auch die W. eines Ereignisses, welches von dem Eintreffen eines oder mehrerer vorausgehenden Ereignisse, die wieder ihre eigene W. haben, abhängt oder bedingt wird, heifst eine zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit. So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, dafs man mit zwei Würfeln auf einen Wurf den Pasch 66 werfen werde, eine zusammengesetzte, weil die Ereignisse, mit dem ersten Würfel die Zahl 6, und dann auch mit dem zweiten Würfel die nämliche Zahl zu werfen, zusammen eintreffen müssen. Theilt man die 32 Karten nach den vier Farben in vier Packete, und fragt um die W., mit welcher man blindlings eine bezeichnete Karte von einer bestimmten Farbe, z. B. das Coeur-Afs ziehen wird; so ist diese W. abermals eine zusammengesetzte, weil man zuerst die Hand

hen ist, als könnte man beim ersten oder zweiten oder dritten u. s. w. Hineingreifen in den Topf nicht auch statt der weifsen eine schwarze Kugel ziehen; so ist es doch ausgemacht, dafs z. B. unter 100 Versuchen, höchst wahrscheinlich, öfter eine weifse, als eine schwarze Kugel gezogen werden wird; und diefs ist der Sinn der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dasselbe gilt auch dort, wo die absolute W. nicht so überwiegend, wie in diesem Beispiele ist; wenn nur überhaupt der Versuch oft genug wiederholt wird.

auf das rechte Packet von der bezeichneten Farbe (hier auf jenes der Coeur) legen, und dann erst, nachdem dieses bereits erfolgt ist, die bestimmte Karte (hier das Afs) ziehen mufs, so, dafs also das letzte Ereignifs, ohne dafs das erste voraus eingetroffen ist, gar nicht möglich wird.

Die *absolute* oder *einfache* Wahrscheinlichkeit.

§. 159.

Bezeichnet a die Anzahl der Fälle, welche ein Ereignifs begünstigen, und b die Anzahl der Fälle, welche demselben entgegen sind; so ist die W. für das Ereignifs $w = \frac{a}{a+b}$, und die entgegengesetzte W. desselben $w_1 = \frac{b}{a+b}$.

Zerfällt das mögliche Resultat oder Ergebnifs einer Handlung oder eines Versuches in mehr als zwei, z. B. in drei Classen, so, dafs bei dem Versuche von drei verschiedenen Ereignissen nothwendig eines eintreffen mufs, und sind a Fälle dem ersten, b Fälle dem zweiten, und c Fälle dem dritten Ereignisse günstig; so sind ihre Wahrscheinlichkeiten beziehungsweise:

$$w = \frac{a}{a+b+c},\ w' = \frac{b}{a+b+c},\ w'' = \frac{c}{a+b+c}.$$

Genau auf dieselbe Art findet man auch die Wahrscheinlichkeiten für jede andere Anzahl von Ereignissen, welche bei dem Versuche gleich möglich sind.

Die W., dafs im angenommenen Falle entweder das erste oder zweite Ereignifs eintrete, ist $= \frac{a+b}{a+b+c}$; jene, dafs entweder das erste oder dritte Statt finden wird $= \frac{a+c}{a+b+c}$ u. s. w.; endlich ist die W., dafs entweder das erste oder zweite oder dritte Ereignifs eintreffen wird, $= \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$, wie es seyn soll.

Anmerk. Man hat auch die zuletzt angeführten Wahrschein-

lichkeiten, zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten durch Addition genannt; diese besondere Benennung scheint uns aber deſswegen nicht nöthig zu seyn, weil es hier wieder, wie bei der einfachen W., nur auf das Verhältniſs aller möglichen zu allen günstigen Fällen ankömmt.

§. 160.

Beispiele.

1. Wie groſs ist die W., mit zwei gewöhnlichen Würfeln eine bestimmte Summe zu werfen?

Aufl. Da jeder Würfel mit den Zahlen von 1 bis 6 bezeichnet ist, so können überhaupt die Summen 2, 3, 4, ... 11 und 12 geworfen werden, welche jedoch keineswegs einerlei W. für sich haben (also nicht alle gleich möglich sind), denn die Summe 2 und 12 kann nur in dem einzigen Falle erhalten werden, wenn jeder der beiden Würfel die Zahl 1 oder 6 zeigt; dagegen kann z. B. die Zahl 6 aus den Verbindungen 1, 5, 2, 4, 3, 3 entstehen, und selbst dabei können die beiden ersten Combinationen noch auf eine doppelte Weise durch die Permutation gebildet werden, indem man mit dem ersten Würfel 1 und mit dem zweiten 5, oder umgekehrt werfen kann; dasselbe gilt hinsichtlich der zweiten Combination 2, 4, so, daſs also die Summe 6 auf fünf verschiedene Arten geworfen werden kann. Da nun hier überhaupt 36 Fälle gleich möglich sind, indem jede der sechs Zahlen des einen Würfels mit den sechs Zahlen des andern ohne Beschränkung combinirt werden müssen; so ist die W., die Summe 2 zu werfen $= \frac{1}{36}$, während die W. für die Summe $6 = \frac{5}{36}$ ist. Führt man diese Betrachtung für alle der oben bezeichneten Summen durch, so findet man leicht für zwei Würfel folgendes Schema:

W.	für	die	Summe	2 =	der W.	für	die	Summe	12 =	$\frac{1}{36}$	
»	»	»	»	3 =	»	»	»	»	11 =	$\frac{2}{36}$	
»	»	»	»	4 =	»	»	»	»	10 =	$\frac{3}{36}$	
»	»	»	»	5 =	»	»	»	»	9 =	$\frac{4}{36}$	
»	»	»	»	6 =	»	»	»	»	8 =	$\frac{5}{36}$	
»	»	»	»	7 =	»	»	»	»	7 =	$\frac{6}{36}$	

Die Summe aller dieser W. ist $2\left(\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}\right)+\frac{6}{36}=\frac{36}{36}=1$, wie es seyn soll, weil es gewiſs ist, daſs man eine dieser Summen werfen wird.

2. Man wirft mit drei gewöhnlichen Würfeln *A*, *B*, *C*; es sollen die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse angegeben werden: *a*) daſs man die Summe 9 überhaupt, *b*) daſs man dabei zwei gleiche und eine ungleiche, *c*) daſs man drei gleiche Zahlen, *d*) daſs man mit dem Würfel *A* die Zahl 2, mit jenem *B* die Zahl 3, und mit dem Würfel *C* die Zahl 4, und endlich *e*) daſs man diese Zahlen 2, 3, 4 überhaupt, ohne Rücksicht auf die Ordnung der Würfel, werfe.

Aufl. *a*) Da sich die Zahl 9 (§. 5) auf 28 verschiedene Arten (die Permutationen mit gerechnet) in 3 Theile zerlegen läſst, von denen jedoch hier, der Natur der Sache nach, die drei Complexionen 711, 171 und 117 ausgeschlossen werden müssen; so sind dem fraglichen Ereignisse 25 Fälle günstig, während bei drei Würfeln überhaupt $6^3=216$ Fälle gleich möglich sind. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher $=\frac{25}{216}$ (zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{9}$).

b) Da hier der Fall mit drei gleichen Zahlen ausgeschlossen seyn soll, so können die beiden gleichen Zahlen nur 22 und 44, also die dritte ungleiche Zahl beziehungsweise bloſs 5 und 1 seyn. Da ferner jeder der drei Würfel die ungleichen und die beiden andern die gleichen Zahlen zeigen können, so gibt es hier im Ganzen sechs günstige Fälle, und man hat für die in diesem Falle gesuchte Wahrscheinlichkeit: $\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$.

c) Da die Summe 9 nur auf eine einzige Art mit drei gleichen Zahlen fallen kann, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür $=\frac{1}{216}$.

d) Eben so ist in diesem Falle die Wahrscheinlichkeit $=\frac{1}{216}$.

e) Da sich die Zahlen 2 3 4 sechs Mal permutiren lassen, oder was dasselbe ist, da die Zahlen 2, 3, 4 auf sechs

verschiedene Arten fallen können; so ist die Wahrscheinlichkeit für das betreffende Ereignifs $= \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

3. Wenn wieder mit drei Würfeln geworfen wird, die Wahrscheinlichkeiten für folgende Fälle anzugeben: *a*) dafs man drei verschiedene, *b*) dafs man zwei gleiche und eine davon verschiedene, *c*) dafs man drei gleiche Zahlen oder Augen werfe, *d*) dafs sich unter den geworfenen Zahlen *wenigstens* zwei gleiche befinden, *e*) dafs man *wenigstens* die Summe 14, und endlich *f*) dafs man drei auf einander folgende Zahlen werfen wird.

Aufl. *a*) Da sich die sechs Zahlen des Würfels auf $6.5.4 = 120$ verschiedene Arten zu dreien, ohne Wiederholung verbinden lassen; so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$ (also $> \frac{1}{2}$).

b) Mit zwei Würfeln können sechs Mal zwei gleiche Zahlen, d. i. sechs verschiedene Pasche geworfen werden, und da sich jeder derselben mit jeder der fünf andern Zahlen des dritten Würfels verbinden läfst (indem die sechste, mit den beiden ersten gleiche, Zahl immer ausgeschlossen bleibt), so gibt es $6.5 = 30$ Complexionen von der verlangten Beschaffenheit; da man aber endlich jeden der drei Würfel für jenen nehmen kann, welcher die dritte ungleiche Zahl zeigt, so gibt es im Ganzen $3.30 = 90$ günstige Fälle, und es ist daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{90}{216} = \frac{5}{12}$.

c) Da sich drei gleiche Zahlen nur auf sechs verschiedene Arten werfen lassen, so ist dafür die Wahrscheinlichkeit $= \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

Die Wahrscheinlichkeiten dieser drei Ereignisse *a*), *b*), *c*) zusammengenommen, machen $\frac{120 + 90 + 6}{216} = \frac{216}{216} = 1$; wie es seyn soll, weil von diesen drei Fällen einer gewifs eintrifft.

d) Diesem Ereignisse ist auch noch jener Fall günstig, in welchem drei gleiche Zahlen fallen, also hat man im

Ganzen [*b*) und *c*)] 90 + 6 = 96 günstige Fälle; es ist daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{96}{216} = \frac{4}{9}$ (diese W. mit jener in *a*) zusammen macht wieder, wie es seyn soll, die Einheit aus).

e) Da diesem Ereignisse nicht nur der Fall, in welchem man die Summe 14 wirft, sondern auch noch alle jene günstig sind, in denen eine grössere Summe, nämlich 15, 16, 17 oder 18 geworfen wird; so hat man, da die Summe 14 auf fünfzehn, jene 15 auf zehn, jene 16 auf sechs, die Summe 17 auf drei verschiedene, und endlich jene 18 nur auf eine Art fallen kann, für die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $\frac{15+10+6+3+1}{216} = \frac{35}{216}$ (nahe $= \frac{1}{6}$).

f) Die drei auf einander folgenden Zahlen können seyn 123, 234, 345, 456, und da jede sechs Permutationen zuläßt; so sind dem gegenwärtigen Ereignisse $4 . 6 = 24$ Fälle günstig; man hat also für das betreffende Ereigniß die Wahrscheinlichkeit $= \frac{24}{216} = \frac{1}{9}$.

4. Man hat die 13 Blätter von *einer* Farbe eines vollständigen Spiels von 52 Karten in einen Pack gethan und gehörig gemischt. Wie groß ist die W., daß das oberste Blatt der König und das nächst folgende das Aß sey?

Aufl. Die beiden obersten Blätter bilden (auf eine gleich mögliche Weise) eine der $\frac{13 . 12}{1 . 2} = 78$ Combinationen der 13 Karten zu 2, unter denen jene von Aß und König nur Einmal vorkömmt; es ist also die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden obersten Blätter König und Aß seyn werden, ohne Rücksicht auf die Ordnung $= \frac{1}{78}$, und da mit Berücksichtigung einer bestimmten Ordnung, die W. um die Hälfte kleiner wird; so ist hier die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2 . 78} = \frac{1}{156}$. Dasselbe Resultat erhält man auch aus der Bemerkung, daß sich jede der 78 Amben zwei Mal permutiren läßt, so, daß es mit Berücksichtigung der Plätze, im Ganzen 156 Fälle gibt, von de-

nen aber nur ein einziger dem fraglichen Ereignisse günstig ist.

Die *relative* Wahrscheinlichkeit.

§. 161.

Um die Regel für die relative Wahrscheinlichkeit sogleich in einem Beispiele zu entwickeln, wollen wir die W. bestimmen, daſs man mit zwei Würfeln auf einen Wurf eher die Summe 7, als jene 5 werfen wird; oder, was dasselbe ist, die Wahrscheinlichkeit suchen, welche jeder der beiden Spieler A und B für sich hat, wenn A gewinnt, indem er die Summe 7, und B gewinnt, wenn er jene 5 wirft.

Nach dem vorigen Paragraphen, Beisp. 1, gibt es für die Summe 7 sechs, und für jene 5 vier günstige Fälle; also hat A sechs, und B vier Fälle für sich, so, daſs demnach die W. des A (nach dem vorhergehenden Paragraphen) $= \frac{6}{6+4} = \frac{3}{5}$, und jene des $B = \frac{4}{6+4} = \frac{2}{5}$ ist.

Da nun die absolute W. für das Werfen der Summen 7 und 5 respective $\frac{6}{36}$ und $\frac{4}{36}$ ist, so findet man auch dasselbe Ergebniſs, wenn man jede dieser absoluten Wahrscheinlichkeiten durch die Summe beider dividirt: Es ist nämlich die relative W. für die Summe 7: $\frac{\frac{6}{36}}{\frac{6}{36}+\frac{4}{36}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, und eben so die entgegengesetzte, oder jene für die Summe 5: $\frac{\frac{4}{36}}{\frac{6}{36}+\frac{4}{36}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, wie vorhin. Die Summe beider Wahrscheinlichkeiten ist wieder, wie es seyn soll, $= 1$; weil es gewiſs ist, daſs man entweder eher die Summe 7, als jene 5, oder umgekehrt werfen wird, indem die Fälle, in welchen eine andere auſser diesen beiden Summen geworfen wird, nicht mitzählen.

Sind also allgemein a die Fälle, welche das Ereigniſs A, b die Fälle, welche das Ereigniſs B, c die Fälle, welche das Ereigniſs C begünstigen, u. s. f., und ist Kürze halber $a + b + c + \ldots = S$; so ist die W., daſs das Ereigniſs

A eher als jenes *B* eintrifft: $w = \frac{\frac{a}{s}}{\frac{a}{s} + \frac{b}{s}} = \frac{a}{a+b}$ (d. i. gleich der absol. W. für *A*, wenn bloss die Fälle *A* und *B* möglich sind); und jene des Gegentheils: $w_1 = \frac{\frac{b}{s}}{\frac{a}{s} + \frac{b}{s}} = \frac{b}{a+b}$; wo also $w + w_1 = 1$ ist.

Eben so wäre die W., dass eher *B* als *C* eintrifft, $= \frac{b}{b+c}$, und die entgegengesetzte W. $= \frac{c}{b+c}$, u. s. w.; es wird nämlich die *relative* Wahrscheinlichkeit irgend eines Ereignisses erhalten, indem man die *absolute* Wahrscheinlichkeit desselben, durch die Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten jener beiden Ereignisse dividirt, die mit einander verglichen werden.

§. 162.

Beispiele.

1. In einer Urne befinden sich sechs weisse, acht rothe, vierzehn blaue und zwölf schwarze Kugeln; wie gross ist die W., dass man auf einen Zug eher eine weisse als eine schwarze Kugel ziehen wird, und wie gross ist die des Gegentheils?

Aufl. Die absolute W., eine weisse Kugel zu ziehen, ist $= \frac{6}{40}$, jene für eine schwarze $= \frac{12}{40}$; also die gesuchte relative Wahrscheinlichkeit $= \frac{6}{6+12}$ (wenn man nämlich gleich den gem. Nenner 40 weglässt) $= \frac{1}{3}$. Die entgegengesetzte W., d. i. jene, dass man eher eine schwarze als weisse Kugel ziehen wird, ist $= \frac{12}{6+12} = \frac{2}{3}$, und beide zusammen betragen $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$; weil es gewiss ist, dass von diesen beiden Ereignissen eines zutrifft,

wenn man nämlich, wie es gemeint ist, im Falle eine rothe oder blaue Kugel gezogen wird, was nichts entscheidet, den Versuch wiederholt.

2. Ein Spiel von 16 Karten, worunter sich von jeder Farbe vier befinden, wird unter vier Spieler vertheilt, dabei ist die Farbe der letzten Karte Trumpf; wie grofs ist die W., dafs *A* eher einen, und *nur* einen Trumpf, als drei, und auch *nur* drei Karten von *derselben* Farbe (z. B. drei Coeurs) erhalte, wenn nämlich nicht *A*, sondern einer der drei übrigen Spieler die Karten gibt?

Aufl. Da eigentlich nur 15 Karten ausgegeben werden, unter denen sich drei Trümpfe befinden, so kann *A* seine vier Karten auf $\frac{15 . 14 . 13 . 12}{1 . 2 . 3 . 4} = 1365$ verschiedene Arten erhalten. Da sich ferner nach Hinwegnahme der drei Trümpfe die übrigen zwölf Karten auf $\frac{12 . 11 . 10}{1 . 2 . 3} = 220$ Arten zu dreien verbinden lassen, so gibt es $3 \times 220 = 660$ günstige Fälle, d. i. so viele Verbindungen von vier Karten, deren jede einen, und auch nur einen Trumpf enthält; es ist also die absolute Wahrscheinlichkeit des ersten Ereignisses: $w = \frac{660}{1365} = \frac{44}{91}$ (etwas weniges $< \frac{1}{2}$).

Da sich ferner die 16 Blätter auf $\frac{16 . 15 . 14 . 13}{1 . 2 . 3 . 4} = 1820$ verschiedene Arten zu 4 verbinden lassen, und unter diesen Verbindungen 192 mit drei gleichen und einer ungleichen Farbe enthalten sind (die vier Coeurs z. B. lassen sich $\frac{4 . 3 . 2}{1 . 2 . 3} = 4$ Mal zu 3 verbinden, jede dieser Verbindungen gibt mit den 12 übrigen Karten eine Verbindung zu 4 von der verlangten Eigenschaft; es gibt also $4 \times 12 = 48$ Verbindungen, welche drei Coeurs und eine andere Farbe enthalten. Da nun dasselbe auch in Bezug auf die drei übrigen Farben gilt, so gibt es im Ganzen $4 . 48 = 192$ günstige Fälle); so ist die W. für das zweite Ereignifs:

$$W = \frac{192}{1820} = \frac{48}{455} \text{ (zwischen } \frac{1}{9} \text{ und } \frac{1}{10}\text{)}.$$

Man hat also für die gesuchte relative Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{\frac{44}{91}}{\frac{44}{91}+\frac{48}{455}} = \frac{55}{67} \text{ (etwas weniges } < \tfrac{5}{6}\text{)}.$$

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{\frac{48}{455}}{\frac{44}{91}+\frac{48}{455}} = \frac{12}{67},$$

und die Summe aus beiden ist wieder $\frac{55}{67} + \frac{12}{67} = 1$.

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

§. 163.

Um die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen zweier Ereignisse A und B zu finden, wollen wir annehmen, daſs dem ersten Ereigniſs a Fälle günstig und b Fälle entgegen seyen, so, daſs dessen absolute Wahrscheinlichkeit $w = \frac{a}{a+b}$ ist. Eben so sollen dem zweiten Ereignisse a' Fälle günstig und b' Fälle ungünstig seyn, wodurch die einfache W. desselben $w' = \frac{a'}{a'+b'}$ wird. Da sich nun die a Fälle, welche das erste Ereigniſs begünstigen, mit den a' günstigen Fällen des zweiten Ereignisses auf aa' verschiedene Arten verbinden lassen; so können beide Ereignisse auf eben so viele Arten (nämlich aa' Mal) zusammentreffen. Da ferner das Zusammentreffen aller Fälle der ersten Art mit allen Fällen der zweiten Art überhaupt auf $(a+b)(a'+b')$ verschiedene Arten Statt finden kann; so ist (§. 159.) die gesuchte Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der beiden Ereignisse:

$$W = \frac{aa'}{(a+b)(a'+b')}, \text{ oder } W = ww';$$

es ist also die zusammengesetzte W. für das Zusammentreffen der Ereignisse A und B gleich dem Producte der absoluten Wahrscheinlichkeiten von A und B.*)

*) Denkt man sich z. B. zwei Urnen, in deren erstern a weiſse und b schwarze, und zweiten a' weiſse und b' schwarze Kugeln sich befinden; so ist die W. aus der ersten Urne

Auf dieselbe Art findet man, wenn w, w', w'' . . . beziehungsweise die einfachen W. für die Ereignisse A, B, C, . . . sind, die zusammengesetzte W. für das Zusammentreffen aller dieser Ereignisse gleich dem Producte aller einfachen W., d. i. $= w . w' . w'' \ldots$

§. 164.

Beispiele.

1. **Die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, dafs man mit einem gewöhnlichen Würfel die Zahl 6 zwei, drei, . . . m Mal hinter einander werfen wird.**

Aufl. Die absolute oder einfache W., dafs die Zahl 6 überhaupt fällt, ist $= \frac{1}{6}$; folglich die zusammengesetzte W., dafs diese Zahl zwei Mal hinter einander geworfen wird $= \frac{1}{6} . \frac{1}{6} = \frac{1}{6^2}$; jene, dafs 6 drei Mal hinter einander

eine weifse Kugel zu ziehen $= \frac{a}{a+b}$, ferner jene aus der zweiten Urne eine weifse Kugel zu ziehen $= \frac{a'}{a'+b'}$, und es entspricht sofort dem Zusammentreffen der beiden oben genannten Ereignisse A und B offenbar hier der Fall, dafs man aus beiden Urnen zugleich eine weifse Kugel zieht. Nun können die a weifsen Kugeln der ersten mit den a' weifsen Kugeln der zweiten Urne auf aa' verschiedene Arten verbunden werden, welches sofort die günstigen Fälle sind; die sämmtlichen $a+b$ Kugeln der ersten Urne dagegen, geben mit denen $a'+b'$ der zweiten Urne $(a+b) \times (a'+b')$ Verbindungen, welches offenbar alle gleich möglichen Fälle sind; es ist daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{aa'}{(a+b)(a'+b')}$, wie oben.

Auch läfst sich das Zusammentreffen der beiden Ereignisse A und B durch einen Wurf mit zwei regulären Polyedern oder Prismen (bei welchen letztern aber die beiden Grundflächen nicht mit zu den Seiten gezählt werden) darstellen, von welchen das erste $a+b$ Seiten besitzt, davon a Seiten mit A bezeichnet, die übrigen b Seiten leer oder weifs gelassen sind, und von denen das zweite $a'+b'$ Seiten hat, davon a' Seiten mit B bezeichnet sind. Das Zusammen- oder Zugleichfallen der Seiten A und B stimmt genau mit dem hier betrachteten Zusammentreffen der Ereignisse A und B überein.

fällt $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6^3}$ u. s. w.; also die Wahrscheinlichkeit, daſs man diese Zahl m Mal hinter einander werfen werde $= \frac{1}{6^m}$. Daraus geht hervor, daſs diese W. um so kleiner wird, je gröſser m ist.

2. Wählen wir ferner das in der Erklärung 5. angeführte Beispiel, und suchen die W., daſs man aus den 32 Karten das Coeur-Aſs ziehen wird, wenn diese nach den Farben in vier Packete abgetheilt sind, ohne daſs man weiſs, von welcher Farbe jedes Packet ist.

Aufl. Die W., die Hand auf das Packet der Coeur zu legen, ist $= \frac{1}{4}$, und die W., daſs man dann aus diesem Packet das Aſs ziehen wird $= \frac{1}{8}$; folglich ist die gesuchte oder zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$.

Von der Richtigkeit dieses Resultates kann man sich auch überzeugen, wenn man bedenkt, daſs dieser in Rede stehende Fall mit jenem identisch ist, in welchem um die einfache Wahrscheinlichkeit gefragt wird, aus einem wohl gemischten Spiele von 32 Karten das Coeur-Aſs zu ziehen; wofür man aber offenbar ganz einfach $\frac{1}{32}$ hat.

3. Wie groſs ist die W., daſs man aus einem gut gemischten Spiele von 32 Karten hinter einander Aſs und König von *derselben* Farbe in beliebiger Ordnung ziehen wird?

Aufl. Die W., daſs man auf den ersten Zug das Aſs von einer bestimmten Farbe ziehen wird, ist $= \frac{1}{32}$; und die W., daſs man hierauf, d. i. auf den zweiten Zug den König von derselben Farbe zieht, ist $= \frac{1}{31}$; folglich ist die Wahrscheinlichkeit, daſs diese beiden Ereignisse in dieser Ordnung zusammentreffen $= \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{31}$.

Da es aber auf die Ordnung nicht ankommen soll, also auch jener Fall ein günstiger ist, in welchem zuerst der König und dann das Aſs gezogen wird; so ist die W. doppelt so groſs, oder $= \frac{2}{32 \cdot 31}$. Da endlich die Farbe nicht

bestimmt ist, also dieses Ereignifs in allen vier Farben eintreten kann; so hat man zuletzt die Wahrscheinlichkeit des verlangten Ereignisses $= \frac{2.4}{32.31} = \frac{1}{124}$.

Zu diesem Ergebnifs gelangt man auch auf folgende Art. Die 32 Blätter können auf $\frac{32.31}{1.2}$ Arten zu zwei verbunden werden, darunter sind aber nur vier Combinationen dem fraglichen Ereignisse günstig, nämlich jene, in welchen Afs und König von gleicher Farbe mit einander combinirt sind; man hat also für die einfache W. wieder $\frac{4.1.2}{32.31} = \frac{1}{124}$, wie zuvor.

4. Von zwei Urnen enthält die erste drei weifse und eine schwarze, die zweite vier weifse und zwei schwarze Kugeln; wie grofs ist die W., dafs man durch einen zufälligen Griff in eine der beiden Urnen, eine weifse Kugel ergreifen wird?

Aufl. Die W. in die erste Urne zu greifen, ist $= \frac{1}{2}$, und jene, hierauf aus dieser eine weifse Kugel zu ziehen $= \frac{3}{4}$; also ist die W., dafs sich beides ereignen werde $= \frac{1}{2} . \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$. Eben so ist die W., in die zweite Urne zu greifen $= \frac{1}{2}$, und jene, daraus dann wieder eine weifse Kugel zu ziehen $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; folglich die W., dafs beides geschieht $= \frac{1}{2} . \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Da es nun gleichgiltig ist, welches von beiden Ereignissen, deren Wahrscheinlichkeiten sofort respective $\frac{3}{8}$ und $\frac{1}{3}$ sind, sich zuträgt, oder beide Ereignisse der Erwartung günstig sind; so müssen (§. 159) diese beiden W. addirt werden, und man hat sofort für die gesuchte Wahrscheinlichkeit des genannten Ereignisses: $\frac{3}{8} + \frac{1}{3} = \frac{17}{24}$ (zwischen 1 und $\frac{1}{2}$).

Genau so findet man die W., dafs man aus der ersten Urne eine schwarze Kugel ziehen wird $= \frac{1}{2} . \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$; jene, dafs man eine solche aus der zweiten Urne zieht $= \frac{1}{2} . \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$; also die W., dafs eins von beiden geschieht $= \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{7}{24}$,

welche sofort mit der vorigen $\frac{17}{24}$ zusammengenommen die Einheit ausmacht, wie es auch offenbar seyn soll *).

5. Um noch zu zeigen, wie in gewissen Fällen Aufgaben der einfachen W. mit Umgehung der oft lästigen Combinationen oder Variationen, einfacher durch die zusammengesetzte W. aufgelöst werden können; wählen wir das im §. 160., 4., bereits behandelte Beispiel, nach welchem die W. zu suchen ist, dafs von den dreizehn wohl gemischten Karten von derselben Farbe eines vollständigen Spiels, die oberste der König und die nächste das Afs sey.

*) Es wird interessant seyn, diesen Fall noch von einer andern Seite, von welcher er einige Schwierigkeiten darzubiethen scheint, zu betrachten.

Denkt man sich nämlich die sämmtlichen zehn Kugeln, unter denen sich sieben weifse befinden, in eine einzige Urne gethan, so kann es im ersten Augenblicke scheinen, als sey (so wie im vorigen Beisp,) die oben gesuchte zusammengesetzte W. mit der einfachen W. des gegenwärtigen Falles: eine weifse Kugel zu ziehen, identisch, welche jedoch, da diese hier $= \frac{7}{10}$ ist, offenbar von der obigen abweicht. Allein man darf die Kugeln nur in dem Falle in eine Urne zusammenwerfen, wenn jede Urne gleich viele Kugeln enthält, weil nur dann die Wahrscheinlichkeiten gleich grofs sind, dafs einem eher die Kugeln der ersten, als die der zweiten Urne in die Hände kommen werden; was aber offenbar nicht der Fall ist, wenn die Anzahl der Kugeln ungleich ist. So veranlafst in diesem Beispiele die gröfsere Anzahl der Kugeln, welche die zweite Urne in Bezug auf jene, welche die erste Urne enthält, keineswegs, dafs man eher in die zweite als in die erste Urne greifen wird; während, wenn beide Parthien Kugeln vereinigt werden, die W. gröfser ist, dafs man eine Kugel aus den sechs Kugeln der zweiten Parthie angehörig ziehen wird, als jene, dafs man eine Kugel aus den vier Kugeln der ersten Parthie zieht. Diese Verschiedenheit wird aber aufgehoben, wenn man die obigen einfachen W., eine weifse Kugel aus der einen und der andern Urne zu ziehen, nämlich $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ auf gleiche Nenner stellt, und dafür $\frac{9}{12}$ und $\frac{8}{12}$ schreibt; sich also vorstellt, dafs die erste Urne neun weifse und drei schwarze, und die zweite Urne acht weifse und vier schwarze, jede also im Ganzen zwölf Kugeln enthält, wodurch im Resultate nichts geändert wird. Da man aber jetzt die Kugeln beider Urnen in eine vereinigen darf, welche nun siebzehn weifse und sieben schwarze Kugeln enthält, so ist die einfache W., daraus eine weifse Kugel zu ziehen $= \frac{17}{24}$, wie oben.

Aufl. Die W., daſs das oberste Blatt der König sey, ist $= \frac{1}{13}$; die W., daſs, nachdem diese Karte weggenommen worden, das oberste Blatt das Aſs sey, ist $= \frac{1}{12}$; folglich ist die Wahrscheinlichkeit, daſs beides zusammen Statt finden werde $= \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{156}$, wie a. a. O.

6. Bei einem Spiele mit drei Würfeln haben *A* und *B* jeder bereits 12 geworfen; wenn nun *C* den letzten Wurf hat, wie groſs ist seine Wahrscheinlichkeit, das Spiel zu gewinnen?

Aufl. *C* gewinnt das Spiel, wenn er entweder sogleich mehr als 12 wirft, oder, wenn er ebenfalls 12 wirft und dann bei dem nun neuerdings eintretenden Werfen das Meiste wirft.

Die W., mehr als 12 Augen (13, ... 18) zu werfen, ist, wie man leicht findet $= \frac{56}{216} = \frac{7}{27}$. Die W., gerade 12 zu werfen, ist $= \frac{25}{216}$; und jene, bei einem neuen Spiele das Meiste zu treffen $= \frac{1}{3}$; folglich die W., daſs die beiden letztgenannten Ereignisse zusammentreffen werden $= \frac{25}{216} \cdot \frac{1}{3} = \frac{25}{3 \cdot 216}$. Endlich ist die W., daſs der erste oder zweite Fall eintreten werde, d. i. die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{56}{216} + \frac{25}{3 \cdot 216} = \frac{193}{648}$ (diese liegt sofort zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{7}$).

Wollte man auch auf dieselbe Art die entgegengesetzte, d. i. jene Wahrscheinlichkeit berechnen, daſs *C* das Spiel unter den obigen Voraussetzungen verlieren wird, was geschieht, wenn *C* entweder sogleich weniger als 12, oder anfangs 12, und beim neuen Spiele nicht das Meiste wirft; so hätte man für die W. weniger als 12 zu werfen: $\frac{135}{216}$; für die W. zuerst 12 und dann weniger als *A* oder *B* zu werfen: $\frac{25}{216} \cdot \frac{2}{3}$ (weil nämlich das Spiel dann von vorne angeht, so ist die W. für *C* das Spiel zu gewinnen $= \frac{1}{3}$, also jene das Spiel zu verlieren $= \frac{2}{3}$, da offenbar beide Fälle die Einheit geben müssen. Dasselbe folgt auch aus dem Umstande, daſs *C* das Spiel verliert, wenn es *A* oder *B* gewinnt; wofür die W. $= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ist), folglich

für die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $\frac{135}{216} + \frac{50}{3.216} = \frac{455}{648}$. Diese Wahrscheinlichkeit mit der vorhin gefundenen zusammengenommen gibt $\frac{193}{648} + \frac{455}{648} = 1$, wie es auch seyn soll. (Man wird also, wenn man die zweite Rechnung nicht etwa zur Controlle vornimmt, die entgegengesetzte W. unmittelbar erhalten, indem man die erstere oder directe von der Einheit abzieht.)

7. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in der gewöhnlichen Zahlenlotterie, bei welcher von 90 Nummern jedesmal fünf gezogen werden, von zwei besetzten Nummern *wenigstens eine* herauskommt?

Aufl. Die Wahrscheinlichkeit, dafs auf den ersten Zug die eine der beiden bestimmten Nummern gezogen wird, ist $= \frac{1}{90}$, und jene, dafs auf den zweiten Zug die zweite Nummer kommt $= \frac{1}{89}$; also ist die Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereignifs $= \frac{1}{90 \cdot 89}$. Da es aber hier auf die Ordnung, in welcher diese beiden Nummern auf einander folgen, nicht ankommen soll; so wird diese W. zwanzig Mal so grofs (indem sich fünf Gröfsen, unter denen drei gleich sind, oder deren Permutationen nicht in Betracht kommen, $5 \cdot 4 = 20$ Mal permutiren lassen), und es ist sofort die Wahrscheinlichkeit, dafs unter den fünf Zügen die zwei bestimmten oder besetzten Nummern herauskommen werden $= \frac{20}{90 \cdot 89} = \frac{2}{9 \cdot 89}$.

Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, dafs blofs eine dieser beiden Nummern gezogen wird $= \frac{5}{90}$ (da nämlich die Ordnung oder der Ruf nicht bestimmt ist), und die W., dafs die zweite in den übrigen vier Zügen nicht gezogen wird $= \frac{85}{89} (= 1 - \frac{4}{89})$; also jene, dafs beides geschieht, $= \frac{5 \cdot 85}{90 \cdot 89}$. Da ferner dasselbe auch in Bezug auf die andere Nummer Statt findet, so ist endlich die Wahrscheinlichkeit, dafs in diesen fünf Zügen nur eine dieser beiden Nummern

ohne die andere, d. i. eine von beiden, herauskommt, $= \frac{10.85}{90.89} = \frac{85}{9.89}$. Da aber endlich beide betrachteten Ereignisse der Erwartung günstig sind, so ist die gesuchte W. $= \frac{2}{9 \cdot 89} + \frac{85}{9 \cdot 89} = \frac{87}{801}$ (nahe $= \frac{1}{9}$) *).

8. Um endlich noch an einem einfachen Beispiele zu zeigen, wie die Wahrscheinlichkeit eines **künftigen** Ereignisses von einem **vorausgehenden** bedingt und abhängig werden kann, **wollen wir setzen, dafs sich in einer der drei Urnen** *A*, *B*, *C* **nur** *schwarze*, **und in den beiden übrigen blofs** *weifse* **Kugeln befinden; diefs vorausgesetzt, soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dafs, indem man in jede der beiden Urnen** *A* **und** *B* **ein Mal hineingreift, daraus zwei weifse Kugeln gezogen werden.**

*) Mit Hilfe der Combinationen wird man diese Aufgabe auf folgende Art auflösen:

Die 90 Nummern lassen sich zu fünf auf $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ verschiedene Arten verbinden, welches sofort die Gesammtzahl aller gleich möglichen Fälle ist, auf welche die fünf Nummern ausgezogen werden können. Um die Anzahl der darunter befindlichen Fälle zu finden, in welchen nur eine der beiden besetzten Nummern mit vier andern verbunden ist, darf man blofs die 88 übrigen Nummern zu vier verbinden, und die eine dieser beiden Nummern sich zu jeder dieser Verbindungen ein Mal hinzugefügt denken; dadurch erhält man, da dieses auch für die zweite besetzte Nummer gilt, der eben genannte Fall also zwei Mal vorkömmt: $2 \cdot \frac{88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ Verbindungen.

Da endlich auch noch jene Fälle zu den günstigen gehören, in welchen die beiden besetzten oder bestimmten Nummern mit drei andern verbunden vorkommen, so hat man dafür eben so: $\frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Verbindungen.

Es sind daher die dem Ereignifs günstigen Fälle:

$$\frac{2 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 174 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

mithin ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 174 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{870}{90 \cdot 89} = \frac{87}{801}, \text{ wie oben.}$$

Aufl. Die Wahrscheinlichkeit, aus A eine weiſse Kugel zu ziehen, ist $= \frac{2}{3}$, weil es nämlich unbekannt ist, in welcher der drei Urnen sich die schwarzen Kugeln befinden. Hat man aber aus A wirklich eine weiſse Kugel gezogen, so ist die W., auch aus B eine solche zu ziehen, nicht mehr wie anfangs vor dem ersten Zug $\frac{2}{3}$, sondern $= \frac{1}{2}$, weil sich die Ungewiſsheit, wo sich die schwarzen Kugeln befinden, nur noch auf die beiden Urnen B und C erstreckt. (Wäre aus A hingegen eine schwarze Kugel gezogen worden, so würde sich jetzt die W. in die Gewiſsheit verwandeln) Es ist sonach die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider Ereignisse $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$: gerade so, als ob sich in einer Urne zwei weiſse und eine schwarze Kugel befänden, und die W. gesucht würde, daſs man daraus in zwei Zügen zwei weiſse Kugeln ziehen wird; welcher Fall auch in der That mit dem hier gegebenen identisch ist.

Die wiederholten Versuche.

§. 165.

Gibt es m Fälle, welche dem Ereignisse A, und n Fälle, welche jenem B günstig sind, und hat man bei jedem neuen Versuche immer dasselbe Verhältniſs zwischen der Zahl der Fälle beider Arten; so kann die Wahrscheinlichkeit für irgend eine Erwartung, nach einer gewissen Anzahl von Wiederholungen, leicht mittelst der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit bestimmt werden.

Nehmen wir z. B., um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, ein $(m+n)$seitiges regelmäſsiges Prisma, bei welchem m Seiten mit A und n Seiten mit B bezeichnet sind, an, und setzen, daſs damit drei Mal hinter einander geworfen werde; so können dabei offenbar folgende Fälle eintreten:

Man wirft drei Mal A, d. i. man hat . . . AAA.

Man wirft zwei Mal A und ein Mal B, d. i. . AAB, wobei, wenn die Ordnung nicht bestimmt ist, diese Verbindung drei Mal vorkommt (AAB, ABA, BAA).

Man wirft ein Mal A und zwei Mal B, d. i. . ABB (hier gilt die vorige Bemerkung).

Man wirft drei Mal B, d. i. BBB.

Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit für A und B respective durch a und b, so ist $a = \frac{m}{m+n}$ und $b = \frac{n}{m+n}$ (= der entgegengesetzten W. für A).

Die zusammengesetzte W. für

den 1sten Fall ist nun $aaa = a^3$.

» 2ten » » » $aab = a^2 b$, und wenn die Ordnung nicht berücksichtiget werden soll $= 3a^2 b$.

» 3ten » » » $abb = ab^2$, und ohne Rücksicht auf die Ordnung $= 3ab^2$.

» 4ten » » » $bbb = b^3$.

Die bei diesen drei wiederholten Versuchen vorkommenden Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Fälle sind daher, wenn die Ordnung nicht bestimmt ist: a^3, $3a^2 b$, $3ab^2$, b^3, also die Glieder der Entwickelung von $(a+b)^3$.

α) Man findet durch die Fortsetzung dieser Betrachtungen leicht, dafs die einzelnen Wahrscheinlichkeiten für alle jene Fälle, welche eben so bei n wiederholten Versuchen eintreten können, durch die einzelnen Glieder der Entwickelung $(a+b)^n$, d. i. durch

$$a^n,\ \binom{n}{1} a^{n-1} b,\ \binom{n}{2} a^{n-2} b^2,\ \ldots\ b^n$$

ausgedrückt werden, so, dafs also das allgemeine Glied, oder $\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,p} a^{n-p} b^p$ die Wahrscheinlichkeit für den Fall ausdrückt, in welchem in einer beliebigen Ordnung A $n-p$ Mal, und B p Mal unter diesen n Versuchen eintrifft. Und in der That ist die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, dafs unter n Versuchen A $q = n - p$ Mal und B p Mal in einer bestimmten Ordnung zutrifft oder Statt findet $= a^q b^p$; und da sich die n Elemente, von denen q und dann wieder p für sich gleich sind (wenn man gleich wieder für q seinen Werth setzt),

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+2)(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots(n-p-1)(n-p)} =$$

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.\ldots p}$$ Mal versetzen lassen,

so ist die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen dieser Ereignisse in einer beliebigen Ordnung

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots\ldots p} a^{n-p} b^p,$$

welche sofort mit dem erwähnten allgemeinen Gliede der vorigen Reihe identisch ist.

β) Soll aber A $n-p$ Mal und B p Mal in einer bestimmten Ordnung eintreffen, so darf man nur, wie es sich deutlich zeigt, den Zahlencoefficienten des betreffenden Gliedes der Reihe auslassen, d. i. diesen gleich 1 setzen, um die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall zu haben.

γ) Um die Wahrscheinlichkeit zu finden, daſs A unter n Versuchen wenigstens $n-2$ Mal fällt oder eintrifft, darf man nur erwägen, daſs auch jene Fälle dem Ereigniſs günstig sind, in welchen A $n-1$ oder n Mal zutrifft, um sogleich einzusehen, daſs die Summe der drei ersten Glieder der obigen Entwickelung diese gesuchte Wahrscheinlichkeit ausdrückt; denn man sucht in diesem Falle eigentlich die Wahrscheinlichkeit, daſs A n Mal, oder $n-1$ Mal oder $n-2$ Mal zutrifft. Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit, daſs A unter n Versuchen höchstens $n-2$ Mal eintrifft, gleich der Summe der ganzen Reihe, diese bloſs um die beiden ersten Glieder vermindert. Dasselbe gilt nun auch für B.

Anmerk. 1. Da hier immer $a+b=1$, also auch $(a+b)^n=1$, nämlich die ganze Summe der Reihe immer gleich 1 ist; so beträgt die W., daſs A wenigstens $n-p$ Mal, und jene, daſs A höchstens $n-p-1$ Mal (oder daſs A wenigstens $n-p+1$ Mal und höchstens $n-p$ Mal) unter n Versuchen eintreffen werde, immer die Einheit oder Gewiſsheit, was auch seyn soll.

Anmerk. 2. Da die Binomialcoefficienten gegen die Mitte der Entwickelung zu- und von da gegen den Schluſs der Reihe wieder abnehmen; so wird offenbar, wenn man annimmt, daſs das Ereigniſs B eben so viele Fälle, wie jenes A, für

sich hat, also $b = a$ ist, das mittlere Glied, wenn n gerad, und die beiden mittlern Glieder (die dann einander gleich sind), wenn n ungerad ist, den gröfsten Werth unter allen $n+1$ Gliedern der Entwickelung von $(a+b)^n$ haben. Es hat also im ersten Falle unter allen den zusammengesetzten Ereignissen, welche bei n Versuchen vorkommen können, jenes die gröfste Wahrscheinlichkeit für sich: dafs A eben so oft als B, d. i. jedes $\frac{n}{2}$ Mal zutreffen werde (weil nämlich das mittlere Glied die Form hat $Ka^{\frac{n}{2}}a^{\frac{n}{2}} = Ka^n$, wobei $K = \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{n}{2}}$ unter allen übrigen Coefficienten am gröfsten ist). Im zweiten Falle sind jene Ereignisse die wahrscheinlichsten: dafs A $\frac{n+1}{2}$ Mal, und B $\frac{n-1}{2}$ Mal, oder umgekehrt, A $\frac{n-1}{2}$ Mal und B $\frac{n+1}{2}$ Mal (deren W. einander gleich sind) unter n Versuchen eintreffen werde (die beiden mittlern Glieder sind jetzt $Ka^{\frac{n+1}{2}}a^{\frac{n-1}{2}}$ und $Ka^{\frac{n-1}{2}}a^{\frac{n+1}{2}}$, also jedes $= Ka^n$; dabei ist $K = \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{n-1}{2}}$ wieder der gröfste vorkommende Coefficient der Reihe). In beiden Fällen werden die Glieder der Reihe gegen den Anfang und das Ende zu immer kleiner, es nimmt also auch die Wahrscheinlichkeit in dem Mafse ab, je öfter das Ereignifs A oder jenes B für sich eintreffen soll (so ist die W., dafs A n Mal und B kein Mal, oder B n Mal und A kein Mal während dieser n Versuche eintrifft, nur mehr $1.a^n$ und $1.b^n = 1.a^n$, welches die beiden äufsersten Glieder der Reihe sind, und es hat also K hier den kleinsten möglichen Werth. M. vergl. auch §. 164., Beisp. 1.).

Es mufs hier bemerkt werden, dafs die Wiederholungszahlen von A und B bei jenem zusammengesetzten Ereignisse, welches die gröfste Wahrscheinlichkeit für sich hat, und welche W., wie wir eben gesehen haben, durch das mittlere oder die mittlern Glieder der Binomialentwickelung

ausgedrückt wird, entweder genau, oder doch so nahe wie möglich, mit den einfachen Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse im geraden Verhältnisse stehen; so haben wir nach der vorigen Annahme $a:b=1:1$ und im ersten Falle (wenn n gerad) ebenfalls $\frac{n}{2}:\frac{n}{2}$, welches beziehungsweise die Wiederholungszahlen von A und B für das wahrscheinlichste zusammengesetzte Ereignifs sind, wie $1:1$, also hier genau $\frac{n}{2}:\frac{n}{2}=a:b$. Im zweiten Falle (wenn n ungerad) sind die Wiederholungszahlen $\frac{n-1}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ $\left(\text{oder } \frac{n+1}{2} \text{ und } \frac{n-1}{2}\right)$ zwar nicht genau mehr wie $a:b$, kommen aber dennoch unter allen andern Wiederholungszahlen, die hier für A und B noch Statt finden können

$$\left(\frac{n-3}{2} \text{ und } \frac{n+3}{2}, \text{ oder } \frac{n-4}{2} \text{ und } \frac{n+4}{2}, \ldots \text{ o und } n\right)$$

diesem Verhältnifs am nächsten. Es läfst sich wohl auch schon aus blofsen Vernunftgründen vermuthen, dafs das wahrscheinlichste wiederholte Eintreffen von A und B unter n Versuchen ihren einfachen W. proportionirt seyn wird. Die Richtigkeit und das Gewicht dieser Gründe läfst sich schon einigermafsen aus folgendem Beispiele entnehmen: Die Wahrscheinlichkeit, dafs A unter sechs Versuchen sechs Mal eintrifft, ist (immer noch in der Voraussetzung von $a=b=\frac{1}{2}$) $=a^6=\frac{1}{2^6}$. Die W. hingegen, dafs dabei A drei Mal und auch B drei Mal eintreffen werde (welches also die eben erörterte gröfste W. für alle hier bei sechs Versuchen vorkommenden Ereignisse ist, und wofür man hat $3:3=a:b$), ist $=20a^3b^3=\frac{20}{2^6}$; also ist endlich die relative Wahrscheinlichkeit, dafs eher dieses Ereignifs als das vorige eintreten werde $=\frac{20}{21}$, welche sofort der Gewifsheit schon sehr nahe kommt.

Es läfst sich überhaupt zeigen, dafs wenn allgemein $a:b=p:q$ ist, dann unter allen zusammengesetzten Ereignissen, welche bei $n=r(p+q)$ Versuchen vorkommen können, jenes das wahrscheinlichste ist, welches in der obigen Reihe dem Gliede $Ka^{rp}b^{rq}$ entspricht, bei welchem Ereignisse nämlich A und B beziehungsweise rp und rq Mal eintreffen, also im Verhältnisse ihrer einfachen Wahrscheinlichkeiten wiederholt werden (weil $rp:rq=p:q=a:b$).

So ist z. B. für $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{2}{5}$ (weil immer $a + b = 1$ seyn mufs) und $n = 5$ in der Entwickelung $(a + b)^5$ das Glied $10\, a^3 b^2$, welches sofort die W. ausdrückt, dafs unter diesen fünf Versuchen A 3 Mal und B 2 Mal eintreffen werde, und wobei sich die Wiederholungszahlen 3 und 2 genau wie die einfachen W. a und b verhalten, das gröfste und $= \frac{10 \cdot 27 \cdot 4}{5^5}$ $= \frac{216}{625}$ (nahe $= \frac{1}{3}$) der Entwickelung. Für $n = 10$ ist das Glied $210\, a^6 b^4 = \frac{489888}{1953125}$ (nahe $= \frac{2}{9}$) das gröfste in der Reihe, und dieses drückt die Wahrscheinlichkeit aus, dafs bei zehn Versuchen A 6 Mal und B 4 Mal eintreffen werde, wobei also wieder $6 : 4 = a : b$ ist. Dafs hier diese W. (obschon die gröfste in ihrer Reihe) kleiner als die vorige ausfällt, ist natürlich, da im vorigen Beispiele (bei $n = 5$) der wahrscheinlichste Fall einer unter sechs, hier aber einer unter eilf Fällen ist; und so mufs überhaupt die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes zusammengesetztes Ereignifs um so kleiner werden, je gröfser n wird. Uebrigens können in diesem angenommenen Falle von $a = \frac{3}{5}$ und $b = \frac{2}{5}$ nur jene Potenzen von $a + b$, welche Vielfache von 5 sind, solche Glieder enthalten, in welchen die Exponenten von a und b genau im Verhältnifs von $3 : 2 = a : b$ stehen; für jeden andern Werth von n kommen keine solchen Exponenten vor, und da sind dann jene Glieder die gröfsten, deren Exponenten von a und b diesem Verhältnisse am nächsten kommen.

Es läfst sich ferner auch in jenem Falle, in welchem mehr als zwei Arten von Ereignissen vorkommen, oder die Grössen in mehr als zwei Gruppen getheilt werden müssen, so, dafs also anstatt des Binoms, das Polynom in Anwendung kommt (S. 406, Anmerk. 2.) zeigen, dafs unter allen zusammengesetzten Ereignissen, bei einer bestimmten Anzahl von Versuchen, ebenfalls dasjenige das wahrscheinlichste ist, bei welchem die einzelnen Ereignisse sich im Verhältnisse ihrer einfachen Wahrscheinlichkeit wiederholen.

So wie bei der Zunahme der wiederholten Versuche die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes zusammengesetztes Ereignifs immer kleiner wird, so nimmt im Gegentheile die W., dafs die Wiederholungszahlen für A und B in Bezug auf die Anzahl aller Versuche sich nicht über gegebene, wenn auch noch so enge, Grenzen von den einfachen W. der Ereignisse A und B hinaus entfernen werden, mit der Zahl der Versuche immer mehr zu, und es kann diese W. der Einheit oder Ge-

wifsheit so nahe gebracht werden, als man nur immer will. Von diesem wichtigen Satze, welcher zuerst von *Jacob Bernoulli (Ars conjectandi)* erwiesen wurde, wollen wir nur, um denselben in etwas zu erläutern, Folgendes bemerken:

Nimmt man den einfachen Fall $a=b=\frac{1}{2}$ an, und sucht die Wahrscheinlichkeit, dafs A nicht mehr als $\frac{3}{5}$ und nicht weniger als $\frac{2}{5}$ Mal von der Anzahl aller Versuche (d. i. von $\frac{3}{5}n$ bis $\frac{2}{5}n$) eintreffen werde, wobei, wie man sieht, die Brüche $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{5}$ die einfache W. von A, d. i. $\frac{1}{2}$ so einschliefsen, dafs diese Grenzen nur um $\frac{1}{10}$ davon abweichen; so ist z. B. für $n=5$ oder für fünf Versuche, bei welchen also A höchstens drei und wenigstens zwei Mal vorkommen soll [m. s. oben γ)], die W. $=10a^3b^2+10a^2b^3=\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$. Für $n=10$ dagegen, für welche Anzahl von Versuchen also A zwischen sechs und vier Mal vorkommen darf, ist diese W. $=210a^6b^4+252a^5b^5+210a^4b^6=\frac{672}{1024}=\frac{21}{32}$, also schon $>\frac{5}{8}$. Für $n=20$ darf A von zwölf Mal angefangen bis einschlüssig acht Mal der vorigen Annahme gemäfs vorkommen, so, dafs hier schon die Summe von fünf Gliedern der Reihe genommen werden mufs, um die Wahrscheinlichkeit dieses zusammengesetzten Ereignisses auszudrücken, und diese ist $=\frac{96577}{131072}$ oder nahe $=\frac{6}{8}$. Nimmt man aber $n=100$, so, dafs A höchstens sechzig und wenigstens vierzig Mal unter hundert Versuchen eintreffen soll; so ist die W. (aus der Summe von 21 Gliedern bestehend) circa $=\frac{96}{100}$, also der Einheit schon sehr nahe.

Bernoulli wendet seinen ganz allgemein erwiesenen Satz auf den Fall an, in welchem dem Ereignifs A dreifsig, und jenem B zwanzig Fälle günstig sind, wodurch also $a=\frac{3}{5}$ und $b=\frac{2}{5}$ wird, und sucht die Anzahl der erforderlichen Versuche, um die W. wenigstens $=\frac{1000}{1001}$ dafür zu haben, dafs das Verhältnifs der Wiederholungszahl von A gegen die Anzahl aller Versuche, in den Grenzen von $\frac{31}{50}$ und $\frac{29}{50}$, zwischen welchen die W. von A, d i. $\frac{30}{50}$ sehr eng begrenzt liegt, eingeschlossen seyn werde. Er findet, dafs für $n=25550$, oder nach so vielen Versuchen, diese W. schon etwas $>\frac{1000}{1001}$ ist.

Eben so findet er, dafs wenn in diesem Beispiele die erwähnte W. wenigstens $\frac{10000}{10001}$ oder $\frac{100000}{100001}$ betragen solle, für n beziehungsweise die Werthe oder Wiederholungszahlen:

31258 und 36966, woraus sofort ersichtlich wird, dafs die W. schneller als die Zahl der Versuche wächst.

§. 166.

Beispiele.

1. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem gewöhnlichen Würfel unter vier Würfen *a*) die Zahl 6 ein Mal, also drei Mal eine andere Zahl, *b*) diese Zahl 6 *wenigstens* zwei Mal, und endlich *c*) *höchstens* zwei Mal zu werfen?

Aufl. Hier ist die einfache W. des Ereignisses A, nämlich $a = \frac{1}{6}$, die entgegengesetzte W., oder $b = \frac{5}{6}$, und $n = 4$; also

$$(a + b)^n = (a + b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

a) Die W. in diesem Falle ist das vierte Glied der vorstehenden Entwickelung, nämlich $4ab^3 = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{125}{216} = \frac{125}{324}$ (zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$).

b) Die gesuchte W. wird hier durch die Summe der drei ersten Glieder der vorigen Reihe erhalten; man hat nämlich dafür

$$a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 = \frac{1}{6^4} + \frac{4 \cdot 5}{6^4} + \frac{6 \cdot 25}{6^4} = \frac{19}{144}$$

(zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{8}$).

c) Die W. für diesen Fall erhält man durch die Summe der drei letzten Glieder der genannten Reihe; die gesuchte W. ist demnach

$$= 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4 = \frac{6 \cdot 25 + 4 \cdot 125 + 625}{6^4} = \frac{1275}{1296} = \frac{425}{432}$$

(nahe $= 1$. Zugleich ist diese W. die entgegengesetzte von der, die Zahl 6 wenigstens drei Mal zu werfen, denn diese ist $\frac{1}{6^4} + \frac{4 \cdot 5}{6^4} = \frac{21}{1296} = \frac{7}{432}$; m. vergl. die erste Anmerk. des vorigen Paragraphes).

Anmerk. Manchmal ist es bequemer die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit des erwarteten Ereignisses zu berechnen, und diese dann von der Einheit abzuziehen. Wäre in dem hier gegebenen Beispiele die W. zu finden, dafs die Zahl 6 wenigstens ein Mal geworfen werde; so müfste

man dafür die Summe der vier Glieder:

$$a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 = \frac{1 + 20 + 6.25 + 4.125}{6^4} = \frac{671}{1296}$$

berechnen. Sucht man hingegen die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, nämlich die, daſs die Zahl 6 unter diesen vier Würfen gar nicht, also vier Mal eine andere Zahl geworfen werde, folglich das Gegentheil eintritt; so erhält man dafür $b^4 = \frac{625}{1296}$; folglich ist die gesuchte W. $= 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$ wie vorhin, welche aber auf diese Weise weit einfacher gefunden wurde. Auch läſst der obige Fall *c*) schon eine Vereinfachung dieser Art zu.

2. In einer Urne befinden sich vier weiſse und sechs schwarze Kugeln; wie groſs ist die W. *a*) in sechs Zügen, nach deren jedem die gezogene Kugel wieder in die Urne gethan wird, zwei weiſse und vier schwarze Kugeln, und *b*) in diesen sechs Zügen wenigstens drei Mal eine weiſse Kugel zu ziehen?

Aufl. Hier ist die einfache Wahrscheinlichkeit eine weiſse Kugel zu ziehen (die W. für das Ereigniſs *A*) oder $a = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, und jene, eine schwarze zu ziehen (die W. für das Ereigniſs *B*) oder $b = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

a) Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall wird durch das fünfte Glied der Entwickelung von $(a + b)^6$ ausgedrückt; ohne diese letztere erst zu bilden, sieht man, daſs dieses Glied mit Berücksichtigung der Wiederholungszahlen (von *A* und *B*) von der Form $k a^2 b^4$ seyn muſs, wobei (da unter den sechs Elementen 2 und 4 gleich sind)

$$k = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2 \times 1.2.3.4} = 15$$

der betreffende Coefficient (oder die Permutationszahl) ist. Es ist demnach die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$= 15 . \frac{4}{25} . \frac{81}{625} = \frac{972}{3125} \text{ (zwischen } \tfrac{1}{3} \text{ und } \tfrac{1}{4}\text{).}$$

b) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit für diesen Fall wird, wie man sieht, durch die Summe der vier ersten Glieder der Entwickelung von $(a + b)^6$ erhalten, und diese ist sofort: $\frac{2^6 + 6 . 2^5 . 3 + 15 . 2^4 . 3^2 + 20 . 2^3 . 3^3}{\cancel{6^6}\ 5^6} = \frac{7120}{15625} = \frac{1424}{3125}$ (etwas kleiner als $\frac{1}{2}$).

3. Man wirft ein Geldstück, dessen beide Seiten beziehungsweise mit Kopf und Wappen bezeichnet sind und aufserdem gar keine Verschiedenheit darbieten, so, wie es bei diesem Kopf und Wappen-Spiele üblich ist, in die Höhe; wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in zwei Würfen wenigstens ein Mal Kopf falle (d. i. zu oberst liege)?

Aufl. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit besteht offenbar aus der Summe von $a^2 + 2ab$, wobei $a = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{2}$ ist, weil die einfachen W. für die Ereignisse A und B (dafs beziehungsweise Kopf und Wappen falle) hier einander gleich sind; es ist also diese W. $= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$.

Man kann sich von der Richtigkeit dieses Ergebnisses auch noch so überzeugen: Es sind bei diesen zwei Würfen offenbar folgende Fälle gleich möglich: 1) es fällt das erste und zweite Mal Kopf; 2) das erste Mal Kopf und das zweite Mal Wappen; 3) das erste Mal Wappen und das zweite Mal Kopf; und 4) das erste und zweite Mal Wappen. Und da von diesen vier Fällen die drei ersten der Erwartung oder dem gehofften Ereignisse günstig sind; so hat man ganz einfach für die gesuchte W. $\frac{3}{4}$, wie vorhin *).

Anmerk. 1. Vermindert sich bei den wiederholten Versuchen nach jedem einzelnen Versuche die Anzahl aller Fälle, wie diefs z. B. geschieht, wenn man die aus einer Urne nach und

*) Wollte man einwenden, es seyen bei diesem Spiele, in welchem nämlich A gegen B wettet, unter zwei Würfen wenigstens ein Mal Kopf zu werfen, nur folgende drei Fälle möglich: 1) dafs das erste Mal Kopf fällt, wodurch das Spiel sogleich beendigt ist; 2) dafs das erste Mal Wappen und das zweite Mal Kopf, und endlich 3) dafs beide Mal Wappen fällt, von denen sofort die beiden ersten der Erwartung günstig sind, und sonach die gesuchte W. $= \frac{2}{3}$ seyn sollte: so läge der Fehlschlufs darin, dafs diese drei angeführten Fälle nicht gleich möglich sind (welche Bedingung der einfachen W. nothwendig zum Grunde liegt). Denn die W., das erste Mal Kopf zu werfen, ist $= \frac{1}{2}$, dagegen ist die W. für jeden der beiden folgenden Fälle $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, so, dafs also die richtige W. $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, wie vorhin, ausfällt. In diesen hier erwähnten Irrthum ist in der That der berühmte *d'Alembert (Opuscules Mathématiques, Tom. II.)* verfallen.

nach gezogenen Kugeln nicht wieder nach jedem Zuge hineinwirft; so treten für diese Art andere Formeln ein. Man findet durch eine leichte Betrachtung, dafs wenn A m und B n Fälle für sich hat, und $m + n = s$ gesetzt wird, die Wahrscheinlichkeit, dafs nach p Versuchen, nach deren jedem die Summe um 1 abnimmt, A $p - q$ und B q Mal eintreffen werde

$$= \frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot q} \times \frac{m(m-1)\ldots[m-(p-q)+1] \times n(n-1)\ldots(n-q+1)}{s(s-1)\ldots\ldots\ldots(s-p+1)}.$$

Anmerk. 2. So wie man hier, wo nur zwei Arten von Ereignissen vorkommen, von dem Binome Gebrauch macht, so mufs man, wenn deren mehrere eintreten können, das Polynom benützen.

Befinden sich z. B. in einer Urne drei weifse, fünf schwarze und vier rothe Kugeln, so werden respective die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Fälle, welche bei vier wiederholten Zügen, nach deren jedem die gezogene Kugel wieder in die Urne gethan wird, vorkommen können, durch die Glieder der Entwicklung von $(a + b + c)^4$ ausgedrückt, wenn nämlich a, b, c beziehungsweise die einfachen Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen einer weifsen, schwarzen und rothen Kugel sind.

Es wäre also z B. die Wahrscheinlichkeit in diesen vier Zügen eine weifse, zwei schwarze und eine rothe Kugel zu ziehen, durch das Glied Kab^2c, wo $K = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 12$ ist, d. i. durch $12\,ab^2c$, die W. dabei wenigstens zwei Mal eine weifse Kugel zu ziehen, durch die Summe $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^3c + 12a^2bc + 6a^2c^2$ ausgedrückt u. s. w.

Können überhaupt die Ereignisse A, B, C, D, ... deren einfache Wahrscheinlichkeiten beziehungsweise a, b, c, d... sind, eintreten; so wird die W., dafs bei n Versuchen A α Mal, B β Mal, C γ Mal, D δ Mal u. s. w. in einer beliebigen Ordnung eintreffen werde, wobei natürlich $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = n$ ist, durch $Ka^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$

$$\text{wo } K = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \ldots \alpha \times 1 \cdot 2 \ldots \beta \times 1 \cdot 2 \ldots \gamma \times \ldots} \text{ ist,}$$

ausgedrückt. Setzt man $K = 1$, so drückt $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ die Wahrscheinlichkeit aus, dafs sich diese Fälle in einer bestimmten oder vorgeschriebenen Ordnung ereignen oder zutragen werden. Wie bekannt, drückt K nicht blofs die An-

zahl aller Versetzungen von n Elementen, unter denen α, dann β, dann γ u. s. w. gleich sind; sondern auch noch aus, wie oft sich, wenn z. B. nur die vier Fälle A, B, C, D vorkommen, n Gröſsen in vier Gruppen zerlegen lassen, von denen die erste α, die zweite β, die dritte γ und die vierte δ dieser Gröſsen enthält.

Die Steigerung der Wahrscheinlichkeit durch fortgesetzte Versuche.

§. 167.

Nach §. 165. drückt das letzte Glied b^n der Entwicklung von $(a+b)^n$, wobei a die einfache W. des Ereignisses A, und b die entgegengesetzte, oder die W. des Ereignisses B bezeichnet, die Wahrscheinlichkeit aus, daſs unter n Versuchen A kein einziges Mal, oder was dasselbe ist, daſs B hinter einander n Mal eintreffen werde. Nun wird aber wegen $b < 1$ offenbar b^n um so kleiner, je grösser n wird; es wird nämlich die W., daſs A unter n Versuchen kein Mal eintreffe, immer kleiner, folglich die entgegengesetzte W. $1 - b^n$ oder jene, daſs A dabei wenigstens Einmal eintreten werde, immer gröſser, wie die Zahl der Versuche zunimmt. Es läſst sich also natürlich die Frage aufstellen, nach wie vielen Versuchen diese W. einen bestimmten oder gegebenen Grad der Gröſse erreicht haben wird?

Wollte man bei Beantwortung dieser Frage unmittelbar die Wahrscheinlichkeit, daſs A unter n Versuchen wenigstens Einmal eintreffe, in Rechnung bringen, so müſste man aus der Gleichung

$$a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{1} a b^{n-1} = g,$$

wobei g der gegebene Grad der W. ist, n bestimmen, was nur versuchsweise geschehen kann. Nimmt man hingegen, was weit einfacher ist, die entgegengesetzte W. in Rechnung, so ist n aus der Gleichung $b^n = g'$ zu bestimmen, wobei $g' = 1 - g$ ist. Aus dieser Gleichung folgt aber, wenn man Logarithmen nimmt:

$$n = \frac{log.\, g'}{log.\, b} = \frac{log.\, (1-g)}{log.\, b}.$$

Dieser Ausdruck für n zeigt, daſs die Zahl der Versuche oder Wiederholungen um so gröſser seyn muſs, je mehr sich g oder b der Einheit nähert.

§. 168.

Beispiele.

1. Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf einen Wurf einen Pasch zu werfen, ist (§. 159.) $= \frac{1}{6}$. Nach wie vielen Versuchen wird die W., daſs wenigstens Einmal ein Pasch geworfen werde $= \frac{1}{2}$, und nach wie vielen Versuchen $= \frac{3}{4}$ seyn?

Aufl. Für den ersten Fall ist $g = \frac{1}{2}$, $b = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, folglich $n = \frac{log\ \frac{1}{2}}{log.\ \frac{5}{6}} = \frac{log.\ 2}{log.\ 6 - log.\ 5} = \frac{\cdot 30103}{\cdot 07918} = 3\cdot 8$, so, daſs diese W. nach vier Versuchen schon $> \frac{1}{2}$ ist.

Für den zweiten Fall ist $g = \frac{3}{4}$, also

$$n = \frac{log.\ \frac{1}{4}}{log.\ \frac{5}{6}} = \frac{log.\ 4}{log.\ 6 - log.\ 5} = 7\cdot 6,$$

so, daſs also nach acht Versuchen die erwähnte W. schon $> \frac{3}{4}$ ist.

2. Wie oft muſs man mit vier Würfeln werfen, um die W. $= \frac{1}{2}$ dafür zu erhalten, daſs dabei wenigstens Einmal die auf einander folgenden Zahlen 3, 4, 5, 6 fallen?

Aufl. Da diese vier Zahlen auf $4 . 3 . 2 . 1 = 24$ verschiedene Arten geworfen werden können, und bei 4 Würfeln im Ganzen 6^4 Fälle gleich möglich sind; so ist die einfache W. des verlangten Ereignisses $a = \frac{24}{6^4} = \frac{1}{54}$, also die entgegengesetzte W. $b = 1 - \frac{1}{54} = \frac{53}{54}$; da endlich noch $g = \frac{1}{2}$ ist, so hat man

$$n = \frac{log.\ \frac{1}{2}}{log.\ \frac{53}{54}} = \frac{log.\ 2}{log.\ 54 - log.\ 53} = 37\cdot 08.$$

Nach 37 Versuchen wird also sehr nahe die W. $= \frac{1}{2}$ seyn, daſs unter diesen wenigstens Einmal die auf einander folgenden Zahlen 3, 4, 5, 6 fallen.

Regeln beim Wetten.

§. 169.

Eine Wette, welche zwischen zwei oder mehreren Personen eingegangen wird, kann nur dann gleich genannt werden, wenn der Einsatz oder die Mise eines jeden, genau seiner Wahrscheinlichkeit, die Wette zu gewinnen, proportionirt ist; dasselbe gilt überhaupt auch bei jedem Spiele hinsichtlich des Einsatzes. Am einfachsten kann die Richtigkeit dieses Satzes bei dem gewöhnlichen Würfelspiele nachgewiesen werden; denn nimmt man an, daſs von sechs Personen jede auf eine der sechs Zahlen setzt, so, daſs dadurch alle sechs Zahlen des Würfels besetzt werden, so ist klar, daſs der Einsatz eines jeden gleich groſs seyn muſs, weil jeder die nämliche oder eine gleiche Wahrscheinlichkeit zu gewinnen hat. Uebernimmt nun einer mehrere Antheile und vertritt sonach die Stelle von mehreren andern Spielern, so bleibt offenbar Alles dasselbe, wenn er nur den einfachen Einsatz so oft Mal leistet, so viele Antheile er übernommen hat. Uebernimmt z. B. B den Antheil von fünf Spielern, welche etwa beziehungsweise auf die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 gesetzt haben, und spielt mit jenem A, welcher auf die Zahl 1 setzt; so wettet eigentlich A, daſs die Zahl 1 falle, während B wettet, daſs diese Zahl nicht, sondern eine der übrigen fünf fallen wird. Da nun hier offenbar B den fünffachen Einsatz des A leisten muſs, und die Wahrscheinlichkeit, welche A zum Gewinnen hat $= \frac{1}{6}$, jene, welche B für sich hat $= \frac{5}{6}$ ist; so verhalten sich in der That die Einsätze von A und B so gegen einander, wie die Wahrscheinlichkeiten, welche A und B für sich haben, um das Spiel zu gewinnen, nämlich wie $1 : 5$; und so auch in allen übrigen Fällen.

Setzen also zwei Spieler respective die Summen a, a', und sind ihre Wahrscheinlichkeiten, das Spiel zu gewinnen, w und w'; so wird zu einer rechtmäſsigen oder gleichen Wette erfordert, daſs

$$a : a' = w : w' \text{ oder } aw' = a'w \text{ sey:}$$

es müssen nämlich die Producte aus dem Gewinnste, den jeder hofft, in die Wahrscheinlichkeit, diesen zu erlangen, d. i. die *mathematischen Hoffnungen* oder *Erwartungen* einander gleich seyn.

Beispiel 1.

Wettet z. B. *A*, daſs er mit zwei Würfeln auf einen Wurf die Summe 5 werfen wird, und behauptet *B* das Gegentheil; so müssen sich ihre Einsätze respective wie 1 : 8 verhalten, weil (§. 160.) die Wahrscheinlichkeit, diese genannte Summe zu werfen $= \frac{1}{9}$, und die des Gegentheils $= \frac{8}{9}$ ist.

Beispiel 2.

Verspricht beim Kopf- und Wappen-Spiel Peter dem Paul 2 Groschen, wenn Wappen auf den ersten Wurf, und 4 Groschen, wenn es erst auf den zweiten Wurf fällt; so ist die mathematische Hoffnung des Paul, da die einfachen Wahrscheinlichkeiten der genannten Ereignisse beziehungsweise $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ sind, $= 2 . \frac{1}{2} + 4 . \frac{1}{4} = 2$ Groschen, und eben so viel muſs also Paul dem Peter im Voraus geben, weil Einsatz und Hoffnung gleich seyn sollen.

Soll hingegen Paul, wenn auf den zweiten Wurf Wappen fällt, die 4 Groschen dennoch erhalten, wenn es auch vielleicht schon auf den ersten Wurf fiel; so ist jetzt die W., auf den zweiten Wurf Wappen zu werfen, da der erste Wurf hierauf keinen Einfluſs hat, $= \frac{1}{2}$, also die Hoffnung des Paul: $2 . \frac{1}{2} + 4 . \frac{1}{2} = 3$ Groschen, die er sofort dem Peter vor dem Spiele geben muſs (von beiden Fällen kann man sich durch ein richtiges Raisonnement leicht überzeugen).

Rechtmäſsige Theilung des Einsatzes vor Beendigung des Spiels.

§. 170.

Einer der merkwürdigsten und mitunter schwierigsten Fälle in Bezug auf die rechtmäſsige Theilung des Einsatzes

findet Statt, wenn das Spiel nicht durch einen einzigen, sondern erst nach mehreren Versuchen entschieden, und dasselbe mit dem Willen der Spieler oder sonstiger Hindernisse wegen nicht ganz ausgespielt, sondern abgebrochen wird, nachdem schon einige Versuche gemacht worden sind. Da man bei jedem Spiele von dem Grundsatze ausgeht, dafs jeder Spieler auf seinen geleisteten Einsatz verzichtet, dagegen, wenn der Zufall über den ganzen Einsatz noch nicht entschieden hat, zur Entschädigung, auf diesen ganzen Einsatz ein Recht besitzt, welches seiner Hoffnung, d. i. seiner Wahrscheinlichkeit, das Spiel zu gewinnen, proportionirt ist; so mufs dieser Satz in allen Fällen, in welchen solche Theilungen vorkommen, zur Grundlage dienen.

Beispiel 1.

Wettet z. B. A, mit einem Würfel zwei Mal hinter einander die Zahl 6 zu werfen; so darf er, dem vorigen Paragraphen zufolge, nur die Summe 1 setzen, während sein Gegner B den Einsatz 35 leisten mufs. Gehen die Spieler aus einander, bevor noch ein Wurf geschehen ist, so müssen A und B den ganzen Einsatz 36 in zwei solche Theile theilen, dafs, wenn A die Summe a und B jene b davon erhält, $a : b = \frac{1}{36} : \frac{35}{36}$ Statt findet, also A 1 und B 35, d. i. jeder seinen geleisteten Einsatz unverändert zurück erhält, wie sich das von selbst versteht.

Hat aber A bereits Einmal geworfen und die Zahl 6 getroffen, so haben sich dadurch die Hoffnungen der Spieler A und B, das Spiel zu gewinnen, ganz anders gestellt: A gewinnt nun, wenn er im nächsten Wurf die Zahl 6 wirft, wofür er die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{6}$ hat; B hingegen gewinnt, wenn A diese Zahl nicht wirft, wofür die Wahrscheinlichkeit $= \frac{5}{6}$ ist. Es verhalten sich also vor dem zweiten Wurfe die mathematischen Hoffnungen, welche A und B haben, das Spiel zu gewinnen, respective wie 1 : 5. es mufs also auch, wenn sich die Spieler nach dem ersten Wurfe trennen, der ganze Einsatz im Verhältnisse von 1 : 5 getheilt werden, so, dafs nun A davon 6 und B 30 erhält.

Die Regel, nach welcher der ganze Einsatz vor Beendigung eines Spieles getheilt werden muſs und daher Theilungsregel heiſst*), wurde gleichzeitig von dem berühmten *Pascal* (geb. zu Clermont in der Auvergne 1623; gest. zu Paris 1662) und dem scharfsinnigen, verdienstvollen *Fermat* (geb. zu Toulouse um das J. 1595; gest. 1665) und zwar auf verschiedene Weisen, von denen sich die letztere, allgemeinere, auf die Combinationen gründet und auf jede Anzahl von Spielern anwendbar ist**), entwickelt, und durch ihre Anwendung sofort der Grund zur eigentlichen Wahrscheinlichkeits-Rechnung gelegt.

Beispiel 2.

Ein einfacher hierher gehöriger (und von *Pascal* selbst behandelter) Fall ist folgender: Zwei Spieler *A* und *B* kommen überein, daſs derjenige den ganzen Einsatz bekommen soll, welcher zuerst drei Parthien gewonnen haben wird; nachdem nun *A* bereits zwei, und *B* eine Parthie gewonnen hat, trennen sie sich; es fragt sich, wie dieser Einsatz unter beide Spieler vertheilt werden müsse?

*) M. s. *Oeuvres de Blaise Pascale. à la Haye* 1779 (in 8.) *T.* IV.

**) Dabei ist es möglich, daſs das Spiel einmal bestimmt enden, oder daſs dieses nicht nothwendiger Weise der Fall seyn muſs. Wird z. B. das Spiel von demjenigen gewonnen, welcher zuerst n Parthien gewinnt, so sieht man leicht, daſs höchstens $2n-1$ Parthien bis zur Entscheidung des Spiels erforderlich seyn können. Soll dagegen der Gewinnende n Parthien mehr als der Gegner haben, dann kann es geschehen, daſs das Spiel niemals zu Ende kommt, und es ist also das Ende unbestimmbar.

Hier wollen wir noch bemerken, daſs eigentlich die ungewissen Summen, d. i. jene, welche vom Zufalle abhängen, es sind, welche den Ausdruck »mathematische Hoffnung« *(sors, lucrum)*, unter welcher man sofort das Product einer ungewissen Summe, in die W. diese zu gewinnen versteht, veranlaſst haben. Denn wird der Satz vor Beendigung des Spiels vertheilt, so haben die Spieler nur erst Hoffnung, und man kann diese mathematische Hoffnung eines Spielers vor Beendigung des Spiels offenbar auch als die Summe ansehen, die ihm ein anderer geben müſste, wenn er dabei seinen Platz einnehmen wollte.

Aufl. Im Falle, das Spiel fortgesetzt worden wäre, würde *A* das Spiel gewonnen haben, wenn er entweder die folgende Parthie gewonnen hätte, wofür die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2}$ ist, oder auch, wenn er diese Parthie verloren, dagegen die nächstfolgende gewonnen hätte, welches zusammengesetzte Ereignifs die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ für sich hat; es ist also in dem Augenblicke, in welchem *A* und *B* das Spiel abbrechen, die Hoffnung oder Wahrscheinlichkeit des *A*, das Spiel zu gewinnen $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

B dagegen würde das Spiel nur haben gewinnen können, indem er die beiden folgenden Parthien hinter einander gewonnen hätte, wofür die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ist; und diese drückt sofort auch die Hoffnung aus, welche *B* beim Abbrechen des Spiels hat, dasselbe zu gewinnen. Es mufs daher der obigen Regel gemäfs, von dem ganzen Einsatze *A* $\frac{3}{4}$ und *B* $\frac{1}{4}$ erhalten, so dafs, wenn z. B. jeder 32 Ducaten gesetzt hätte, *A* davon 48 und *B* 16 erhielte (hier ist wieder $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, wie es seyn soll).

§. 171.

Auf das Princip der wiederholten Versuche gestützt, läfst sich wieder zeigen, dafs, wenn man zwischen zwei Spielern einen, wenn auch noch so geringen, Unterschied in ihren mathematischen Hoffnungen annimmt, sich durch fortgesetzte Versuche dennoch jede beliebige Wahrscheinlichkeit hervorbringen läfst, dafs der begünstigte Spieler stets im Vortheile oder Gewinne, der Gegner aber immer im Nachtheile oder Verluste seyn wird. Ist dagegen eine Wette gleich oder *al pari* eingegangen worden, so werden die wiederholten Versuche dazu dienen, die Gewinnste und Verluste immer mehr und mehr auszugleichen, und wirken sofort dahin, den geringsten Vortheil aufzuhäufen, was auch die tägliche Erfahrung bestätiget. Personen, welche täglich Gesellschaftsspiele unter einander spielen, bei welchen die Bedingungen für beide Theile gleich sind, die also auch nahe gleiche Stärke im

Spiele besitzen, sehen, wie sich mit der Zeit die Verluste gegen ihre Gewinnste nach und nach ausgleichen. Dagegen verschaffen sich die Banquiers bei Hazardspielen, denen sofort von ihren Gegnern gewisse Vortheile zugestanden werden, im Falle sie nur Fonds genug besitzen, um einzelne grofse Verluste decken zu können, mit der Zeit ein sicheres und immer wachsendes Einkommen.

Auf denselben Umstand gründet sich auch der sichere Gewinn, oder wenigstens der Fortbestand der Lotterien Nehmen wir als Beispiel die gewöhnliche Zahlenlotterie, in welcher von den 90 Nummern jedesmal fünf gezogen werden, und untersuchen, welche Vortheile dieselbe gegen die Spieler voraus hat.

Da die Wahrscheinlichkeit, eine von den 90 Nummern zu errathen $= \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ ist, so sollte der einfache Auszug mit dem 18fachen Einsatze bezahlt werden; es wird jedoch (wenigstens in Frankreich) die Einlage dabei nur 15 Mal genommen zurückbezahlt, so, dafs sich das Lotto dabei um die Gröfse $(18 - 15) \frac{1}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ im Vortheile befindet. [Der Spieler sollte nämlich den 17fachen Einsatz gewinnen, er gewinnt aber nur den 14fachen, folglich ist der Vortheil des Lotto $= (17 - 14) \frac{1}{18} = \frac{3}{18}$.]

Die Wahrscheinlichkeit, eine Nummer auf einen bestimmten, z. B. den ersten Ruf zu gewinnen, ist $= \frac{1}{90}$; da aber der Einsatz nicht 90, sondern nur 70fach zurückbezahlt wird, so ist der Vortheil des Lotto hierbei $= \frac{90-70}{90} = \frac{2}{9}$ $[(89 - 69) \frac{1}{90} = \frac{2}{9}]$.

Die Wahrscheinlichkeit für eine Ambe ist $= \frac{2}{801}$ *),

*) Die 90 Nummern geben nämlich $\frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = 4005$ Amben, $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480$ Ternen, $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2555190$ Quaternen, und $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43949268$ Quinternen. Dagegen geben die gezogenen fünf Nummern $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ Amben, $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ Ternen, $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

also sollte dem Spieler, wenn er eine Ambe gewinnt, sein Einsatz $\frac{801}{2} = 400{\cdot}5$ Mal erstattet werden; dagegen zahlt das Lotto nur den 270fachen Einsatz dafür, und ist sonach dabei um die Gröſse $\frac{400{\cdot}5 - 270}{400{\cdot}5} = \frac{261}{801} = \frac{29}{89}$ (nahe $= \frac{1}{3}$) im Vortheile (der Spieler gewinnt nämlich anstatt des 399·5fachen Einsatzes nur den 269fachen; folglich ist das Lotto um $(399{\cdot}5 - 269)\,\frac{2}{801} = \frac{261}{801}$ im Vortheile).

Eine Terne oder das Herauskommen von drei besetzten Nummern wird mit dem 5500fachen Einsatze bezahlt. Da aber die W., eine solche zu gewinnen $= \frac{1}{11748}$ ist, so sollte er den 11747fachen Einsatz gewinnen; das Lotto ist demnach hier, da er diesen Einsatz nur 5499 Mal gewinnt, um die Gröſse $\frac{(11747 - 5499)}{11748} = \frac{142}{267}$ (etwas $> \frac{1}{2}$) im Vortheile.

Da endlich die Quaterne mit dem 75000, und die Quinterne mit dem 1000000fachen Einsatze bezahlt wird, dagegen die Wahrscheinlichkeiten, eine Quaterne oder Quinterne zu gewinnen, respective $\frac{1}{511038}$ und $\frac{1}{43949268}$ sind; so findet man wie vorhin für den Vortheil des Lotto im ersten Falle: $\frac{72673}{85173}$ $(> \frac{5}{6})$ und im zweiten Falle: $\frac{10737317}{10987317}$ $(> \frac{42}{43})$.

Es muſs jedoch bemerkt werden, daſs dieser hier für das Lotto berechnete Gewinn wieder dadurch etwas vermindert wird, daſs nicht alle Combinationen der Nummern gleich stark besetzt werden; was aber vorausgesetzt werden muſs, wenn dasselbe ganz diesen entwickelten Vortheil haben soll. Uebrigens braucht diese Ausgleichung bei weitem nicht vollkommen Statt zu finden, um dem Lotto dennoch einen Gewinn zu sichern; was indeſs der Kosten und des Risico wegen nothwendig ist, sobald sein Fortbestand, nach dem Wunsche der Spieler, nicht in Frage gestellt seyn soll.

$= 5$ Quaternen, und $\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} = 1$ Quinterne. Es sind demnach die Wahrscheinlichkeiten, eine Ambe, Terne, Quaterne oder Quinterne zu errathen, beziehungsweise:

$\frac{10}{4005} = \frac{2}{801}$; $\frac{10}{117480} = \frac{1}{11748}$; $\frac{5}{2555190} = \frac{1}{511038}$ und $\frac{1}{43949268}$.

Die Wahrscheinlichkeit *a posteriori.*

§. 172.

Bei allen bisher behandelten Fällen hat sich das Verhältnifs der günstigen, zu allen gleich möglichen Fällen überhaupt, aus den gegebenen Bedingungen der Aufgabe im Voraus, also auch die Wahrscheinlichkeit *a priori* bestimmen lassen. Ist dieses Verhältnifs aber unbekannt, und soll es erst, so weit dieses möglich ist, aus Beobachtungen abgeleitet werden; so wird die darauf gebaute Wahrscheinlichkeit eine Wahrscheinlichkeit *a posteriori* genannt.

Kennt man z. B. die Bedingungen einer Urne, aus welcher die beobachteten Ereignisse hervorgehen, nicht vollständig; so mufs man alle möglichen Combinationen oder Bedingungen untersuchen, unter welchen diese Ereignisse wirklich eintreten können, um für diese wenigstens eine Art von mittleren Wahrscheinlichkeit hervorzubringen, welche sich der wahren um so mehr nähern wird, je zahlreicher die Erfahrungen oder angestellten Beobachtungen sind.

Gesetzt, man habe aus einer Urne, welche drei Kugeln enthält, deren jede entweder weifs oder schwarz seyn kann, wobei man also über die eigentliche Anzahl der weifsen und schwarzen Kugeln ungewifs ist, in drei Zügen, nachdem jedes Mal die gezogene Kugel wieder in die Urne geworfen wurde, zwei weifse und eine schwarze Kugel gezogen; so können über die Bedingungen dieser Urne die beiden folgenden, und auch nur diese beiden Hypothesen aufgestellt werden: entweder enthält die Urne α) zwei weifse und eine schwarze, oder β) eine weifse und zwei schwarze Kugeln.

Bezeichnet a die Wahrscheinlichkeit, eine weifse, und b jene, eine schwarze Kugel zu ziehen; so ist nach α) oder der ersten Hypothese, $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, und nach der zweiten oder β): $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$. Nun wird die Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereignifs „zwei weifse und eine schwarze Kugel zu ziehen (§. 165.), durch $3a^2b$ ausgedrückt; folglich ist diese nach den beiden Hypothe-

sen α) und β) respective $\frac{3.4}{3.9} = \frac{4}{9}$ und $\frac{3.2}{3.9} = \frac{2}{9}$. Man sieht also, dafs die zweite Hypothese die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses nur halb so grofs als die erste gibt, und es ist auch in der That, wie leicht zu sehen, diese zweite Hypothese weniger wahrscheinlich als die erste. Weil nun nach der Leichtigkeit, mit welcher die aufgestellte Hypothese die beobachteten Ereignisse herbeiführt, auch der Grad der Wahrscheinlichkeit dieser Hypothese beurtheilt werden mufs; so hat man folgenden Grundsatz aufgestellt: die Wahrscheinlichkeiten der Ursachen oder Hypothesen sind den Wahrscheinlichkeiten, welche daraus für die beobachteten Ereignisse hervorgehen, selbst proportionirt.

Im angeführten Beispiele also verhalten sich diese Hypothesen wie $4 : 2 = 2 : 1$. Da ferner hier eine der beiden aufgestellten Hypothesen nothwendig Statt haben mufs, so mufs auch die Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten $= 1$ seyn. Aus dieser Bemerkung nun, verbunden mit den vorhin gefundenen Verhältnifszahlen, erhält man die Wahrscheinlichkeit der Hypothesen, indem man die betreffenden Zahlen 2 und 1 durch ihre Summe theilt; es ist sonach die Wahrscheinlichkeit der ersten Hypothese $= \frac{2}{3}$, und die der zweiten Hypothese $= \frac{1}{3}$ (denn nun ist, wie es seyn soll, erstlich $\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$ und dann auch $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$). Es kann noch bemerkt werden, dafs sich die Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen auch bilden, indem die W. des beobachteten zusammengesetzten Ereignisses nach der betreffenden Hypothese genommen, durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten nach allen Hypothesen getheilt wird; so ist

$\frac{\frac{4}{9}}{\frac{6}{9}} = \frac{2}{3}$ die Wahrscheinlichkeit der ersten, und $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{6}{9}} = \frac{1}{3}$ die Wahrscheinlichkeit der zweiten Hypothese dieses Beispiels.

Sind demnach allgemein $H, H', H'', \ldots$ die Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen, und $A, A', A'', \ldots$ die bezie-

hungsweise darnach berechneten Wahrscheinlichkeiten der beobachteten Ereignisse; so ist wegen $H:A = H':A' = H'':A'' = \ldots$ (gemäſs des vorigen Grundsatzes), auch $H+H'+H''+ \quad : A+A'+A''+ \quad = H:A = H':A' = \ldots$, oder da $H+H'+H''+\ldots = 1$ ist, auch $1 : A+A'+A''+\ldots\ldots = H:A = H':A' = H'':A'' = \ldots$; daraus folgt endlich:

$$H = \frac{A}{A+A'+A''+\ldots}, \quad H' = \frac{A'}{A+A'+A''+\ldots},$$

$$H'' = \frac{A''}{A+A'+A''+\ldots}, \text{ u. s. w.}$$

Nachdem die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ursachen oder Hypothesen ausgemittelt sind, kann man auch die Wahrscheinlichkeit für ein folgendes Ereigniſs finden. So wäre in unserm Beispiele die Wahrscheinlichkeit auf den folgenden oder vierten Zug eine weiſse Kugel zu ziehen $= \frac{2}{3}.\frac{2}{3} + \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{5}{9}$, und jene, eine schwarze zu ziehen $= \frac{1}{3}.\frac{2}{3} + \frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{4}{9}$. Es darf nämlich nur die Wahrscheinlichkeit des erwarteten Ereignisses für jede Hypothese gesucht, und mit der W. der betreffenden Hypothese selbst multiplicirt werden, so drückt die Summe dieser zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten die gesuchte W. aus. Da hier auf den vierten Zug gewiſs entweder eine weiſse oder eine schwarze Kugel gezogen wird, so muſs wieder die Summe der gefundenen Wahrscheinlichkeiten $= 1$ seyn; und es ist in der That $\frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1$.

§. 173.

Zu der im vorigen Paragraphen betrachteten Art von Wahrscheinlichkeiten gehört auch der Fall, in welchem z. B. bei dem Werfen mit einem Würfel ein auffallendes Wiederkommen von einer bestimmten Seite desselben beobachtet wird, so, daſs man mit Grund vermuthen kann, es müsse dieser Umstand in einer besondern Art der Construction des Würfels, oder in der Geschicklichkeit des Spielers liegen. In einem solchen Falle sind nicht mehr, wie bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit *a priori*, die vergangenen Ereignisse ohne Einfluſs auf die folgen-

den; sondern es ist wahrscheinlicher, daſs das Ereigniſs, zu dessen Gunsten die Ungleichheit in der Construction u. s. f. Statt hat, und die man aus den ersten Beobachtungen vermuthet, eher als ein anderes eintreffen werde.

Gesetzt, die besondere Beschaffenheit eines Geldstükkes begünstige (beim Werfen) das Erscheinen der einen Seite, ohne daſs es bekannt wäre, welche. Bezeichnen wir nun die genaue Wahrscheinlichkeit (W. *a priori*) für das Erscheinen der Seite A allgemein durch a, und mit α den positiven oder negativen Unterschied zwischen dieser und der wirklich Statt findenden Wahrscheinlichkeit; so ist die W., daſs A n Mal hinter einander eintreffe:

$$(a \pm \alpha)^n = a^n \pm n a^{n-1} \alpha + \ldots,$$

während die genaue Wahrscheinlichkeit $= a^n$ ist; dabei gilt in dieser Entwicklung das obere oder untere Zeichen, je nachdem die Ungleichheit diesem Ereignisse zum Vortheile oder Nachtheile gereicht. So lange man aber nicht weiſs, in welchem Sinne, ob im positiven oder negativen, dieser Unterschied α zu nehmen ist, so lange sind auch beide Fälle gleich möglich, und man hat für die Wahrscheinlichkeit der Wiederholungen nach der ersten Hypothese: $\frac{1}{2}(a+\alpha)^n$ und nach der zweiten: $\frac{1}{2}(a-\alpha)^n$, folglich ist die ganze W.

$$= \tfrac{1}{2}(a+\alpha)^n + \tfrac{1}{2}(a-\alpha)^n = a^n + \binom{n}{2} a^{n-2}\alpha^2 + \binom{n}{4} a^{n-4}\alpha^4 + \ldots$$

Da alle Glieder dieser Entwicklung positiv sind, so übersteigt diese Wahrscheinlichkeit die W. *a priori*, welche nur $= a^n$ ist, um die Summe aller Glieder, vom zweiten angefangen.

Dasselbe findet man auch für die Wahrscheinlichkeit der Wiederholungen des entgegengesetzten Ereignisses B.

Wir machen endlich hier noch die Bemerkung, daſs die Wahrscheinlichkeit *a posteriori*, wobei die Gesammtzahl aller Fälle unbegrenzt ist, die allerwichtigsten und nützlichsten Anwendungen im gemeinen Leben, wie z. B. auf die Gröſse der Bevölkerung eines Staates, aus den Geburts- und Sterblichkeitslisten oder Mortalitätstabellen; auf

die Bestimmung der menschlichen Lebensdauer; auf Leibrenten, Assecuranzen, Witwengesellschaften u. s. w. findet; worauf wir uns aber hier nicht weiter einlassen können, und sofort auf jene Werke, welche sich ausschliefslich mit diesem wichtigen Gegenstande befassen, verweisen müssen *).

Zum Beschlusse dieses interessanten Kapitels wollen wir noch einige vermischte Beispiele hersetzen.

Vermischte Beispiele.

§. 174.

1. **Von einem Spiele von 32 Karten bekommen fünf Spieler jeder drei Karten, die sechzehnte Karte ist Trumpf; wie grofs ist die W., dafs *A* einen und *nur* einen Trumpf erhält.**

Erste Aufl. Denkt man sich die sechzehnte Karte sogleich weggelegt, so erhellet, dafs *A* seine drei Karten aus 31 Blättern, unter welchen sich noch sieben Trümpfe befinden. erhält, welches auf $\frac{31 \cdot 30 \cdot 29}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ verschiedene Arten

*) *Moivre*, *Annuities on lives. Lond.* 1724, 1742 und 1750. Auch existirt davon eine italienische Uebersetzung von *Greg. Fontana (Dottrina degli Azzardi etc. Milano* 1776. 8.)
Simpson (Thomas), Doctrine of Annuities and Reversions. Lond. 1742. Auch findet sich ein hieher gehöriges Stück in seinen: »*Select exercices for the young proficients in the mathem.*« *Lond.* 1752.
Condorcet, Élémens du calcul des Probabilités, und vorzüglich dessen: *Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des decisions.* (Beide von *Lacroix* angeführt.)
Euler, sur les rentes viagères; ferner: *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain,* in den *Mém. de Berlin. T.* XVI. *Année* 1760; und: *Eclaircissemens sur les caisses mortuaires etc. Petersb.* 1776. 4.
Weitere Abhandlungen über diesen Gegenstand existiren: von *Kritter* (Göttingen 1768 und Hamb. 1777); *Lambert* (Beiträge zur Mathem. 3. Theil); *Florencourt* (Altenburg 1781); *Tetens* (Leipzig 1785); *G. H Meyer* (2 Bde. Kopenhagen 1822 und 23); *Littrow* (Anleit. z. Berechn. der Lebensrenten u. Witwenpensionen. Wien 1829 u. 32); u. m. A. Mehreres hierüber findet man auch in dem, Anfängern zu empfehlenden, Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung von *Lacroix* (übersetzt aus dem Französ. von Dr. *E. Unger.* Erfurt 1818).

geschehen kann; darunter gibt es (wenn man sich die sieben Trümpfe wegdenkt und die übrigen zu zwei verbindet) $7 \cdot \frac{24 \cdot 23}{1 \cdot 2}$ Verbindungen, welche einen und nur einen Trumpf enthalten; folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{7 \cdot 3 \cdot 24 \cdot 23}{31 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{1932}{4495}$ (etwas $< \frac{1}{2}$).

Zweite Aufl. Gesetzt, *A* bekommt die erste Karte, so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs diese ein Trumpf sey $= \frac{7}{31}$; jene, daſs die zweite kein Trumpf seyn wird $= \frac{24}{30}$; und jene, daſs auch die dritte kein Trumpf sey $= \frac{23}{29}$; folglich ist die Wahrscheinlichkeit, daſs diese drei Ereignisse in dieser angeführten Ordnung Statt finden werden $= \frac{7 \cdot 24 \cdot 23}{31 \cdot 30 \cdot 29}$ und da, wenn von der Ordnung, wie es hier der Fall ist, abstrahirt wird, *A* einen Trumpf und zwei Nichttrümpfe auf drei verschiedene Arten erhalten kann; so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{3 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 23}{31 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{1932}{4495}$, wie vorhin (dieses Resultat läſst sich auch noch anders finden).

2. In einer Urne befinden sich *n* vollkommen gleiche Kugeln; wenn man nun auf Gerathewohl hineingreift und davon irgend eine Anzahl herauszieht, ist es wahrscheinlicher, daſs diese Zahl *gerad*, oder daſs sie *ungerad* seyn wird?

Aufl. Nimmt man zuerst, um die Sache zu fixiren, für *n* einen speciellen Werth, z. B. $n = 4$, und bezeichnet die vier Kugeln mit *a*, *b*, *c*, *d*; so geben diese die ungeraden Combinationen: *a, b, c, d, abc, abd, acd, bcd*, und die geraden: *ab, ac, ad, bc, bd, cd* und *abcd*. Da man nun annimmt, daſs jede dieser 15 Verbindungen auf eine gleich mögliche Art ergriffen werden kann; so ist die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Anzahl zu ziehen $= \frac{8}{15}$, und jene, eine gerade Anzahl zu ergreifen $= \frac{7}{15}$; dabei ist wieder, wie man sieht, die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten $= 1$, wie es

seyn muſs, indem es gewiſs ist, daſs man entweder eine gerade oder ungerade Anzahl ziehen wird.

Um jetzt diese Aufgabe allgemeiner zu behandeln, suchen wir zuerst die Anzahl der geraden und ungeraden Verbindungen auf folgende Art:

Es ist

$$(1+1)^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots$$

und $$(1-1)^n = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots;$$

diese beiden Gleichungen addirt geben, wegen $(1+1)^n = 2^n$, und $(1-1)^n = 0$, wenn man sogleich durch 2 beiderseits dividirt:

$$2^{n-1} = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots \text{ d. i.}$$

$$1)\quad 2^{n-1} = 1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots;$$

dagegen gibt ihre Differenz, wenn man gleichfalls durchaus durch 2 abkürzt:

$$2^{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots, \text{ d. i.}$$

$$2)\quad 2^{n-1} = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$$

Bezeichnet man nun der Kürze wegen die Summe aus den geraden Combinationen dieser n Elemente (d. i. zu 2, 4, 6, ...) durch G, und jene aus den ungeraden Combinationen (zu 1, 3, 5, ...) durch U; so folgt aus 1), wie man sieht, $G = 2^{n-1} - 1$, und aus 2), $U = 2^{n-1}$. Da ferner $G + U = 2^n - 1$ ist, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Anzahl zu ziehen:

$$w = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1},$$

und für die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Anzahl zu ziehen:

$$w' = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1};$$

es ist sonach $w' > w$. Zugleich ist auch hier

$$w + w' = \frac{2^n - 1}{2^n - 1} = 1.$$

Die relative W., eher ungerad als gerad zu greifen, ist ferner

$$\frac{w'}{w+w'} = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}$$

und die entgegengesetzte:

$$\frac{w}{w+w'} = \frac{2^{n-1}-1}{2^n - 1};$$

diese nähern sich einander offenbar um so mehr, je grösser n ist.

3. In einer Urne befinden sich m weiſse und eben so viele schwarze Kugeln; wenn man nun auf einen Zug daraus irgend eine *gerade* Anzahl von Kugeln zieht, wie groſs ist die W., daſs sich darunter eben so viele schwarze als weiſse Kugeln befinden werden, vorausgesetzt, daſs das Ergreifen einer *jeden geraden* Anzahl von Kugeln *gleich möglich* ist?

Aufl. Die Verbindung sämmtlicher Kugeln zu zwei, so, daſs immer eine weiſse und eine schwarze zusammenkommen, ist $= m \cdot m = m^2$.

Die Verbindung derselben zu vier, so, daſs immer zwei weiſse und zwei schwarze Kugeln mit einander verbunden sind, ist $= \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \times \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = \left[\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\right]^2$.

Eben so gibt es $\left[\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right]^2$ Verbindungen zu sechs, in welchen immer drei weiſse mit drei schwarzen Kugeln verbunden sind, u. s. w.

Man hat also als Summe der günstigen Fälle:

$$S = m^2 + \left[\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\right]^2 + \left[\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right]^2 + \ldots$$

und als Summe aller möglichen Fälle, d. i. der Summe aus den geraden Combinationen der $2m$ Kugeln:

$$S' = \frac{2m(2m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

Nun ist aber leicht zu sehen, daſs S auch gleich ist der Summe der von a unabhängigen Glieder des Productes;

$$\left[1+m.\frac{1}{a}+\frac{m(m-1)}{1.2}.\frac{1}{a^2}+..\right]\left[1+ma+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2+..\right]$$

wenn diese noch um 1 vermindert wird, nämlich des Productes:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^m(1+a)^m=\frac{(1+a)^{2m}}{a^m}.$$

Nimmt man daher von der Entwicklung $(1+a)^{2m}$ das eine von der Form Ka^m vorkommende Glied, so ist mit Berücksichtigung des Nenners, das genannte von a freie Glied des vorigen Productes $=K$, oder (da K, wegen $a^m=a^{2m-m}$, den $m+1^{\text{sten}}$ Binomialcoefficienten von $(1+a)^{2m}$ bezeichnet):

$$K=\frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{1.2\ldots\ldots m}$$

$$=\frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)m(m-1)\ldots3.2.1}{(1.2.3\ldots m)^2};$$

also ist auch der vorigen Bemerkung zufolge:

$$p)\quad S=\frac{1.2.3\ldots(2m-1)2m}{(1.2.3\ldots m)^2}-1.$$

Da endlich auch nach dem vorigen Beispiele, wenn man in der Gleichung 1) $n=2m$ setzt,

$$q)\quad S'=2^{2m-1}-1$$

wird; so folgt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit der Ausdruck $\frac{S}{S'}$, wenn man für S und S' die Werthe aus diesen Gleichungen p) und q) substituirt.

So wäre z. B. für $m=5$:

$$S=\frac{1.2.3\ldots10}{(1.2.3.4\,5)^2}-1=252-1=251,\ S'=2^9-1=511,$$

folglich $w=\frac{251}{511}$ (s. nahe $=\frac{1}{2}$).

4. Es werden m weiſse und n schwarze Marken, die im Uebrigen vollkommen gleich sind, auf einen Haufen geworfen; von den drei Spielern A, B, C nimmt in der angeführten Ordnung, einer nach dem andern, mit verbundenen Augen, eine davon weg, ohne diese wieder zurück zu legen. Wenn nun derjenige, der auf diese Weise zuerst eine *weiſse* Marke

ergreift, das Spiel gewinnt, so fragt es sich, welche Wahrscheinlichkeit jeder der drei Spieler A, B, C für sich hat, das Spiel zu gewinnen?

Aufl. Setzt man der Kürze wegen $m + n = s$, so ist die Wahrscheinlichkeit, im Anfange eine weifse M. zu ziehen, wodurch A das Spiel gewinnen würde $= \frac{m}{s}$, und jene, eine schwarze zu ziehen, wodurch eigentlich erst der zweite Zug, den sofort B hat, möglich wird $= \frac{n}{s}$.

Da sich jetzt (denn nur für diesen Fall, dafs A eine schwarze M. gezogen hat, darf die Rechnung fortgesetzt werden) in dem Haufen nur $n - 1$ schwarze Marken befinden; so ist die Wahrscheinlichkeit, eine weifse M. zu ziehen $= \frac{m}{s-1}$, und die, eine schwarze zu ziehen $= \frac{n-1}{s-1}$. Diese Wahrscheinlichkeiten müssen aber noch, um die W. für B zu bestimmen, da diese schon eine zusammengesetzte ist, mit der vorigen (durch welche der Zug für B möglich wird) $\frac{n}{s}$ multiplicirt werden, so dafs man hat: W., dafs B eine weifse M. zieht, also das Spiel gewinnt $= \frac{n}{s} \cdot \frac{m}{s-1}$; W., dafs er eine schwarze zieht, wodurch der dritte oder der Zug für C möglich wird $= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s-1}$.

Da in diesem letzten Falle die Marken wieder um eine schwarze vermindert werden, also von dieser Farbe nur mehr $n - 2$ vorhanden sind; so ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, eine weifse M. zu ziehen $= \frac{m}{s-2}$, und eine schwarze zu ergreifen $= \frac{n-2}{s-2}$.

Daher ist die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, dafs C eine weifse M. ziehen wird $= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s-1} \cdot \frac{m}{s-2}$, und jene, dafs er eine schwarze M. zieht, wodurch A wieder

zum Zug kommt, oder der vierte Zug möglich wird
$= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s-1} \cdot \frac{n-2}{s-2}$.

Aus dem bisherigen Gange ist leicht zu sehen, dafs man für A, B, C; A, B, C; ... die Wahrscheinlichkeiten, das Spiel zu gewinnen, der Reihe nach erhält:

$$\frac{m}{s}, \frac{mn}{s(s-1)}, \frac{mn(n-1)}{s(s-1)(s-2)}, \frac{mn(n-1)(n-2)}{s(s-1)(s-2)(s-3)}, \ldots$$
$$\ldots \frac{mn(n-1)\ldots(n-p+1)}{s(s-1)\ldots\ldots(s-p)}, \ldots$$

wovon die Summe des 1sten, 4ten, 7ten, ... Gliedes die gesammte Wahrscheinlichkeit für A, die Summe des 2ten, 5ten, 8ten, ... Gliedes die Wahrscheinlichkeit für B, und endlich die Summe aus dem 3ten, 6ten, 9ten, ... Gliede die gesammte Wahrscheinlichkeit für C liefert. Dabei kann das Spiel höchstens nur so lange dauern, bis alle schwarzen Marken gezogen sind.

Wäre z. B. $m = 4$ und $n = 8$, also $s = 12$; so wäre die gesuchte

$$\text{Wahrscheinlichkeit für } A = \frac{4}{12} + \frac{56}{495} + \frac{2}{99} = \frac{77}{165}$$
$$\text{»} \quad \text{»} \quad B = \frac{8}{33} + \frac{7}{99} + \frac{4}{5.99} = \frac{53}{165}$$
$$\text{»} \quad \text{»} \quad C = \frac{28}{5.33} + \frac{4}{99} + \frac{1}{5.99} = \frac{35}{165}$$

dabei ist abermahls, wie es seyn soll, die Summe der W. $= 1$.

5. Drei Spieler A, B, C, welche im Spiele *gleich stark* sind, spielen mit einander unter folgender Bedingung: A spielt mit B, und wer von beiden gewinnt, z. B. A, mit dem dritten Spieler C; gewinnt A auch diefsmal, so hat er das ganze Spiel, d. i. den Einsatz gewonnen. Gewinnt dagegen C, so spielt dieser mit dem B, nämlich mit jenem, der zuerst verloren hat, u. s. w., so, dafs das Spiel so lange dauert, bis einer der drei Spieler zwei Parthien *hinter einander*, also dadurch das ganze Spiel gewonnen hat. Diefs vorausgesetzt, soll die

Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dafs das Spiel mit der $n + 1^{sten}$ Parthie beendet seyn wird?

Aufl. Soll das Spiel z. B. mit der achten Parthie enden, so mufs der Gewinner, gesetzt A, auch in der siebenten Parthie gespielt und diese gewonnen haben; dafs er aber diese siebente Parthie gewinnt, dafür ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2}$. Hätte er diese hingegen verloren, wofür die Wahrscheinlichkeit ebenfalls $= \frac{1}{2}$ ist, so wäre das Spiel mit der siebenten Parthie zu Ende gegangen, weil nothwendig sein Gegner schon die sechste Parthie gewonnen haben mufste; es ist also die Wahrscheinlichkeit, dafs A die siebente Parthie spielt und gewinnt, genau so grofs, als die Wahrscheinlichkeit, dafs er sie spielt und verliert, d. h. dafs die siebente Parthie die letzte ist. Da nun A im ersten Falle auch noch, wenn nämlich die achte Parthie die letzte seyn soll, die nächste Parthie gewinnen mufs, wofür die W. $= \frac{1}{2}$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die achte Parthie die letzte ist, $\frac{1}{2}$ Mal so grofs, als die Wahrscheinlichkeit, dafs die siebente Parthie die letzte seyn wird. (Ist nämlich die W., dafs die siebente P. die letzte ist $= \alpha$, so ist auch die W., dafs A die siebente P. spielt und gewinnt $= \alpha$, und die W., dafs er die folgende Parthie gewinnt $= \frac{1}{2}$, demnach die W., dafs beides geschieht, also die achte P. die letzte seyn wird $= \alpha \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\alpha$.) Dieses Raisonnement gilt offenbar ganz allgemein, so, dafs, wenn w die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dafs die p^{te} Parthie die letzte ist, $\frac{1}{2} w$ die Wahrscheinlichkeit seyn wird, dafs die $(p+1)^{ste}$ P. die letzte sey.

Nun kann das Spiel frühestens mit der zweiten Parthie enden, so, dafs also die Wahrscheinlichheit, nach welcher diese die letzte seyn wird $= \frac{1}{2}$ ist (denn einer der drei Spieler, z. B. A, hat die erste Parthie gewifs gewonnen, spielt er nun mit dem dritten, z. B. C, so ist die W. auch jetzt zu gewinnen, wodurch die zweite P. die letzte wird $= \frac{1}{2}$); folglich hat man nach der vorigen Bemerkung:

W., daſs das Spiel mit der zweiten Parthie endet $= \frac{1}{2}$
» » » » » » dritten » » $= \frac{1}{4}$
» » » » » » vierten » » $= \frac{1}{8}$
. .
» » » » » » $n + 1^{\text{sten}}$ » » $= \frac{1}{2^n}$

zugleich ist die W., daſs das Spiel nicht über die $n + 1^{\text{ste}}$ Parthie hinausgehen werde, also innerhalb der $n + 1$ Parthien geendet seyn wird:

$$w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

6. Bei einem Würfelspiele mit drei Würfeln wettet A, daſs drei ungleiche, B, daſs zwei gleiche mit einer ungleichen, und C, daſs drei gleiche Zahlen oder ein Pasch geworfen werde; wie groſs muſs der Einsatz eines jeden der drei Spieler seyn, damit ihre Wette gleich, nämlich ihren mathematischen Hoffnungen proportionirt ist?

Aufl. Da mit drei Würfeln drei ungleiche Zahlen auf 120, zwei gleiche mit einer ungleichen auf 90, und endlich drei gleiche Zahlen auf sechs verschiedene Arten geworfen werden können; so sind die Wahrscheinlichkeiten, welche A, B, C haben, das Spiel zu gewinnen, beziehungsweise: $\frac{120}{216} = \frac{20}{36}$, $\frac{90}{216} = \frac{15}{36}$ und $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$; folglich müssen sich auch die Einlagen der Spieler A, B, C wie $20 : 15 : 1$ verhalten.

7. Im Kopf und Wappen-Spiel verspricht A dem B 1 Ducaten, wenn Wappen auf den ersten Wurf, 2 Duc., wenn dieses erst auf den zweiten Wurf, 4 Duc., wenn dieses erst beim dritten Wurf fällt u. s. f. bis zum n^{ten} Wurfe, so, daſs die Summe, welche B zu erwarten hat, immer verdoppelt wird, bis endlich einmal Wappen fällt. Wie viel muſs B dem A im Voraus geben, damit A diese Wette eingehen kann?

Aufl. Da diese Summe der mathematischen Hoff-

nung des *B* gleich seyn mufs, so müssen wir zuvörderst diese Hoffnung bestimmen.

Die Wahrscheinlichkeit, dafs Wappen auf den ersten Wurf fällt, ist $= \frac{1}{2}$; also die Hoffnung des *B* beim ersten Wurf (§. 169.) $= 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Die W., dafs Wappen erst auf den zweiten Wurf fällt, ist $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; also die Erwartung des *B* beim zweiten Wurfe $= 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Eben so ist die Hoffnung des *B* beim dritten Wurf (wenn nämlich Wappen in den beiden ersten Würfen nicht fällt) $= 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ u. s. w. jene beim n^{ten} Wurfe $= 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$, so, dafs also die gänzliche mathematische Hoffnung des *B* durch die Summe von n Gliedern der Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$, d. i. durch $\frac{n}{2}$ ausgedrückt wird.

Es mufs also, wenn das Spiel nicht über den n^{ten} Wurf hinausgehen darf, also hier in jedem Falle abbricht, *B* dem *A* $\frac{n}{2}$ Ducaten im Voraus bezahlen, damit ihre Wette gleich steht. (Im Falle *A* dem *B* die Summen 2, 4, 8, . . . verspricht, mufs *B* dem *A* n im Voraus geben.)

Diese Summe wird offenbar Unendlich, wenn das Spiel ohne Ende fortgeht; nichts desto weniger wird es keinem vernünftigen Menschen einfallen, defshalb auch nur eine mäfsige Summe, z. B. 50 Ducaten aufs Spiel zu setzen. Dieser Widerspruch zwischen dem Ergebnisse der Rechnung und der Ansicht des gesunden Menschenverstandes, liegt in der Verschiedenheit, welche zwischen der mathematischen Hoffnung und der moralischen Schätzung einer bestimmten Summe Statt findet. Denn ist hier z. B. $n = 50$, so sind allerdings 2^{49} Duc. die Summe, welche *B* bei dem 50sten Versuche, wenn nämlich Wappen 49 Mal hinter einander gefehlt worden ist, zu hoffen hat; es bringt jedoch diese ungeheure Summe dem *B* keineswegs einen dieser Summe proportionirten moralischen Vortheil, weil es für ihn ein moralischer Nachtheil oder Verlust ist, 25 Ducaten zu riskiren, um die zwar enorme Summe von

2^{49} Ducaten mit der jedoch ungeheuer geringen Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2^{50}}$ zu gewinnen *).

8. *A* und *B* spielen mit einem Würfel auf folgende Art: Zuerst wirft *A* n Mal, sodann *B* x Mal hinter einander. Wenn nun Derjenige das Spiel gewinnt, der auf diese Weise zuerst die Zahl 6 wirft, so ist klar, dafs im Falle $x=n$ angenommen würde, sich der erste Spieler *A* gegen den zweiten *B* im Vortheile befände. Wie viele Würfe müssen also, wenn *A* und *B* *gleich viel* einsetzen, dem *B* mehr zugestanden werden, oder, wenn $x=n$ seyn soll, um wie viel mufs der Einsatz des *A* höher, als jener des *B* seyn, damit der Vortheil der Priorität verschwindet?

Aufl. Die Wahrscheinlichkeit, welche *A* hat, dafs er bis zum n^{ten} Wurfe die 6 ein Mal treffen werde, ist (§§. 165. u. 166.) $=1-(\frac{5}{6})^n$, weil die entgegengesetzte W. $=(\frac{5}{6})^n$ ist.

Um zu sehen, wie sich die Erwartung des *B* stellt, wollen wir einen Augenblick annehmen, *A* habe nur Einen Wurf, oder es sey $n=1$; so ist die Wahrscheinlichkeit zu Gunsten *B*, nämlich die Wahrscheinlichkeit, dafs *B* überhaupt zum Wurfe kommt, $=\frac{5}{6}$ (d. i. $=$ der W., dafs *A* die 6 nicht wirft), und da *B* x Würfe machen darf, so ist die einfache Wahrscheinlichkeit, innerhalb dieser Anzahl von Würfen die 6 zu treffen $=1-(\frac{5}{6})^x$, also die gesammte Wahrscheinlichkeit des *B* bei dieser Voraussetzung (d. i. die zusammengesetzte W., dafs erstens *B* überhaupt zum Spiele

*) Dieses ist das berühmte, zuerst im Jahre 1713 von *Nicolas Bernoulli* dem Herrn v. *Montmort* (geb. zu Paris 1678; gest. 1719) vorgelegte (m. s. *Essai d'analyse sur les jeux de hasard, par Montmort.* 2. *Edit. Paris* 1713 — 14) und von *Daniel Bernoulli* in den Petersburger Memoiren *(Comm. Petrop. T. V.)* angezeigte und behandelte Petersburger Problem, welches anfangs zu einigen Meinungsverschiedenheiten unter den Geometern Anlafs gab.

kommt, und dafs er zweitens in x Würfen ein Mal die 6 trifft) $= \frac{5}{6}[1 - (\frac{5}{6})^x]$.

Hat A zwei Würfe oder ist $n = 2$, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs B zum Spiele kommt (= der W., dafs A beide Male die 6 fehlt) $= (\frac{5}{6})^2$, also seine gesammte Wahrscheinlichkeit, in diesem Falle zu gewinnen

$$= (\tfrac{5}{6})^2 [1 - (\tfrac{5}{6})^x].$$

Und so sieht man leicht, dafs wenn A n Würfe machen darf, die Wahrscheinlichkeit, welche B, das Spiel zu gewinnen, hat, gleich ist

$$(\tfrac{5}{6})^n [1 - (\tfrac{5}{6})^x] \; . \; . \; . \; (\alpha$$

Sollen nun beide Spieler den nämlichen Einsatz leisten, so müssen auch (§. 169.) ihre Wahrscheinlichkeiten, das Spiel zu gewinnen, einander gleich seyn, und man hat sofort in diesem Falle:

$$1 - (\tfrac{5}{6})^n = (\tfrac{5}{6})^n [1 - (\tfrac{5}{6})^x] \text{ oder } (\tfrac{5}{6})^{n+x} = 2(\tfrac{5}{6})^n - 1;$$

aus dieser letzten Gleichung folgt ganz einfach:

$$x = \frac{log. [2(\frac{5}{6})^n - 1]}{log. 5 - log. 6} - n \; . \; . \; . \; (\beta$$

Ist z. B. $n = 3$, so findet man:

$$x = \frac{log. 216 - log. 34}{log. 6 - log. 5} - 3 = 7{\cdot}14.$$

Für den zweiten Fall, in welchem die Einsätze a, b der Spieler A, B bestimmt werden sollen, wenn beide gleich oft werfen, oder wenn $x = n$ ist, hat man, da sich die Einsätze wie die Wahrscheinlichkeiten, das Spiel zu gewinnen, verhalten sollen:

$$a : b = [1 - (\tfrac{5}{6})^n] : (\tfrac{5}{6})^n [1 - (\tfrac{5}{6})^n] = 1 : (\tfrac{5}{6})^n = 6^n : 5^n.$$

Für das angeführte Beispiel von $n = 3$ hat man

$$a : b = 216 : 125;$$

setzt also A die Summe 216, so darf B blofs jene 125 setzen, damit ihr Spiel oder ihre Wette gleich steht.

Anmerk. Spielt auch noch C mit, welcher der dritte und zwar y Mal hinter einander wirft; so findet man den gehörigen Werth von y leicht, indem man in dem obigen Ausdrucke (α für n die Summe der Würfe des A und B, d. i. statt n,

$n+x$ [wo x schon aus (β berechnet seyn mufs], und statt x, y schreibt, und diesen Ausdruck wieder jenem $1-(\frac{5}{6})^n$ gleich setzt. Eben so kann man auch, wenn $y=n$ werden soll, dafür den richtigen Einsatz des C bestimmen.

Auf eine gleiche Art würde man durch ein wiederholtes Verfahren, dieses Problem für jede beliebige Anzahl von Spielern auflösen können.

Schlufsbemerkungen oder Folgerungen aus den bisher vorgetragenen Lehren der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

§. 175.

Wir werden schlüfslich durch alles das, was über diesen Gegenstand im Vorhergehenden entwickelt worden ist auf folgende wichtige Resultate geführt:

1. Ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gröfser als $\frac{1}{2}$, so hat man mehr Grund zu glauben, dafs dieses Ereignifs eintreten, als dafs es nicht eintreten werde. Dieser Grund stützt sich unmittelbar auf den im §. 165. (Anm. 2) angeführten *Bernoulli*schen Satz, nach welchem durch hinlänglich fortgesetzte Versuche, bei welchen nur zwei Ereignisse Statt finden können, eine der Gewifsheit, so weit man will, sich nähernde Wahrscheinlichkeit herbeigeführt werden kann, dafs die Wiederholungen dieser Ereignisse im Verhältnisse ihrer einfachen Wahrscheinlichkeiten stehen werden. Hat also das erste Ereignifs eine W. $>\frac{1}{2}$, folglich das zweite oder entgegengesetzte eine W. $<\frac{1}{2}$; so kann man so gut wie gewifs seyn, dafs bei wiederholten Versuchen das erste Ereignifs öfter als das zweite eintreffen wird, wefshalb man dann natürlich auch dem ersten Ereignisse eine gröfsere Möglichkeit zuschreiben mufs.

2. Je gröfser die mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird, desto gröfser wird auch der Grund zu glauben, und desto eher wird man das Eintreten desselben erwarten. Denn in diesem Falle wird schon bei einer geringen Wiederholungszahl dieses Ereignifs mehr

als sein Gegentheil eintreffen. Es wächst also das Zutrauen zugleich mit der Wahrscheinlichkeit.

3. Um den Grad des Zutrauens zu bestimmen, welchen man der mathematischen Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses beilegen kann, muſs man fast immer die Zeit oder die Anzahl der wiederholten Versuche dabei berücksichtigen. Ist z. B. die Wahrscheinlichkeit irgend eines Ereignisses nur wenig gröſser als $\frac{1}{2}$, so ist auch der Grund zu glauben, daſs es eher als nicht eintreten werde, nur sehr schwach; zieht man hingegen eine gröſsere Anzahl von Versuchen dabei in Betracht, so kann man nichts desto weniger behaupten, daſs dieses endlich öfter als sein Gegentheil eintreffen werde.

Daraus geht nun zugleich hervor, daſs es selbst in diesem Falle, in welchem nämlich die Wahrscheinlichkeit eines gehofften Ereignisses den Werth von $\frac{1}{2}$ übersteigt, noch gegen die Klugheit ist, sich dem Zufalle auszusetzen, wenn man es nicht in seiner Gewalt hat, den Versuch hinlänglich oft herbeizuführen; denn nur in diesem Falle kann man auf einen günstigen Erfolg rechnen. Ist aber die W. $< \frac{1}{2}$, so ist es an und für sich schon unrecht, sich in einen solchen Fall einzulassen; der Verlust wird aber dabei um so sicherer eintreten, je öfter der Versuch wiederholt wird.

4. Da endlich die Wiederholungen der Ereignisse sich um so mehr ihren einfachen Wahrscheinlichkeiten nähern, je mehr Versuche Statt finden; so wird man, wenn die einfachen Wahrscheinlichkeiten selbst unbekannt sind, aus diesen Versuchen auf die Wahrscheinlichkeiten schlieſsen können, und zwar um so sicherer, je gröſser die Anzahl der Versuche ist, aus denen diese gefolgert werden.

Befinden sich z. B. in einer Urne bloſs weiſse und schwarze Kugeln, und hat man in 1000 Zügen, nach deren jedem die Kugel wieder in die Urne gethan wird, 700 weiſse und 300 schwarze Kugeln gezogen; so kann man daraus mit groſser Wahrscheinlichkeit schlieſsen, daſs die einfachen W. für das Ziehen einer weiſsen und schwarzen Kugel beziehungsweise den Werthen $\frac{700}{1000} = \frac{7}{10}$ und $\frac{300}{1000} = \frac{3}{10}$ nahe

kommen werden. Dieser Satz bildet die Grundlage für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit *a posteriori* *).

*) Zum Beschlusse dieses interessanten Capitels, bei welchem wir der Reichhaltigkeit des Gegenstandes wegen auf gröſsere oder eigends demselben gewidmete Werke verweisen müssen, wollen wir noch einige der wichtigeren Schriften hierüber, die im Früheren noch nicht genannt worden sind, anführen; solche sind:

Hugenii: Tractatus de ratiociniis in ludo aleae (zuerst bekannt gemacht von *Schooten* im Jahre 1658 in seinen *Exercit. mathem.* Diese Schrift ist auch in *Bern. Ars conjectandi* enthalten).

Jac. Bernoulli: Ars conjectandi. Opus posthumum, accedit Tractatus de Seriebus infinitis et epistola gallicè scripta de ludo pilae reticularis. Basilae 1713. (Dieses mit Recht noch jetzt sehr geschätzte Werk, wurde nach *Jac. Bernoulli's* Tod von dessen Neffen *Nicolas Bernoulli* herausgegeben)

Moivre: The doctrine of chances (in drei verschiedenen in London erschienenen Auflagen, beziehungsweise von 1716, 38 und 56); dann dessen *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis. Lond.* 1730.

Ueber die akadem. Abhandlungen von *Euler, d'Alembert, Joh.* u. *Dan. Bernoulli, Lagrange, Gauſs* u. s. w. sehe man: *Reuss Repertorium commentationum a societatibus litterariis editorum. Gott.* 1808. *T. VII.* S. 22 — 29 *(de Calculo Probabilium et Arithmetica Politica).*

Bicquilley: Rechnung des Wahrscheinlichen, übersetzt von *Rüdiger.* Leipzig 1788.

Auch findet man vieles über diesen Gegenstand in dem vortrefflichen Werke: *Corso di Matematica Sublime. Del Dott. Vincenzio Brunacci. Firenze* 1804 (gr. 4. in vier Theilen); und in dessen: *Compendio de Calcolo Sublime. Milano* 1811 (8. in zwei Bänden).

Bei Weitem das umfassendste Werk über die Wahrscheinlichkeitsrechnung jedoch und auch noch der vielen anderweitigen tiefsinnigen analytischen Entwickelungen wegen berühmt ist: »*Théorie analytique des Probabilités, par M. le Marquis de Laplace.*« 3. *Edit. Paris* 1820 (gr. 4.). Zugleich existirt von demselben Verfasser das kleine Werkchen: *Essai philosophique sur les probabilités.* 3. *Edit. Paris* 1816 (in 8.). (Dasselbe wurde auch von *Tönnies* — nach der vierten Originalausgabe — ins Deutsche übersetzt.)

Zwölftes Capitel.

Von den endlichen Differenzen der Functionen.

§. 176.

Es sey $y = f(x)$ irgend eine Function von x. Nimmt man an, daſs x nach und nach die Werthe x_1, x_2, x_3, ... erhält, und bezeichnet die dadurch für y entstehenden Werthe beziehungsweise durch y_1, y_2, y_3, ..., daſs also $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$, ... wird; so hat man die beiden sich auf einander beziehenden Reihen:

$$\left.\begin{array}{l} x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n,\ \ldots \\ y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_n,\ \ldots \end{array}\right\} (a$$

Befolgen die Gröſsen x, x_1, x_2, ... in ihrer Aufeinanderfolge ein gewisses Gesetz, so bilden auch die Gröſsen y, y_1, y_2, ... eine gewisse von der Natur der Function f abhängige Reihe, in welcher $y = f(x)$ das allgemeine Glied vorstellt.

Nimmt man nun in der zweiten Reihe die auf einander folgenden Differenzen von y nach §. 83., so erhält man:

$$\Delta y = y_1 - y,\quad \Delta^2 y = y_2 - 2y_1 + y,$$
$$\Delta^3 y = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y, \text{ u. s. w.};$$

oder, wenn man für y, y_1, y_2, ... die obigen Werthe setzt, auch:

$$\Delta y = f(x_1) - f(x),\quad \Delta^2 y = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x),$$
$$\Delta^3 y = f(x_3) - 3f(x_2) + 3f(x_1) - f(x), \text{ u. s. w.}$$

Um endlich noch in diesen Entwickelungen x_1, x_2, x_3, ... durch x auszudrücken, wollen wir uns auch in der ersten der Reihen (a die Differenzen genommen denken; dadurch wird nach §. 84.:

$$x_1 = x + \Delta x,\quad x_2 = x + 2\Delta x + \Delta^2 x,$$
$$x_3 = x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x, \text{ u. s. f.},$$

und es lassen sich daher die verschiedenen Differenzen von y nun auch so darstellen:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$
$$\Delta^2 y = [f(x + 2\Delta x + \Delta^2 x) - f(x + \Delta x)] - [f(x + \Delta x) - f(x)],$$
$$\Delta^3 y = [f(x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x)$$
$$- 2f(x + 2\Delta x + \Delta^2 x) + f(x + \Delta x)] - \Delta^2 y,$$
u. s. w.,

aus welcher Darstellung sofort erhellet, dafs man Δy oder die erste Differenz von $f(x)$ erhält, indem man in dieser Function statt x, $x + \Delta x$ setzt, und von dem entstehenden Ausdrucke (der geänderten Function) die ursprüngliche Function abzieht; dafs man aus dieser ersten Differenz sodann die zweite erhält, wenn man in dieser statt x, $x + \Delta x$, und zugleich statt Δx, $\Delta x + \Delta^2 x$ schreibt, und von dem erhaltenen Ausdrucke die erste Differenz abzieht; dafs man eben so aus der zweiten Differenz die dritte erhält, indem man in dieser statt x, Δx und $\Delta^2 x$ respective $x + \Delta x$, $\Delta x + \Delta^2 x$, $\Delta^2 x + \Delta^3 x$ setzt, und von dem geänderten Ausdrucke diese zweite Differenz selbst wieder abzieht, u. s. w., so, dafs man überhaupt nach diesem Gesetze jede folgende Differenz aus der ihr unmittelbar vorhergehenden ableiten kann.

Häufig werden die höhern Differenzen von $f(x)$ auch unter der Voraussetzung entwickelt, dafs Δx nicht, wie hier angenommen wurde, eine (von x unabhängige) veränderliche, sondern eine constante Gröfse bezeichnet; wodurch dann die vorigen Ausdrücke, wegen $\Delta^2 x = 0$, $\Delta^3 x = 0$ u. s. w. einfacher ausfallen. Ist in diesem Falle $\Delta x = d$, so geht die obige Reihe [in (a] $x, x_1, x_2, \ldots$ in jene x, $x + d$, $x + 2d$, $x + 3d, \ldots$, also in eine arithmetische Reihe des ersten Grades, und wenn z. B. $y = ax$ wäre, die zweite Reihe $y, y_1, y_2, \ldots$ dafür in ax, $a(x + d)$, $a(x + 2d)$, ... ebenfalls in eine solche Reihe, oder wenn $y = a^x$ wäre, in a^x, a^{x+d}, a^{x+2d}, ..., nämlich in eine geometrische Reihe über, u. s. w. Man setzt, was noch einfacher ist, in vielen Fällen $d = 1$ (wie z. B. bei allen gewöhnlichen Reihen).

§. 177.

Dasselbe, was im vorhergehenden Paragraphe von den

Differenzen (die man auch insbesondere, um sie von den unendlich kleinen Differenzen, die man in der Differentialrechnung angenommen hat, zu unterscheiden, endliche Differenzen nennt) der Functionen einer Variablen entwickelt wurde, gilt auch für Functionen von mehreren veränderlichen Gröſsen; von denen wir hier nur jene mit zwei Variablen noch betrachten wollen.

Es sey $z = f(x, y)$ und es gehe z in z' über, wenn x um Δx und zugleich y um Δy (wobei Δx und Δy sowohl positiv als negativ seyn können) zunimmt; so ist

$$z' = f(x + \Delta x, \ y + \Delta y),$$

und offenbar

$$\Delta z = z' - z = f(x + \Delta x, \ y + \Delta y) - f(x, y).$$

Aus Δz entsteht ferner $\Delta^2 z$, wenn man in der ersten Differenz statt x, $x + \Delta x$, und statt Δx, $\Delta x + \Delta^2 x$, dann auch statt y und Δy, $y + \Delta y$ und $\Delta y + \Delta^2 y$ setzt, und von dem entstehenden Ausdrucke den vorigen oder Δz abzieht; auf dieselbe Art entsteht aus $\Delta^2 z$ die dritte Differenz $\Delta^3 z$, u. s. w.

Man nennt die entstehenden Differenzen, im Falle alle, von einander unabhängigen, variablen Gröſsen der Functionen zu gleicher Zeit geändert werden, die vollständige oder Total-Differenz der Function, um diese von den partiellen Differenzen zu unterscheiden, welche dann entstehen, wenn nur eine dieser Variablen geändert wird, während alle übrigen ungeändert bleiben. Bezeichnet man in der vorhin angenommenen Function $z = f(x, y)$ die erste partielle Differenz von z nach x genommen mit $\left(\frac{\Delta z}{x}\right)$, jene nach y mit $\left(\frac{\Delta z}{y}\right)$; so ist

$$\left(\frac{\Delta z}{x}\right) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{\Delta z}{y}\right) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Eben so wäre für die zweiten partiellen Differenzen, die Differenz beide Male nach x genommen (nach dem vorigen Paragraphe):

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{x,x}\right) = \left(\frac{\Delta^2 z}{x^2}\right) = f(x + 2\Delta x + \Delta^2 x, y) - 2f(x + \Delta x, y) + f(x, y);$$

wenn die Differenz beide Male nach y genommen wird:

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{y,y}\right) = \left(\frac{\Delta^2 z}{y^2}\right) = f(x, y + 2\Delta y + \Delta^2 y) - 2f(x, y + \Delta y) + f(x, y);$$

und wenn man endlich die zweite Differenz ein Mal nach x und ein Mal nach y nimmt:

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{x,y}\right) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y).$$

Dieses letztere Resultat findet man auch durch Umkehrung der Ordnung, d. i. wenn man zuerst nach y und dann nach x differenziirt, wie man sogleich sieht; folglich ist

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{x,y}\right) = \left(\frac{\Delta^2 z}{y,x}\right).$$

Ganz auf dieselbe Art lassen sich auch die folgenden oder höhern partiellen Differenzen entwickeln; man kommt dabei zugleich auf den allgemeinen Satz:

$$\left(\frac{\Delta^{m+n} z}{x^m,\ y^n}\right) = \left(\frac{\Delta^{m+n} z}{y^n,\ x^m}\right),$$

dessen Bedeutung für sich klar ist.

§. 178.

Wir wollen jetzt die ersten Differenzen der Hauptfunctionen einer Variablen wirklich entwickeln, und zugleich für gewisse Formen der Functionen von mehreren veränderlichen Gröfsen einige speciellere Regeln zum bequemern Gebrauche ableiten.

1. Für $y = x^n$ hat man nach der allgemeinen Regel $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$, oder wenn man entwickelt:

$$\Delta y = \Delta . x^n = n x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 . 2} x^{n-2} \Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3} x^{n-3} \Delta x^3 + \ldots\ ^{*)}.$$

*) Es mufs hier die Bezeichnung Δx^n, die für $(\Delta x)^n$ steht, von

2. Für $y = a^x$ ist $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$, und wenn man $a^{\Delta x}$ nach §. 127. in eine Reihe auflöst:

$$\Delta y = \Delta . a^x = a^x \left[\frac{l\,a}{1} \Delta x + \frac{l^2 a}{1.2} \Delta x^2 + \frac{l^3 a}{1.2.3} \Delta x^3 + \ldots \right].$$

3. Es sey $y = log.\,x$ in was immer für einem Systeme, so ist

$$\Delta y = log.(x + \Delta x) - log.\,x = log.\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = log.\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

und wenn man endlich $log.\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ nach §. 129., indem man in der Reihe 2) $y = \frac{\Delta x}{x}$ setzt, in eine Reihe entwickelt:

$$\Delta y = \Delta . log.\,x = M \left[\frac{1}{x} \Delta x - \frac{1}{2x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{3x^3} \Delta x^3 - \ldots \right].$$

4. Für $y = sin.\,x$ wird $\Delta y = sin.(x + \Delta x) - sin.\,x$, also (Trigonom. §. 15., Form. 2.)

$$\Delta . sin.\,x = 2\, sin.\tfrac{1}{2} \Delta x\; cos.(x + \tfrac{1}{2} \Delta x) \ldots (\alpha$$

Löst man dagegen in dem ersten Ausdrucke $sin.(x + \Delta x)$ auf, so wird auch $\Delta y = sin.\,x\; cos.\,\Delta x + sin.\,\Delta x\; cos.\,x - sin.\,x$, oder (§. 142.) wegen $cos.\,\Delta x = 1 - \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\Delta x^4}{2.3.4} - \ldots$ und $sin.\,\Delta x = \Delta x - \frac{\Delta x^3}{2.3} + \ldots$ auch:

$$\Delta y = \Delta . sin.\,x = cos.\,x . \Delta x - \frac{sin.\,x}{2} \Delta x^2 - \frac{cos.\,x}{2.3} \Delta x^3 + \frac{sin.\,x}{2.3.4} \Delta x^4 + \ldots$$

5. Genau so wird für $y = cos.x$: $\Delta y = cos.(x + \Delta x) - cos.x$; oder

$$\Delta . cos.\,x = -2\, sin.\tfrac{1}{2} \Delta x\; sin.(x + \tfrac{1}{2} \Delta x) \ldots (\beta$$

und auch $\Delta y = cos.\,x\; cos.\,\Delta x - sin.\,x\; sin.\,\Delta x - cos.\,x$, oder, wenn man wieder für $cos.\,\Delta x$ und $sin.\,\Delta x$ die Reihen setzt:

$$\Delta y = \Delta . cos\,x = - sin\,x . \Delta x - \frac{cos.\,x}{2} \Delta x^2 + \frac{sin.\,x}{2.3} \Delta x^3 + \frac{cos.\,x}{2.3.4} \Delta x^4 - \ldots$$

jenen $\Delta(x^n) = \Delta . x^n$ und $\Delta^n x$, deren Bedeutungen keiner Erläuterung bedürfen, wohl unterschieden werden.

Für Ausdrücke von der Form $f(x).F(x)$, $\frac{f(x)}{F(x)}$ u. s. w. lassen sich die Differenzen genau eben so ableiten. Mit Hilfe der besondern Regeln jedoch, die wir im folgenden Paragraphe entwickeln werden, lassen sich solche Verbindungen noch leichter differenziiren.

Anmerk. 1. Aus diesen Entwickelungen ergibt sich überhaupt, dafs $\Delta.f(x)$ von der Form $P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + \ldots$, oder, dafs wegen $\Delta.f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ auch

a) $f(x+\Delta x) = f(x) + P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + \ldots$

ist. Es läfst sich dieser Satz auch allgemein für alle Functionen, wie es zuerst *Lagrange* (Theorie der analyt. Functionen) gethan hat, *a priori* erweisen. Man kann dabei auf folgende Art verfahren.

Nimmt man überhaupt an, dafs sich $f(x)$, wenn x in $x+i$ übergeht, nach steigenden Potenzen der Zunahme i entwickeln läfst, so, dafs $f(x+i) = A + pi + qi^2 + \ldots$, wobei A, p, q, ... kein i mehr enthalten sollen, also blofs noch Functionen von x sind, gesetzt werden kann, wobei es sich im Verlaufe der Rechnung zeigen mufs, ob diese Annahme Statthaft sey oder nicht; so läfst sich der erste Coefficient A sogleich bestimmen, indem man $i = 0$ setzt; dafür folgt aus der angenommenen Reihe: $f(x) = A$, und man hat also eigentlich:

$$1)\quad f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$$

Läfst man die ganz willkürliche Gröfse i in $i+k$ übergehen, so erhält man aus dieser Reihe 1):

$$f(x+i+k) = f(x) + p(i+k) + q(i+k)^2 + r(i+k)^3 + \ldots,$$

oder, wenn man von den angezeigten Potenzen immer nur die beiden ersten Glieder, welche hier zur Vergleichung hinreichen, entwickelt:

$$2)\quad f(x+i+k) = f(x) + p(i+k) + (qi^2 + 2qik + \ldots) + (ri^3 + 3ri^2k + \ldots) + \ldots$$

Nun entsteht aber auch $f(x+i+k)$, indem man in der Reihe 1) i ungeändert und dafür x in $x+k$ übergehen läfst. Bemerkt man dabei, dafs gleichwie durch die Zunahme von x um i, $f(x)$ in $f(x) + pi + \ldots$ übergeht, auch $f(x)$ in $f(x) + pk + \ldots$, oder, wenn man $p = f'(x)$ setzt, in $f(x) + f'(x).k + \ldots$, p, als Function von x, in $p + p'k + \ldots$, q in $q + q'k + \ldots$, r in $r + r'k + \ldots$ u. s. w. übergehen mufs, wenn man x um k zunehmen läfst; so hat man auch

$$f(x+k+i) = f(x) + f'(x).k + \ldots + (pi + p'ik + \ldots)$$
$$+ (qi^2 + q'i^2k + \ldots) + (ri^3 + r'i^3k + \ldots) + \text{u. s. w.}$$

Da also diese Entwickelung der vorigen 2) für jeden Werth von i und k gleich seyn muſs, so erhält man aus der Vergleichung der zu gleichen Verbindungen von i und k gehörigen Coefficienten:

$$p = f'(x), \quad 2q = p', \quad 3r = q', \quad 4s = r', \ldots$$

Nennt man daher mit *Lagrange* $f'(x)$ die erste abgeleitete Function von $f(x)$, so folgt aus dem Gange dieser Entwickelung offenbar, daſs auch p' die erste abgeleitete Function von p, q' jene von q, r' jene von r u. s. f. seyn wird. Bezeichnet man noch mit ihm die erste abgeleitete Function von $f'(x)$ mit $f''(x)$, jene von $f''(x)$ mit $f'''(x)$ u. s. w.; so hat man ganz einfach aus den letzten Relationen:

$$p = f'(x), \quad q = \frac{p'}{2} = \frac{f''(x)}{2}, \quad r = \frac{q'}{3} = \frac{f'''(x)}{2.3},$$
$$s = \frac{r'}{4} = \frac{f^{\text{IV}}(x)}{2.3.4}, \text{ u. s. w.},$$

so, daſs endlich, wenn man diese Werthe in der vorausgesetzten Reihe 1) substituirt:

$$\text{I.} \quad f(x+i) = f(x) + f'(x).\frac{i}{1} + f''(x).\frac{i^2}{1.2}$$
$$+ f'''(x).\frac{i^3}{1.2.3} + f^{\text{IV}}(x).\frac{i^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

wird, wobei i eine ganz willkürliche Gröſse bezeichnet, also auch durch Δx [wenn man die obige Reihe a) haben will] ersetzt werden kann.

Anmerk. 2. 1) Die Richtigkeit der Form von

$$f(x+h) = f(x) + Ph + Qh^2 + \ldots$$

läſst sich auch noch auf folgende einfache Art nachweisen.

Da offenbar jede Function von x in der ganz allgemeinen Form $f(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots$ enthalten oder begriffen ist, so hat man

$$f(x+h) = A(x+h)^\alpha + B(x+h)^\beta + C(x+h)^\gamma + \ldots,$$

oder wenn man die Potenzen nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, auch

$$f(x+h) = Ax^\alpha + A\binom{\alpha}{1}x^{\alpha-1}h + A\binom{\alpha}{2}x^{\alpha-2}h^2 + \ldots$$
$$+ Bx^\beta + B\binom{\beta}{1}x^{\beta-1}h + B\binom{\beta}{2}x^{\beta-2}h^2 + \ldots$$
$$+ Cx^\gamma + C\binom{\gamma}{1}x^{\gamma-1}h + C\binom{\gamma}{2}x^{\gamma-2}h^2 + \ldots$$

. .

und wenn man endlich diese Glieder nach verticalen Columnen zusammennimmt:

$$f(x+h) = f(x) + Ph + Qh^2 + \ldots,$$

wo offenbar P, Q, ... gewisse Functionen von x sind und die Gröfse h nicht enthalten.

2) Auf demselben Wege läfst sich zeigen, dafs wenn x, y zwei von einander unabhängige Gröfsen und h, k beliebige Zunahmen sind, $f(x+h, y+k)$ sich in eine ähnliche Reihe nach Potenzen von h und k entwickeln läfst, oder, dafs man setzen kann:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + [Ph + Qk] + [Rh^2 + Shk + Tk^2] + \ldots;$$

denn eine jede Function von x und y ist in der allgemeinen Form (geordnet nach der einen Variablen, z. B. nach x) $f(x, y) = Mx^m + Nx^n + Px^p + \ldots$, wobei aber M, N, P, ... noch Functionen von y sind, deren jede selbst wieder, nach dem Vorigen, von der Form

$$M'y^r + N'y^s + P'y^t + \ldots$$

ist, so, dafs wenn man für M, N, P, ... diese Reihen setzt, dadurch auch $f(x, y)$ die Form erhält:

$$m)\quad f(x, y) = Ax^a y^\alpha + Bx^b y^\beta + Cx^c y^\gamma + \ldots,$$

wobei jetzt die Coefficienten A, B, C, ... beständig sind, d. i. weder x noch y enthalten.

Diefs vorausgesetzt, hat man nun

$$\begin{aligned}
&f(x+h, y+k) \\
&= A(x+h)^a(y+k)^\alpha + B(x+h)^b(y+k)^\beta + \ldots \\
&= A\left[x^a + ax^{a-1}h + \frac{a(a-1)}{2}x^{a-2}h^2 + \ldots\right] \times \\
&\quad \left[y^\alpha + \alpha y^{\alpha-1}k + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}y^{\alpha-2}k^2 + \ldots\right] \\
&+ B\left[x^b + bx^{b-1}h + \frac{b(b-1)}{2}x^{b-2}h^2 + \ldots\right] \times \\
&\quad \left[y^\beta + \beta y^{\beta-1}k + \frac{\beta(\beta-1)}{2}y^{\beta-2}k^2 + \ldots\right] \\
&+ C\left[x^c + cx^{c-1}h + \frac{c(c-1)}{2}x^{c-2}h^2 + \ldots\right] \times \\
&\quad \left[y^\gamma + \gamma y^{\gamma-1}k + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}y^{\gamma-2}k^2 + \ldots\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

und wenn man wirklich multiplicirt und die Glieder wieder nach verticalen Reihen zusammennimmt, so ergibt sich offenbar:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + [Ph + Qk]$$
$$+ [Rh^2 + Shk + Tk^2] + \ldots,$$

wobei die von h und k unabhängigen Coefficienten P, Q, R, S, T, ... gewisse Functionen von x und y sind.

§. 179.

Um nun auch einige Hauptformen, welche bei Functionen von mehreren Variablen vorkommen, zu betrachten, sey

1. $u = A + ax + by - cz + \ldots$; so ist nach der Grundregel: $\Delta u = A + a(x+\Delta x) + b(y+\Delta y) - c(z+\Delta z) + \ldots - (A + ax + by - cz + \ldots) = a\Delta x + b\Delta y - c\Delta z + \ldots$, also:

α) $\Delta.(A + ax + by - cz + \ldots) = a\Delta x + b\Delta y - c\Delta z + \ldots$;

woraus sofort, wegen $a\Delta x = \Delta.ax$ [denn es ist $\Delta.ax = a(x+\Delta x) - ax = a\Delta x$], $b\Delta y = \Delta.by$ u. s. w. die Regel hervorgeht, dafs die Differenz einer algebraischen veränderlichen Summe gemacht wird, indem man die Differenz eines jeden einzelnen Gliedes nimmt; dabei ist die Differenz einer constanten Gröfse gleich Null, so wie auch constante Factoren sogleich vor das Differenzzeichen gesetzt werden können.

2. Für $u = xy$ hat man $\Delta u = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy$, oder, wenn man multiplicirt:

$$\beta)\quad \Delta.xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x.\Delta y;$$

und daraus fliefst die Regel für die Differenz eines Productes aus zwei veränderlichen Factoren von selbst, die sich auch leicht auf jede beliebige Anzahl von Factoren ausdehnen läfst. Denn setzt man z. B. statt y, yz, so folgt aus dieser Formel β) ganz einfach, wenn sie selbst wieder auf $\Delta.yz$ angewendet wird:

$$\Delta.xyz = yz\Delta x + xz\Delta y + xy\Delta z + z\Delta x\Delta y$$
$$+ y\Delta x\Delta z + x\Delta y\Delta z + \Delta x\Delta y\Delta z.$$

Setzt man in β) $y = A$, wo A eine constante Gröfse be-

zeichnet, so erhält man wegen $\Delta A = 0$:

$$\beta') \quad \Delta . Ax = A \Delta x,$$

was auch schon aus 1. hervorgeht.

3. Ist $u = \frac{x}{y}$, so wird $\Delta u = \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - \frac{x}{y}$, oder, wenn man reducirt:

$$\gamma) \quad \Delta . \frac{x}{y} = \frac{y \Delta x - x \Delta y}{y^2 + y \Delta y};$$

woraus sofort die Regel für die endliche Differenz eines veränderlichen Bruches folgt.

Ist $y = a$ constant, so wird wegen $\Delta y = \Delta a = 0$:

$$\Delta . \frac{x}{a} = \frac{a \Delta x}{a^2} = \frac{\Delta x}{a},$$

so, daſs man die Differenz eines Bruches, dessen Nenner constant ist, ganz einfach findet, indem man unter die Differenz des Zählers den ungeänderten Nenner setzt. (Es folgt auch schon aus β') $\Delta . \frac{x}{a} = \Delta . \frac{1}{a} x = \frac{1}{a} \Delta x = \frac{\Delta x}{a}$).

Ist dagegen $x = a$, so wird eben so: $\Delta . \frac{a}{y} = \frac{-a \Delta y}{y^2 + y \Delta y}$.

Wir sind also jetzt auch im Stande, Ausdrücke, wie $f(x) . F(x)$, $\frac{f(x)}{F(x)}$ u. s. w. (die wir im vorigen Paragraphe erwähnt haben) zu differenziiren; um hievon wenigstens ein Beispiel zu entwickeln, sey $\Delta . tang. x$ zu suchen. Es ist

$$\Delta . tang. x = \Delta . \frac{sin. x}{cos. x} \text{ (also nach der Regel } \gamma))$$

$$= \frac{cos. x \Delta . sin. x - sin. x \Delta . cos. x}{cos.^2 x + cos. x \Delta . cos. x},$$

welcher Ausdruck nun leicht, wenn man will, nach dem Vorhergehenden weiter entwickelt werden kann.

§. 180.

1. Um auch einige Beispiele von höhern Differenzen zu entwickeln, wollen wir zuerst für mehrere besondere Werthe von n, als $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Differenzen von x^n suchen.

Es ist (§. 178., 1.) $\Delta . x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$; ferner (§. 176.)
$\Delta^2.(x^2) = 2(x + \Delta x)(\Delta x + \Delta^2 x) + (\Delta x + \Delta^2 x)^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2$
$= 2\Delta x^2 + (2x + 4\Delta x)\Delta^2 x + (\Delta^2 x)^2$.

Einfacher noch kann die zweite Differenz aus der ersten erhalten werden, wenn man diese nach den im vorigen Paragraphe aufgestellten Regeln abermals differenziirt. Man erhält sonach:

$$\Delta^2 . x^2 = \Delta . (2x\Delta x + \Delta x^2) = 2\Delta . x\Delta x + \Delta . \Delta x^2,$$

oder wegen $\Delta . x\Delta x = x\Delta . \Delta x + \Delta x \Delta x + \Delta x \Delta . \Delta x$ (§. 179., β))
$= x\Delta^2 x + \Delta x^2 + \Delta x \Delta^2 x$ und $\Delta . (\Delta x)^2 = 2\Delta x \Delta^2 x + (\Delta^2 x)^2$
(wie oben) auch

$$\Delta^2 . x^2 = 2\Delta x^2 + (2x + 4\Delta x)\Delta^2 x + (\Delta^2 x)^2,$$

wie vorhin.

Eben so kann man leicht daraus die dritte, aus dieser dann die vierte Differenz u. s. w. ableiten.

1') Sucht man dagegen dieselben Differenzen unter der Voraussetzung, dafs Δx constant ist, so wird, wegen $\Delta . \Delta x = \Delta^2 x = 0$, $\Delta^3 x = 0$ u. s. w.:

$$\Delta . x = \Delta x; \quad \Delta^2 . x = 0, \text{ etc.}$$

$$\Delta . x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2; \quad \Delta^2 . x^2 = 2\Delta x \Delta . x = 2\Delta x^2;$$

$$\Delta^3 . x^2 = 0, \text{ etc.}$$

$$\Delta . x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3;$$

$$\Delta^2 . x^3 = 3\Delta x \Delta . x^2 + 3\Delta x^2 \Delta . x = 6x\Delta x^2 + 6\Delta x^3;$$

$$\Delta^3 . x^3 = 6\Delta x^2 \Delta . x = 6\Delta x^3; \quad \Delta^4 x^3 = 0, \text{ etc.}$$

u. s. w.

Allgemein findet man $\Delta^n . x^n = 1 . 2 . 3 \ldots n . \Delta x^n$.

2. Sucht man als zweites Beispiel die Differenzen von a^x, und zwar sogleich wieder unter der Voraussetzung, dafs Δx constant ist; so hat man

$$\Delta . a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1) \text{ (§. 178., 2)};$$

$$\Delta^2 . a^x = (a^{\Delta x} - 1)\Delta . a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^2;$$

$$\Delta^3 . a^x = (a^{\Delta x} - 1)^2\Delta . a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^3;$$

.

$$\Delta^n . a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^n.$$

3. Nimmt man unter der nämlichen Voraussetzung die

auf einander folgenden Differenzen von der Functionsreihe $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$; so erhält man ganz einfach:

$$\Delta y = B\Delta x + 2Cx\Delta x + C\Delta x^2 + 3Dx^2\Delta x + 3Dx\Delta x^2 + D\Delta x^3 + \ldots$$

$$\Delta^2 y = 2C\Delta x^2 + 6Dx\Delta x^2 + 6D\Delta x^3 + \ldots$$

$$\Delta^3 y = 6D\Delta x^3 + \ldots$$

u. s. w.

Daraus geht hervor, daſs allgemein genommen die erste Differenz eine, die zweite Differenz zwei, die dritte drei u. s. f. constante Gröſsen weniger als die ursprüngliche Function enthalten kann; welche Bemerkung für die Summenrechnung wichtig ist.

4. Wir wollen endlich noch die Differenzen von x^2y suchen, und dabei wieder Δx und Δy als constant annehmen (in der Anwendung muſs es immer aus der Natur des Gegenstandes hervorgehen, ob die Gröſsen Δx, Δy, ... constant oder veränderlich zu nehmen sind).

Es ist

$$\Delta(x^2y) = x^2\Delta y + y\Delta . x^2 + \Delta y\Delta . x^2$$
$$= x^2\Delta y + y(2x\Delta x + \Delta x^2) + \Delta y(2x\Delta x + \Delta x^2)$$

oder

$$\Delta . x^2y = x^2\Delta y + 2xy\Delta x + 2x\Delta y\Delta x + (y + \Delta y)\Delta x^2.$$

Ferner

$$\Delta^2 . x^2y = \Delta . (x^2\Delta y + 2xy\Delta x + \ldots) = \Delta y(2x\Delta x + \Delta x^2) + 2\Delta x(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y) + 2\Delta y\Delta x\Delta . x + \Delta x^2\Delta . y = 4x\Delta y\Delta x + (2y + 6\Delta y)\Delta x^2;$$

$$\Delta^3 . x^2y = 4\Delta y\Delta x\Delta . x + 2\Delta x^2\Delta . y = 6\Delta y\Delta x^2;$$

$$\Delta^4 . x^2y = 0;\ \Delta^5 . x^2y = 0;\ \text{u. s. w.}$$

5. Entwickelt man für die vorige Function $z = x^2y$ die partiellen Differenzen, so wird bei derselben Voraussetzung, daſs Δx und Δy constant sind:

$$\left(\frac{\Delta z}{x}\right) = 2xy\Delta x + y\Delta x^2;\quad \left(\frac{\Delta z}{y}\right) = x^2\Delta y.$$

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{x^2}\right) = 2y\Delta x^2;\quad \left(\frac{\Delta^2 z}{y^2}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{\Delta^2 z}{x,y}\right) = \left(\frac{\Delta^2 z}{y,x}\right) = 2x\Delta x\Delta y + \Delta y\Delta x^2.$$

$$\binom{\Delta^3 z}{x^3} = 0;\ \binom{\Delta^3 z}{x^2, y} = 2\Delta y \Delta x^2;\ \binom{\Delta^3 z}{x, y^2} = 0;\ \binom{\Delta^3 z}{y^3} = 0.$$

Alle folgenden Differenzen sind gleich Null.

6. Man findet genau eben so:

$$\underset{x,y}{\Delta^2} . x^2 y^2 = \underset{y}{\Delta} . (2 x y^2 \Delta x + y^2 \Delta x^2)$$
$$= (2 x \Delta x + \Delta x^2)(2 y \Delta y + \Delta y^2),$$

und überhaupt

$$\underset{x,y}{\Delta^2} . f(x) . f(y) = \Delta . f(x) \times \Delta . f(y).$$

§. 181.

Es läſst sich auch die Totaldifferenz einer Function mehrerer veränderlichen Gröſsen durch die partiellen Differenzen derselben ausdrücken.

1. Nehmen wir zuerst eine Function von zwei Variablen, nämlich $u = f(x, y)$; so ist dafür die erste Totaldifferenz: $\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Es ist aber auch

$$\binom{\Delta u}{x} = f(x + \Delta x, y) - f(x, y);$$

$$\binom{\Delta u}{y} = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \text{ und (§. 177.)}$$

$$\binom{\Delta^2 u}{x, y} = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)$$
$$- f(x + \Delta x, y) + f(x, y);$$

mithin

$$\binom{\Delta u}{x} + \binom{\Delta u}{y} + \binom{\Delta^2 u}{x, y} = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

folglich

$$m)\quad \Delta u = \binom{\Delta u}{x} + \binom{\Delta u}{y} + \binom{\Delta^2 u}{x, y}\ {}^{*)}.$$

*) Diese Relation kann auch auf folgende Art abgeleitet werden:

Aendert sich in $u = f(x, y)$ gleichzeitig x und y, und geht x in $x + \Delta x$, y in $y + \Delta y$ über; so geht auch u in $u + \Delta u$ über; ein Resultat, welches auch erhalten wird, indem man nur zuerst x sich ändern, und dann erst y in $y + \Delta y$ übergehen läſst. Für die erste Aenderung verwandelt sich u in $u + \binom{\Delta u}{x}$, und wenn man in diesem letztern

So ist z. B. nach dieser Formel:

$$\Delta . xy = \binom{\Delta . xy}{x} + \binom{\Delta . xy}{y} + \binom{\Delta^2 . xy}{x, y}$$

$$= y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \Delta y \text{ (wie im §. 179, β)).}$$

Man findet auf die nämliche Art für $u = f(x\ y, z)$ ganz einfach:

$$n)\quad \Delta u = \binom{\Delta u}{x} + \binom{\Delta u}{y} + \binom{\Delta u}{z}$$

$$+ \binom{\Delta^2 u}{x, y} + \binom{\Delta^2 u}{x, z} + \binom{\Delta^2 u}{y, z} + \binom{\Delta^3 u}{x, y, z};$$

und so auch die folgenden Relationen für Functionen von noch mehreren Variablen nach demselben, leicht zu übersehenden, Gesetze.

Diese erhaltenen Ausdrücke $m)$ und $n)$ lassen sich auch symbolisch, und zwar auf folgende Art darstellen: Für $u = f(x, y)$:

$$\Delta u = \left[\left(1 + \underset{x}{\Delta}\right)\left(1 + \underset{y}{\Delta}\right) - 1\right] u.$$

Für $u = f(x, y, z)$:

$$\Delta u = \left[\left(1 + \underset{x}{\Delta}\right)\left(1 + \underset{y}{\Delta}\right)\left(1 + \underset{z}{\Delta}\right) - 1\right] u, \text{ u. s. w.,}$$

welche ganz einfache Darstellung leicht zu verstehen ist.

2. Für die zweiten Differenzen hat man, wenn $u = f(x, y)$ ist:

$$\Delta^2 . u = \Delta(\Delta u) = \underset{x}{\Delta}(\Delta u) + \underset{y}{\Delta}(\Delta u) + \underset{x, y}{\Delta^2}(\Delta u);$$

oder wegen

Ausdrucke y sich ändern läfst, dieser wieder in

$$u + \binom{\Delta u}{x} + \underset{y}{\Delta}\binom{u + \Delta u}{x} = u + \binom{\Delta u}{x} + \binom{\Delta u}{y} + \binom{\Delta^2 u}{x, y};$$

welcher Ausdruck dem vorigen $u + \Delta u$ gleich gesetzt, sofort die obige Gleichung $m)$ gibt.

Für $u = f(x, y, z)$ verwandelt sich, wenn x und y in $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ übergehen, u nach dem unmittelbar Vorhergehenden in $u + \binom{\Delta u}{x} + \binom{\Delta u}{y} + \binom{\Delta^2 u}{x, y}$, und dieser Ausdruck wieder, wenn man darin noch z in $z + \Delta z$ übergehen läfst, in

$$u + \binom{\Delta u}{x} + \binom{\Delta u}{y} + \binom{\Delta^2 u}{x, y} + \underset{z}{\Delta}\left[u + \binom{\Delta u}{x} + \binom{\Delta u}{y} + \binom{\Delta^2 u}{x, y}\right] =$$

$$u + \binom{\Delta u}{x} + \binom{\Delta u}{y} + \binom{\Delta u}{z} + \binom{\Delta^2 u}{x, y} + \binom{\Delta^2 u}{x, z} + \binom{\Delta^2 u}{y, z} + \binom{\Delta^3 u}{x, y, z}.$$

$$\underset{x}{\Delta}(\underset{x}{\Delta}u) = \underset{x}{\Delta}\left(\underset{x}{\Delta u} + \underset{y}{\Delta u} + \underset{x,y}{\Delta^2 u}\right) = \underset{x^2}{\Delta^2 u} + \underset{x,y}{\Delta^2 u} + \underset{x^2,y}{\Delta^3 u},$$

$$\underset{y}{\Delta}(\Delta u) = \underset{y}{\Delta}\left(\underset{x}{\Delta u} + \underset{y}{\Delta u} + \underset{x,y}{\Delta^2 u}\right) = \underset{x,y}{\Delta^2 u} + \underset{y^2}{\Delta^2 u} + \underset{x,y^2}{\Delta^3 u}$$

und

$$\underset{x,y}{\Delta^2}(\Delta u) = \underset{y}{\Delta}\left(\underset{x^2}{\Delta^2 u} + \underset{x,y}{\Delta^2 u} + \underset{x^2,y}{\Delta^3 u}\right) = \underset{x^2,y}{\Delta^3 u} + \underset{x,y^2}{\Delta^3 u} + \underset{x^2,y^2}{\Delta^4 u}$$

auch:

$$p)\quad \Delta^2 u = \binom{\Delta^2 u}{x^2} + 2\binom{\Delta^2 u}{x,y} + \binom{\Delta^2 u}{y^2}$$
$$+ 2\binom{\Delta^3 u}{x^2,y} + 2\binom{\Delta^3 u}{x,y^2} + \binom{\Delta^4 u}{x^2,y^2}.$$

Symbolisch läſst sich diese Differenz auf folgende einfache Weise darstellen:

$$\Delta^2 u = \left[\left(1 + \underset{x}{\Delta}\right)\left(1 + \underset{y}{\Delta}\right) - 1\right]^2 u.$$

Eben so findet man ganz allgemein für $u = f(x,y)$:

$$\Delta^n u = \left[\left(1 + \underset{x}{\Delta}\right)\left(1 + \underset{y}{\Delta}\right) - 1\right]^n u;$$

für $u = f(x,y,z)$:

$$\Delta^n u = \left[\left(1 + \underset{x}{\Delta}\right)\left(1 + \underset{y}{\Delta}\right)\left(1 + \underset{z}{\Delta}\right) - 1\right]^n u,$$

und so, nach diesem einfachen Gesetze, weiter.

So ist für das obige Beispiel (4. im vorigen Paragraph) von $u = x^2 y$, wenn man Δx und Δy als constant ansieht, wegen $\binom{\Delta u}{x} = 2xy\Delta x + y\Delta x^2$, $\binom{\Delta u}{y} = x^2\Delta y$ und $\binom{\Delta^2 u}{x,y} = 2x\Delta x\Delta y + \Delta y\Delta x^2$ (nach m)):

$$\Delta u = 2xy\Delta x + x^2\Delta y + 2x\Delta x\Delta y + (y + \Delta y)\Delta x^2.$$

Ferner, wegen

$\binom{\Delta^2 u}{x^2} = 2y\Delta x^2$, $\binom{\Delta^2 u}{y^2} = 0$, $\binom{\Delta^2 u}{x,y} = 2x\Delta x\Delta y + \Delta y\Delta x^2$,

$\binom{\Delta^3 u}{x^2,y} = 2\Delta y\Delta x^2$, $\binom{\Delta^3 u}{x,y^2} = 0$ und $\binom{\Delta^4 u}{x^2,y^2} = 0$ (nach p)):

$$\Delta^2 u = 2y\Delta x^2 + 4x\Delta x\Delta y + 2\Delta y\Delta x^2 + 4\Delta y\Delta x^2$$
$$= (2y + 6\Delta y)\Delta x^2 + 4x\Delta x\Delta y,$$

wie oben (im angeführten Paragraphe). Eben so findet man auch leicht die folgenden Differenzen.

Anmerk. Die bisher betrachteten Functionen waren sämmtlich entwickelte Functionen (§. 1., Erkl. 3.); es lassen sich aber auch die Differenzen der unentwickelten Functionen eben so berechnen.

Ist z. B. zwischen den beiden Variablen x, y, von denen die letztere als eine Function der erstern angesehen werden soll, die Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben; so hat man auch, weil y in $y + \Delta y$ übergeht, wenn x um Δx zunimmt:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0;$$

kann man daher aus dieser Differenzengleichung Δy bestimmen, so hat man sofort die erste Differenz der unentwickelten Function y.

Man habe z. B. $y^2 + a y = b x^2 + c$, so ist auch

$$(y + \Delta y)^2 + a(y + \Delta y) = b(x + \Delta x)^2 + c$$

oder

$$y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 + a y + a\Delta y = b x^2 + 2bx\Delta x + b\Delta x^2 + c,$$

oder mit Berücksichtigung der ursprünglichen Gleichung:

$$\Delta y^2 + (a + 2y)\Delta y = 2bx\Delta x + b\Delta x^2;$$

welches sofort die Differenzengleichung für die gegebene Gleichung ist. Bestimmt man daraus, was hier möglich ist, Δy, so entsteht:

$$\Delta y = \tfrac{1}{2}[-(a + 2y) \pm \sqrt{(a + 2y)^2 + 8bx\Delta x + 4b\Delta x^2}].$$

Dasselbe würde man auch finden, wenn man aus der gegebenen Gleichung y bestimmen (die Function sondern) und dann nach dem Obigen die Differenz davon nehmen wollte.

Auf gleiche Weise kann man auch die höhern Differenzen der unentwickelten Functionen finden.

Dreizehntes Capitel.

Von den Summen oder endlichen Integralien der Functionen.

§. 182.

Erklärungen.

Die Summenrechnung beschäftigt sich mit der Zurückleitung der ursprünglichen Functionen aus ihren gegebenen Differenzen, und ist sonach die entgegengesetzte Operation von jener der Differenzenrechnung.

Die zu suchende Function wird in Bezug auf die gegebene Differenz die Summe, oder auch das endliche Integral, und zwar von der 1sten, 2ten, . . . nten Ordnung genannt, je nachdem die vorliegende Differenz selbst von der 1sten, 2ten, . . . nten Ordnung ist. Man deutet die Operation, nach welcher aus einer Differenz die Summe gefunden werden soll, und welche das Summiren oder Integriren genannt wird, durch die Vorsetzung des griechischen Buchstaben Σ an. Ist nämlich

$$\Delta.f(x) = y,\ \Delta^2.f(x) = y',\ .\ .\ .\ \Delta^n.f(x) = Y;$$

so ist umgekehrt $f(x) = \Sigma y = \Sigma^2 y' = .\ .\ . = \Sigma^n Y$, so dafs immer die beiden einander entgegengesetzten Gleichungen

$$a)\quad Y = \Delta^n.f(x) \quad \text{und} \quad b)\quad f(x) = \Sigma^n Y$$

zu gleicher Zeit bestehen, und sofort die beiden (entgegengesetzten) Operationszeichen Σ^n und Δ^n, wo diese zusammenkommen, sich aufheben.

Wir gehen nun sogleich zur Bestimmung der einfachsten Summen selbst über, wobei wir fortwährend die im vorigen Capitel abgeleiteten Differenzen, mit dem hier aufgestellten Grundsatze: dafs, wenn z das richtige Resultat von $\Sigma.f(x)$ seyn soll, auch wieder umgekehrt $\Delta z = f(x)$ seyn mufs, im Auge behalten müssen.

§. 183.

1. Für $\Delta . f(x) = y$ ist, wenn A eine constante Gröfse bezeichnet, $\Delta . Af(x) = A\Delta . f(x) = Ay$ [β'), §. 179]; also umgekehrt: $\Sigma Ay = Af(x) = A\Sigma\Delta f(x) = A\Sigma y$, d. i.

$$\Sigma Ay = A\Sigma y.$$

2. Es ist

$$\Sigma[A+f(x)+f(y)-f(z)+..] = \Sigma A+\Sigma f(x)+\Sigma f(y)-\Sigma f(z)+...$$

weil auch umgekehrt: $\Delta.[\Sigma A+\Sigma f(x)+\Sigma f(y)-\Sigma f(z)+..] = \Delta\Sigma A+\Delta\Sigma f(x)+\Delta\Sigma f(y)-\Delta\Sigma f(z)+... = A+f(x) +f(y)-f(z)+...$ ist. Daraus folgt offenbar die Regel für das Summiren oder Integriren einer algebraischen Summe überhaupt. So ist z. B. nach dieser Regel:

$$\Sigma(a+bx+cx^2+...+px^m) = \Sigma a+\Sigma bx+\Sigma cx^2+...$$
$$...+\Sigma px^m = a\Sigma x^0+b\Sigma x+c\Sigma x^2+...+p\Sigma x^m$$

und man darf zur vollständigen Ausführung dieser Summe nur noch die Formel für Σx^m entwickeln, mit deren Ableitung wir uns sofort beschäftigen wollen.

3. Es ist (§. 178., 1.)

$$\Delta . x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-3}\Delta x^3 + ...;$$

nimmt man in dieser Gleichung beiderseits die Summen, so entsteht, wenn Δx als constant angenommen wird (mit Berücksichtigung von 1. des gegenwärtigen Paragraphes):

$$x^n = n\Delta x\Sigma x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta x^2\Sigma x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta x^3\Sigma x^{n-3} + ...,$$

oder wenn man in dieser Gleichung $n = m+1$ setzt und dann daraus Σx^m bestimmt:

$$a)\ \Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \frac{m}{2}\Delta x\Sigma x^{m-1} - \frac{m(m-1)}{2 \cdot 3}\Delta x^2\Sigma x^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4}\Delta x^3\Sigma x^{m-3} - ... - \frac{\Delta x^m}{m+1}\Sigma x^0 \text{ *)}$$

*) Hier, wie überall, steht Σx^m für $\Sigma . (x^m)$.

eine Formel, aus welcher sich schrittweise $\Sigma x^0 = \Sigma 1$, Σx, Σx^2, . . . finden läſst, wenn man nach und nach $m = 0, 1, 2, \ldots$ setzt.

Es ist nämlich

$$\Sigma x^0 = \Sigma 1 = \frac{x}{\Delta x} \text{ *)}$$

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{\Delta x}{2}\Sigma x^0 = \frac{x^2 - x\Delta x}{2.\Delta x} = \frac{x(x-\Delta x)}{2.\Delta x}$$

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\Delta x} - \Delta x\Sigma x - \frac{\Delta x^2}{3}\Sigma x^0 =$$

$$\frac{2x^3 - 3x(x-\Delta x)\Delta x - 2x\Delta x^2}{2.3.\Delta x} = \frac{x(x-\Delta x)(2x-\Delta x)}{2.3.\Delta x}$$

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\Delta x} - \frac{3\Delta x}{2}\Sigma x^2 - \Delta x^2\Sigma x - \frac{\Delta x^3}{4}\Sigma x^0 = \frac{x^2(x-\Delta x)^2}{4.\Delta x}$$

(wenn man nämlich substituirt und reducirt) u. s. w.

Will man allgemein Σx^m auf diese Weise, nämlich bloſs durch x und Δx ausdrücken; so muſs man damit anfangen, in der Formel α) statt m, nach und nach $m-1$, $m-2$, . . . zu setzen, um nämlieh Σx^{m-1}, Σx^{m-2}, . . . zu bestimmen, und diese Werthe dann wieder in α) sub-

*) Diese Formel läſst sich auch unabhängig von der obigen Entwicklung α) auf folgende Art ableiten:

Es ist $\Sigma\Delta x = x$ und, wegen $\Sigma\Delta x = \Sigma 1\Delta x = \Delta x\Sigma 1 = \Delta x\Sigma x^0$, auch $\Delta x\Sigma x^0 = x$, folglich $\Sigma x^0 = \frac{x}{\Delta x}$, wie oben.

Auf demselben Wege kann man auch die Summen der folgenden Potenzen finden.

Es ist nämlich $\Delta . x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$, also umgekehrt $x^2 = \Sigma(2x\Delta x + \Delta x^2) = 2\Delta x\Sigma x + \Delta x^2\Sigma 1$, oder wenn man für $\Sigma 1 = \Sigma x^0$ den eben gefundenen Werth substituirt: $x^2 = 2\Delta x\Sigma x + x\Delta x$, und daraus

$$\Sigma x = \frac{x^2 - x\Delta x}{2\Delta x} = \frac{x(x-\Delta x)}{1.2\Delta x}.$$

Eben so ist $\Delta . x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$, also auch $x^3 = 3\Delta x\Sigma x^2 + 3\Delta x^2\Sigma x + \Delta x^3\Sigma 1$, und wenn man für Σx und $\Sigma 1$ substituirt: $x^3 = 3\Delta x\Sigma x^2 + \frac{3}{2}x(x-\Delta x)\Delta x + x\Delta x^2$; daraus folgt:

$$\Sigma x^2 = \frac{2x^3 - 3x(x-\Delta x)\Delta x - 2x\Delta x^2}{2.3.\Delta x} = \frac{x(x-\Delta x)(2x-\Delta x)}{1.2.3.\Delta x}.$$

stituiren. Vergleicht man indeſs diese Formel α) mit jener 4) des 92sten Paragraphes (Anmerk. 2), so findet man, daſs in dieser letztern nur $n = -\frac{x}{\Delta x}$ gesetzt werden darf, um daraus die gegenwärtige Formel α), bis auf das Zeichen des ersten Gliedes, im zweiten Theile der Gleichung, zu erhalten. Das Ergebniſs der genannten Substitutionen in der Formel α), von $m-1$, $m-2$, . . . statt m, muſs also auch mit jenem aus der erwähnten Formel 4), §. 92. (in welcher $n = -\frac{x}{\Delta x}$ gesetzt, und sodann, der Verschiedenheit im Zeichen des ersten Gliedes wegen, durchaus die Zeichen geändert worden sind) für dieselbe Substitution von $m-1$, $m-2$, . . . statt m, identisch seyn. Da aber das Resultat dieser Substitution in der zuletzt erwähnten Formel 4), schon durch die Gleichung 2) desselben Paragraphes gegeben ist; so erhalten wir ganz einfach, ohne erst in α) die besagten Substitutionen und Reductionen vornehmen zu dürfen, die verlangte Formel, indem wir in jener 2) (§. 92.) $n = \frac{-x}{\Delta x}$ setzen, durchaus dann, um den Nenner im ersten Theile wegzuschaffen, mit $\pm \Delta x^m$ multipliciren, und endlich noch im zweiten Theile der Gleichung, aus dem angeführten Grunde, die Zeichen ändern *). Man erhält dadurch

*) Man erhält nämlich, wenn in der erwähnten Gleichung 4) (§. 92.) $n = \frac{-x}{\Delta x}$ gesetzt, und sogleich durchaus mit $\pm \Delta x^m$ multiplicirt wird:

$$\int x^m = \frac{-x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \frac{m}{2}\Delta x \int x^{m-1}$$
$$- \frac{m(m-1)}{2 \cdot 3}\Delta x^2 \int x^{m-2} - \ldots - \frac{\Delta x^m}{m+1}\int x^0,$$

welches offenbar die obige Formel α), bis auf das Zeichen des ersten Gliedes der Reihe, ist. Setzt man aber in dieser Gleichung statt m nach und nach $m-1$, $m-2$, . . . und substituirt die entstehenden Werthe $\int x^{m-1}$, $\int x^{m-2}$, . . . wieder zurück, wodurch (gemäſs der in §. 92., Anmerk. 2, gemachten Bemerkung) die genannte Formel 2), §. 92. zum Vorscheine kommt (wenn man nämlich darin ebenfalls $n = \frac{-x}{\Delta x}$

wenn die *Bernoullischen* Zahlen wieder der Reihe nach durch $B_1, B_2, B_3, \ldots$ bezeichnet werden, die Formel:

$$\text{II.} \quad \Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \frac{x^m}{2} + \tfrac{1}{2} B_1 \binom{m}{1} x^{m-1} \Delta x$$

$$- \tfrac{1}{4} B_2 \binom{m}{3} x^{m-3} \Delta x^3 + \tfrac{1}{6} B_3 \binom{m}{5} x^{m-5} \Delta x^5 - \text{u. s. w.}$$

wobei $B_1, B_2, \ldots$ die in *C*), §. 92. angeführten Zahlenwerthe besitzen.

4. Wir sind also jetzt im Stande, die in 2. begonnene Summirung vollends auszuführen; es ist nämlich

$$\Sigma(a + bx + cx^2 + \ldots) = a\Sigma x^0 + b\Sigma x + c\Sigma x^2 + \ldots =$$

$$\frac{ax}{\Delta x} + \frac{bx(x-\Delta x)}{2\Delta x} + \frac{cx(x-\Delta x)(2x-\Delta x)}{2 \cdot 3 \cdot \Delta x} + \ldots$$

Da aber die gesuchte Function offenbar auch eine constante Gröfse enthalten kann, die sofort durch die Differenziation wegfällt, also in der gegebenen ersten Differenz nicht erscheint; so wird man, wenn diese gefundene Summe in jedem Falle vollständig seyn soll, derselben noch eine constante Gröfse, die vorläufig noch unbestimmt und willkürlich ist, und defshalb die willkürliche Constante genannt, und allgemein mit Const., oder kürzer noch durch C bezeichnet wird, hinzufügen müssen.

Der Werth dieser willkürlichen Constante, die man sofort jeder gefundenen Summe noch beifügen mufs, wird in der Anwendung immer aus der Natur des Gegenstandes, wie wir weiter unten in einigen Beispielen sehen werden,

setzt); so erhält man, wie man sich leicht überzeugt, dasselbe Resultat mit entgegengesetzten Zeichen, als wenn man diese Substitution und Entwicklung in der Reihe:

$$\int x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \frac{m}{2} \Delta x \int x^{m-1}$$

$$- \frac{m(m-1)}{2 \cdot 3} \Delta x^2 \int x^{m-2} - \ldots - \frac{\Delta x^m}{m+1} \int x^0,$$

welche mit jener *a*) identisch ist, vornimmt; woraus sofort die Nothwendigkeit der angegebenen Zeichenänderung in der Formel 2) von selbst erhellet.

selbst bestimmt, und kann dann natürlich auch in vielen Fällen gleich Null werden.

Es ist also vollständig:

$$\Sigma(a+bx+cx^2)=\frac{ax}{\Delta x}+\frac{bx(x-\Delta x)}{2\Delta x}+\frac{cx(x-\Delta x)(2x-\Delta x)}{2.3.\Delta x}+C.$$

5. Um z. B. die Differenz $\Delta y=(a+2bx)\Delta x+b\Delta x^2$ zu summiren, oder daraus y zu bestimmen, hat man

$$\Sigma\Delta y=y=\Sigma[(a+2bx)\Delta x+b\Delta x^2]=$$
$$a\Delta x\Sigma x^0+2b\Delta x\Sigma x+b\Delta x^2\Sigma x^0,$$

oder auch

$$y=(a\Delta x+b\Delta x^2)\Sigma 1+2b\Delta x\Sigma x$$
$$=(a\Delta x+b\Delta x^2)\frac{x}{\Delta x}+2b\Delta x.\frac{x(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

d. i. $y=(a+b\Delta x)x+bx(x-\Delta x)=ax+bx^2+C.$

Gesetzt nun, man wüſste aus der Natur des Gegenstandes, auf welchen sich diese Summe bezieht, daſs für $x=0$ auch $y=0$ ist; so müſste offenbar auch die Constante $C=0$ seyn. Wäre es dagegen bekannt, daſs allgemein für $x=A$ $y=B$ seyn muſs, so hätte man zur Bestimmung von C:

$B=aA+bA^2+C$, und daraus $C=B-aA-bA^2$, so, daſs dann das vollständige Integral oder dis vollständige Summe seyn würde:

$$y=B+a(x-A)+b(x^2-A^2).$$

6. Es ist (§. 178., 2.) $\Delta.a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$, also auch umgekehrt $a^x=\Sigma a^x(a^{\Delta x}-1)=(a^{\Delta x}-1)\Sigma a^x$; daraus folgt:

$$\Sigma a^x=\frac{a^x}{a^{\Delta x}-1}+C.$$

7. Wegen (§. 178, 3.) $\Delta.\log.x=\log.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$, hat man $\log.x=\Sigma\log.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$, also:

$$\Sigma\log.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\log.x+C=\log.x+\log.C=\log.Cx,$$

weil man der noch unbestimmten Constanten C jede Form geben kann.

8. Es war [§. 178., 4., 5., (α, (β]

$$\Delta.\,sin.\,x = 2\,sin.\tfrac{1}{2}\,\Delta x\;cos.\,(x + \tfrac{1}{2}\,\Delta x)\,,$$

$$\text{und } \Delta.\,cos.\,x = -\,2\,sin.\tfrac{1}{2}\,\Delta x\;sin.\,(x + \tfrac{1}{2}\,\Delta x)\,,$$

folglich ist auch umgekehrt, da wir Δx fortwährend als constant annehmen: $sin.\,x = 2\,sin.\tfrac{1}{2}\,\Delta x\,\Sigma\,cos.\,(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)$ und $cos.\,x = -\,2\;sin.\tfrac{1}{2}\,\Delta x\,\Sigma\;sin.\;(x + \tfrac{1}{2}\,\Delta x)$, daraus ist

$$\Sigma\,sin.(x + \tfrac{1}{2}\Delta x) = -\frac{cos.\,x}{2\,sin\;\tfrac{1}{2}\Delta x} \text{ und } \Sigma\,cos.(x + \tfrac{1}{2}\Delta x) = \frac{sin.\,x}{2\,sin.\;\tfrac{1}{2}\,\Delta x}$$

und wenn man in diesen Ausdrücken statt x, $x - \tfrac{1}{2}\,\Delta x$ schreibt, so entsteht (da dabei Δx ungeändert bleibt):

$$\Sigma\,sin.\,x = -\frac{cos.\,(x - \tfrac{1}{2}\,\Delta x)}{2\,sin.\,\tfrac{1}{2}\,\Delta x} + C.$$

$$\Sigma\,cos.\,x = \frac{sin.\,(x - \tfrac{1}{2}\,\Delta x)}{2\,sin.\,\tfrac{1}{2}\,\Delta x} + C.$$

(Auch entsteht von diesen beiden Ausdrücken einer aus dem andern, wenn man in dem letztern statt x, $90 - x$ setzt, wodurch Δx in $\Delta\,(90 - x) = -\,\Delta x$ übergeht.)

§. 184.

1. Es ist

$$\Sigma\,(\Delta x + \Delta y) = \Sigma\Delta x + \Sigma\Delta y = x + y + C.$$

Aber auch, wenn wieder Δx und Δy constant sind,

$$\Sigma(\Delta x + \Delta y) = (\Delta x + \Delta y)\,\Sigma\,1\,,$$

mithin $(\Delta x + \Delta y)\,\Sigma\,1 = x + y + C.$, und daraus wird

$$\Sigma\,1 = \frac{x + y}{\Delta x + \Delta y} + C.$$

(Weil auch $\dfrac{C}{\Delta x + \Delta y}$ wieder eine unbestimmte constante Gröſse ist, die kurz durch C bezeichnet werden kann.)

2. Aus $\Delta.(x^2 + y) = 2\,x\,\Delta x + \Delta x^2 + \Delta y$ folgt $x^2 + y = 2\,\Delta x\,\Sigma x + \Delta x^2\,\Sigma\,1 + \Delta y\,\Sigma\,1$ und daraus ist:

$$\Sigma x = \frac{x^2 + y - (\Delta x^2 + \Delta y)\,\Sigma\,1}{2\,\Delta x} + C.$$

Eben so wird, wenn man x und y mit einander verwechselt:

$$\Sigma y = \frac{x + y^2 - (\Delta x + \Delta y^2)\,\Sigma 1}{2\,\Delta y} + C.$$

3. Aus $\Delta.(x^3 + y) = 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3 + \Delta y$ folgt wieder $x^3 + y = 3\,\Delta x\,\Sigma x^2 + 3 \Delta x^2\,\Sigma x + (\Delta x^3 + \Delta y)\,\Sigma 1$ und daraus ist:

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3 + y - 3\,\Delta x^2\,\Sigma x - (\Delta x^3 + \Delta y)\,\Sigma 1}{3\,\Delta x} + C.$$

Eben so ist

$$\Sigma y^2 = \frac{x + y^3 - 3\,\Delta y^2\,\Sigma y - (\Delta x + \Delta y^3)\,\Sigma 1}{3\,\Delta y} + C.$$

Auf dieselbe Weise kann man fortfahren, um die Summen der folgenden Potenzen von x und y immer durch die vorhergehenden oder nächst niedrigeren auszudrücken.

4. Aus der Differenz (§. 180., 4.)

$$\Delta.x^2 y = x^2\,\Delta y + 2\,xy\,\Delta x + 2\,x\,\Delta y\,\Delta x + (y + \Delta y)\,\Delta x^2$$

erhält man

$$x^2 y = \Delta y\,\Sigma x^2 + 2 \Delta x\,\Sigma xy + 2 \Delta x \Delta y\,\Sigma x + \Delta x^2\,\Sigma y + \Delta y \Delta x^2\,\Sigma 1,$$

und daraus

$$\Sigma xy = \frac{x^2 y - \Delta y\,\Sigma x^2 - 2\,\Delta x\,\Delta y\,\Sigma x - \Delta x^2\,\Sigma y - \Delta y\,\Delta x^2\,\Sigma 1}{2\,\Delta x}.$$

Auf demselben Wege kann man die Summen für $x^2 y$, xy^2, $x^2 y^2$ u. s. w. finden.

5. Aus der Formel $\Delta.xy = x \Delta y + y \Delta x + \Delta x \Delta y$ folgt $xy = \Sigma\,x \Delta y + \Sigma\,(y \Delta x + \Delta x \Delta y)$ und daraus wieder

$$\Sigma\,x \Delta y = xy - \Sigma\,(y \Delta x + \Delta x \Delta y);$$

welche Gleichung die Regel für das theilweise Summiren enthält Setzt man $\Delta y = z$, so wird auch, wegen $y = \Sigma z$:

$$\Sigma.xz = x \Sigma z - \Sigma(\Delta x\,\Sigma z + z \Delta x).$$

§. 185.

Durch das wiederholte Summiren der Summen von niederigerer Ordnung, entstehen die höheren Summen, und zwar gibt die Summe der Summe erster Ordnung, wenn wieder die willkürliche Constante beigefügt wird, die voll-

ständige zweite Summe, daraus erhält man eben so die dritte Summe u. s. w. Ist nämlich $y = f(x)$, so ist $\Sigma y + A$ (wo A die willkürliche Constante bezeichnet) die erste, $\Sigma(\Sigma y + A) = \Sigma^2 y + A\Sigma 1 + B$ die zweite, $\Sigma(\Sigma^2 y + A\Sigma 1 + B) = \Sigma^3 y + A\Sigma^2 1 + B\Sigma 1 + C$ die dritte vollständige Summe von $f(x)$ u. s. w. Man sieht hieraus, daſs die n^{te} vollständige Summe n willkürliche Constanten enthält; fehlt davon eine oder die andere, oder wird einer derselben überhaupt ein bestimmter Werth beigelegt; so erhält man eine besondere, oder particuläre Summe.

1. Ist $u = f(x, y)$ und $\Delta^2_{x,y} . u = z$, so ist z die zweite Summe von u, und zwar diese Einmal nach x, und dann nach y genommen, d. i. $u = \Sigma^2_{x,y} z$; wenn nämlich analog mit den partiellen Differenzen, die partielle Summe von z nach x mit $\Sigma_x z$, jene nach y durch $\Sigma_y z$, die zweite Summe nach x mit $\Sigma^2_{x^2} z$ u. s. w. bezeichnet wird.

Es folgt überhaupt aus der Gleichung $\Delta^{m+n}_{x^m, y^n} . u = z$ unmittelbar die folgende: $\Sigma^{m+n}_{x^m, y^n} . z = u$.

Diese Summe von der $m + n^{ten}$ Ordnung wird, wenn sie vollständig seyn soll, sofort $m + n$ willkürliche Constanten enthalten. Dabei müssen wir vorzüglich noch bemerken, daſs in den partiellen Summen nach x, diese Constanten willkürliche oder unbestimmte Functionen von y, und in den partiellen Summen nach y, Functionen von x seyn können; weil die erstern durchs Differenziiren nach x, und die letztern durch jenes nach y (gerade so, wie die absoluten Constanten in der Total-Differenz) wegfallen; um daher die nöthige Allgemeinheit zu erzielen, müssen wir bei der partiellen Summirung die beizufügenden willkürlichen Constanten in der That dieser Bemerkung gemäſs annehmen.

2. Ist z. B. $u = \Delta x \Delta y$, so ist

$$\Sigma_y u = \Delta x \Sigma \Delta y = \Delta x . y + \varphi(x),$$

wobei nämlich $\varphi(x)$ statt der willkürlichen Constanten steht. Nimmt man in dieser letzten Gleichung auch noch die Summe nach x, so entsteht:

$$\Sigma^2_{y,x} u = y \Sigma \Delta x + \Sigma \varphi(x) = xy + \psi(x) + \varphi(y),$$

wenn man nämlich, da die Summe der unbestimmten Function $\varphi(x)$ ebenfalls noch unbestimmt ist, $\Sigma \varphi(x)$ kurz durch $\psi(x)$ und die Constante der neuen Summirung durch $\varphi(y)$ bezeichnet. Diese unbestimmten Functionen $\psi(x)$, $\varphi(y)$ (als willkürliche Constanten, wenn man so sagen darf) werden in der Anwendung ebenfalls wieder, wie überhaupt die willkürliche Constante C, aus der Natur des betreffenden Gegenstandes bestimmt, wie wir gleichfalls noch sehen werden. (Auch ist wieder leicht zu sehen, daſs $\Sigma^2_{x,y} = \Sigma^2_{y,x}$ oder allgemein, analog mit der letzten Relation in §. 177., $\Sigma^{m+n}_{x^m, y^n} = \Sigma^{m+n}_{y^n, x^m}$ ist.)

Sind Δx und Δy nicht weiter veränderlich, so ist auch

$$\Sigma^2_{x,y} u = \Sigma^2_{x,y} (\Delta x \Delta y) = \Delta x \Delta y \Sigma^2_{x,y} 1,$$

folglich $\Delta x \Delta y \Sigma^2_{x,y} 1 = xy + \psi(x) + \varphi(y)$, und daraus

$$\Sigma^2_{x,y} 1 = \frac{xy}{\Delta x \Delta y} + f(x) + F(y);$$

weil man die noch immer unbestimmten Functionen $\frac{\psi(x)}{\Delta x \Delta y}$ und $\frac{\varphi(y)}{\Delta x \Delta y}$, kürzer durch $f(x)$ und $F(y)$ ersetzen kann.

3. Es ist (§. 180., 5.) $\Delta^2_{x,y} . x^2 y = 2x \Delta x \Delta y + \Delta y \Delta x^2$, also umgekehrt:

$$x^2 y = \Sigma^2_{x,y} (2x \Delta x \Delta y + \Delta y \Delta x^2) = 2 \Delta x \Delta y \Sigma^2_{x,y} x + \Delta y \Delta x^2 \Sigma^2_{x,y} 1$$

und daraus erhält man:

$$\Sigma^2_{x,y} x = \frac{x^2 y}{2 \Delta x \Delta y} - \frac{\Delta x}{2} \Sigma^2_{x,y} 1 + \varphi(x) + \psi(y),$$

wo $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ die die Stelle der willkürlichen Constanten vertretenden unbestimmten Functionen sind.

Auf dieselbe Art findet man $\Sigma^2_{x,y} y$ (man darf dafür nur x mit y im vorigen Ausdrucke verwechseln), $\Sigma^2_{x,y} x^2$ u. s. w. Wir wollen nur noch $\Sigma^2_{x,y} (xy)$ wirklich durchführen.

4. Aus $\Delta^2_{x,y} . x^2 y^2 = 4 xy \Delta x \Delta y + 2 x \Delta x \Delta y^2 + 2 y \Delta x^2 \Delta y$
$+ \Delta x^2 \Delta y^2$ (§. 180., 6.), folgt:

$$x^2 y^2 = 4 \Delta x \Delta y \Sigma^2_{x,y} xy + 2 \Delta x \Delta y^2 \Sigma^2_{x,y} x + 2 \Delta x^2 \Delta y \Sigma^2_{x,y} y + \Delta x^2 \Delta y^2 \Sigma^2_{x,y} 1$$

und daraus ferner:

$$\Sigma^2_{x,y} (xy) = \frac{x^2 y^2}{4 \Delta x \Delta y} - \frac{\Delta y}{2} \Sigma^2_{x,y} . x - \frac{\Delta x}{2} \Sigma^2_{x,y} . y - \frac{\Delta x \Delta y}{4} \Sigma^2_{x,y} . 1,$$

oder wenn man für $\Sigma^2_{x,y} . x$, $\Sigma^2_{x,y} . y$ und $\Sigma^2_{x,y} . 1$ die vorigen Werthe aus 2. und 3. setzt:

$$\Sigma^2_{x,y} (xy) = \frac{x^2 y^2}{4 \Delta x \Delta y} - \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{x^2 y}{2 \Delta x \Delta y} - \frac{\Delta x}{2} \Sigma^2_{x,y} . 1 \right)$$
$$- \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{x y^2}{2 \Delta x \Delta y} - \frac{\Delta y}{2} \Sigma^2_{x,y} . 1 \right) - \frac{\Delta x \Delta y}{4} \Sigma^2_{x,y} . 1$$
$$= \frac{x^2 y^2}{4 \Delta x \Delta y} - \frac{x^2 y}{4 \Delta x} - \frac{x y^2}{4 \Delta y} + \frac{\Delta x \Delta y}{4} \Sigma^2_{x,y} . 1$$
$$= \frac{x^2 y^2}{4 \Delta x \Delta y} - \frac{x^2 y}{4 \Delta x} - \frac{x y^2}{4 \Delta y} + \frac{\Delta x \Delta y}{4} \left(\frac{xy}{\Delta x \Delta y} \right) + f(x) + F(y)$$

oder endlich, nach einer einfachen Reduction:

$$r) \quad \Sigma^2_{x,y} xy = \frac{xy (x - \Delta x)(y - \Delta y)}{4 \Delta x \Delta y} + f(x) + F(y) \text{ *)}.$$

Anmerk. Wir haben uns in diesen beiden letzten Capiteln fast bloſs auf die Elemente der Differenzen und Summen-

*) Es war allgemein (§. 180., 6.) $\Delta^2_{x,y} . f(x) . f(y) = \Delta . f(x) \times \Delta . f(y)$, folglich ist auch umgekehrt: $f(x) . f(y) = \Sigma^2_{x,y} [\Delta . f(x) \times \Delta . f(y)]$; oder wenn man $\Delta . f(x) = X$ und $\Delta . f(y) = Y$ setzt, wodurch $f(x) = \Sigma X$ und $f(y) = \Sigma Y$

rechnung beschränken müssen, und verweisen diejenigen, welche diesen Gegenstand ausführlicher durchgehen wollen, auf gröſsere Werke, als z. B. auf das oben angeführte Werk von *Brunacci*, auf *Lacroix's* »*Traité élémentaire de calcul differentiel et de calcul intégral*«. 5. *Edit. Par.* 1828. (8. 1. Bd.), und vorzüglich auf den dritten Theil seines gröſseren Werkes in 4. (*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral.* 2. *Ed. Paris* 1810), welcher den Titel führt: »*Traité des Différences et des Séries*«.

wird, auch: $\Sigma^2_{x,y}.XY = \Sigma X.\Sigma Y + \varphi(x) + \psi(y)$, wobei X und Y respective Functionen von x und y bezeichnen. Für $X = x$ und $Y = y$ erhält man als besondern Fall daraus: $\Sigma^2_{x,y} xy = \Sigma x.\Sigma y + \varphi(x) + \psi(y)$.

Vierzehntes Capitel.

Anwendung der Summen- und Differenzen-Rechnung auf einige besondere Fälle.

§. 186.

Wir wollen zuerst die Summenrechnung zur Bestimmung des allgemeinen Gliedes einer arithmetischen Reihe von einem beliebigen Grade anwenden.

Ist die Reihe vom n^{ten} Grade, und wird das allgemeine Glied derselben (§. 176.) durch $y = f(x)$ bezeichnet; so ist $\Delta^n y = a$, wo a die beständige n^{te} Differenz dieser Reihe darstellt. Durch wiederholtes Summiren erhält man aus dieser letzten Gleichung, wenn man berücksichtiget, daſs (m. s. den Schluſs von §. 176.) hier $\Delta x = 1$ ist:

$$\Delta^{n-1} y = \Sigma a = a\Sigma 1 = ax + A \quad (\S.\ 183.,\ 3.)$$

$$\Delta^{n-2} y = a\Sigma x + A\Sigma 1 = \frac{ax(x-1)}{2} + Ax + B$$

$$\Delta^{n-3} y = \frac{a}{2}\Sigma x^2 + \left(A - \frac{a}{2}\right)\Sigma x + B\Sigma 1$$

$$= \frac{ax(x-1)(2x-1)}{2.2.3} + \left(A - \frac{a}{2}\right)\frac{x(x-1)}{2} + Bx + C$$

u. s. w.

bis man endlich auf $\Delta^{n-n} y = y$ selbst kommt. $A, B, C, \ldots$ sind die Constanten der Summirungen, die zuletzt aus der Beschaffenheit der gegebenen Reihe bestimmt werden müssen.

Beispiel.

So hat man z. B. für die Reihe

6		8		14		24		38 . . .
	2		6		10		14	
		4		4		4		

welche sofort arithmetisch der zweiten Ordnung ist, nach der obigen Gleichung, wegen $n = 2$:

$$y = \frac{ax(x-1)}{2} + Ax + B,$$

oder, da hier $a = 4$ ist:

$$y = 2x(x-1) + Ax + B;$$

und dieses ist, weil A und B noch unbestimmt sind, das allgemeine Glied für alle arithmetische Reihen der zweiten Ordnung, von derselben beständigen Differenz $= 4$. Um dasselbe aber für die vorliegende Reihe einzurichten, d. h. um die Constanten der Integrationen für diesen Fall zu bestimmen; berücksichtige man, dafs für $x = 1$: $y = 6$ und für $x = 2$: $y = 8$ werden mufs. Man erhält sonach die beiden Bedingungsgleichungen:

$$6 = A + B, \text{ und } 8 = 4 + 2A + B,$$

woraus sofort $A = -2$ und $B = 8$ folgt. Es ist demnach, wenn diese Werthe in der vorigen Formel substituirt werden:

$$y = 2x^2 - 2x - 2x + 8 = 2(x^2 - 2x + 4)$$

oder, wenn man, wie es üblich ist, statt x n schreibt, so hat man als allgemeines Glied der gegebenen Reihe:

$$y = f(n) = 2(n^2 - 2n + 4).$$

§. 187.

Um ferner auf die Bestimmung der Summen oder summatorischen Glieder der Reihen eine Anwendung zu zeigen, verfahren wir auf folgende Art.

Es ist (§. 176.) $\Delta . f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, folglich auch, wenn man beiderseits die Summe nimmt: $f(x) = \Sigma f(x + \Delta x) - \Sigma f(x)$; daraus folgt $\Sigma f(x + \Delta x) = f(x) + \Sigma f(x)$, und wenn man statt x $x - \Delta x$ schreibt, auch:

$$1) \quad \Sigma f(x) = f(x - \Delta x) + \Sigma f(x - \Delta x).$$

Setzt man in dieser Gleichung statt x nach und nach $x - \Delta x$, $x - 2\Delta x$, $x - 3\Delta x$, ...; so erhält man

$$\Sigma f(x - \Delta x) = f(x - 2\Delta x) + \Sigma f(x - 2\Delta x),$$
$$\Sigma f(x - 2\Delta x) = f(x - 3\Delta x) + \Sigma f(x - 3\Delta x), \text{ u. s. w.}$$

Werden diese Werthe von rückwärts angefangen einer in den andern substituirt, so erhält man, wenn man bis zur ersten Gleichung 1) gekommen ist:

$$\Sigma f(x) = f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x) + f(x - 3\Delta x) + \ldots$$
$$\ldots + f(x - n\Delta x) + \Sigma f(x - n\Delta x) + \text{const.}$$

Bestimmt man aber, wie es die Natur des Gegenstandes erfordert, die Constante so, dafs für $n = 0$ das Summenglied $\Sigma f(x) = 0$ wird, wodurch also auch $\Sigma f(x - n\Delta x)$ verschwindet; so hat man

2) $\Sigma f(x) = f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x) + \ldots + f(x - n\Delta x)$.

Setzt man ferner in dieser Gleichung statt x, $x + nx$ und schreibt die Glieder in umgekehrter Ordnung, so erhält man auch:

3) $\Sigma f(x + n\Delta x) = f(x) + f(x + \Delta x) + f(x + 2\Delta x) + \ldots$
$$\ldots + f[x + (n-1)\Delta x];$$

dabei mufs die Constante der Integration oder Summirung immer so bestimmt werden, dafs für $n = 0$ auch $\Sigma f(x + n\Delta x) = \Sigma f(x)$ [in welche jetzt die vorhin erwähnte Summe $\Sigma f(x - n\Delta x)$ übergeht] verschwindet.

Für den besondern Fall, dafs $x = 1$ und auch $\Delta x = 1$ ist, hat man

$$\Sigma f(n+1) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n),$$

wobei die Constante so zu bestimmen ist, dafs für $n = 0$ auch $\Sigma f(n+1) = 0$ wird; und diefs ist die Summenformel für eine jede Reihe, deren allgemeines Glied durch $f(n)$, nämlich als Function vom Zeiger oder Index des Gliedes ausgedrückt ist.

Beispiel 1.

So ist z. B. für die einfache Reihe:

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots:$$

$f(n) = a + (n-1)d$, also $f(n+1) = a + nd$, und daher

$$S = \Sigma f(n+1) = \Sigma(a + nd) = a\Sigma 1 + d\Sigma n =$$
$$an + \frac{dn(n-1)}{2} + \text{const.}$$

wenn man nämlich in §. 183., 3. $x = n$ und $\Delta x = 1$ setzt. Da nun aber die Constante so bestimmt werden mufs, dafs für $n = 0$ auch $S = \Sigma f(n+1)$ verschwindet; so hat man $0 = 0 + \text{const.}$, so, dafs auch diese Null wird. Die ge-

suchte Summenformel für die gegebene Reihe ist demnach:

$$S = [2a + (n-1)d]\,\frac{n}{2}.$$

Beispiel 2.

Für die Reihe des vorigen Paragraphes: 6, 8, 14, ... hat man $f(n) = 2(n^2 - 2n + 4)$ (vor. Paragraph), also

$$S = \Sigma f(n+1) = 2\Sigma[(n+1)^2 - 2(n+1) + 4] =$$
$$2\Sigma(n^2+3) = 2\Sigma n^2 + 6\Sigma 1,$$

oder wenn man wieder aus §. 183., 3. substituirt ($x=n$, $\Delta x = 1$):

$$S = \frac{n(n-1)(2n-1)}{3} + 6n + \text{const.}$$

Da nun für $n = 0$ auch $S = 0$ seyn muſs, so verschwindet auch die Constante. (Man kann diese ebenfalls bestimmen, indem man von der Bemerkung ausgeht, daſs für $n = 1$: $S = 6$, oder für $n = 2$: $S = 6 + 8 = 14$ seyn muſs u. s. w.) Es ist also die Summenformel für die genannte Reihe:

$$S = n\left[\frac{(n-1)(2n-1)}{3} + 6\right].$$

Beispiel 3.

Für $S = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$ ist $f(n+1) = aq^n$, also:

$$S = \Sigma f(n+1) = a\Sigma q^n = a\,.\frac{q^n}{q-1} + \text{const.}$$

(Formel 6. in §. 183., $x=n$, $\Delta x = 1$). Da wieder für $n = 0$, $S = 0$ seyn muſs, so wird $0 = \frac{a}{q-1} + \text{const.}$, also

$$\text{const.} = -\frac{a}{q-1};$$

dieser für die Constante gefundene Werth in der vorigen Gleichung substituirt, gibt endlich

$$S = \frac{aq^n - a}{q-1}.$$

Beispiel 4.

Suchen wir noch die Summe der Sinusse, deren Bogen in einer einfachen arithmetischen Progression wachsen, nämlich

$$S = \sin.x + \sin.(x + \Delta x) + \sin.(x + 2\Delta x) + \ldots$$
$$\ldots + \sin.[x + (n-1)\Delta x].$$

Für diese Reihe ist $f(n+1) = sin.(x + n\Delta x)$, folglich $S = \Sigma f(n+1) = \Sigma\, sin.(x + n\Delta x)$, oder wenn man in 8., §. 183, statt x, $x + n\Delta x$ schreibt, auch:

$$S = \frac{-cos.[x + (n - \frac{1}{2})\Delta x]}{2\, sin.\frac{1}{2}\Delta x} + \text{const.}$$

Da nun aber diese Summe S für $n = 0$ verschwinden muſs, so hat man $0 = -\frac{cos.(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{2\, sin.\frac{1}{2}\Delta x} + \text{const.}$, und daraus $\text{const.} = \frac{cos.(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{2\, sin.\frac{1}{2}\Delta x}$; wird dieser Werth in der vorigen Gleichung substituirt, so erhält man endlich:

$$S = \frac{cos.(x - \frac{1}{2}\Delta x) - cos.[x + (n - \frac{1}{2})\Delta x]}{2\, sin.\frac{1}{2}\Delta x} = \frac{sin.\frac{1}{2}n\Delta x\; sin.[x + \frac{1}{2}(n-1)\Delta x]}{sin.\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Genau auf dieselbe Art (oder kürzer, wenn man in der letzten Formel statt x, $90 - x$ schreibt) findet man auch für $S' = cos.x + cos.(x + \Delta x) + cos.(x + 2\Delta x) + \ldots$ $\ldots + cos.[x + (n-1)\Delta x]$:

$$S' = \frac{sin.\frac{1}{2}n\Delta x\, cos\,[x + \frac{1}{2}(n-1)\Delta x]}{sin.\frac{1}{2}\Delta x}.$$

§. 188.

Um auch eine Anwendung von den partiellen Summen zu machen, wollen wir eine Doppelreihe (§. 80., Erkl. 3), und zwar jene, welche unter dem Namen der Pythagorischen Tafel oder des Ein Mal Eins bekannt ist, als Beispiel wählen, und das Summenglied für diese Reihe bestimmen. Die Reihe ist:

	1	2	3		x
1	1	2	3		x
2	2	4	6		$2x$
3	3	6	9		$3x$
.	.	.	.		.
y	y	$2y$	$3y$	. . .	xy

$z_{1,1}$	$z_{1,2}$	$z_{1,3}$	. . .	$z_{1,x}$
$z_{2,1}$	$z_{2,2}$	$z_{2,3}$	. . .	$z_{2,x}$
$z_{3,1}$	$z_{3,2}$	$z_{3,3}$	. . .	$z_{3,x}$
.	.	.	. . .	.
$z_{y,1}$	$z_{y,2}$	$z_{y,3}$	. . .	$z_{y,x}$

So wie wir nun im vorhergehenden Paragraphe für das summatorische Glied jeder einfachen Reihe, deren Zeiger 1, 2, 3, ... x sind, gefunden haben: $S = \sum_x f(x+1)$;

eben so findet man für das Summenglied jeder Doppelreihe, wenn die Zeiger von 1 angefangen und bis x und y fortlaufen:

$$S = \sum_y \left[\sum_x f(x+1, y+1)\right] = \sum_{x,y}^2 f(x+1, y+1) \text{ *)}.$$

Es ist daher die Summe für die gegenwärtige Doppelreihe, wegen $f(x,y) = xy$:

*) Es ist nämlich das allgemeine Glied einer solchen Reihe: $z = f(x,y)$, folglich auch [Gleich. 2) des vorigen Paragraphes] $\sum_x^{y,x} f(x,y) = f(x - \Delta x, y) + f(x - 2\Delta x, y) + \ldots$ $\ldots + f(x - n\Delta x, y)$, und daraus wird eben so, wenn man beiderseits die Summe nach y nimmt:

$$\sum_{x,y}^2 f(x,y) = \sum_y f(x - \Delta x, y) + \sum_y f(x - 2\Delta x, y) + \ldots$$
$$\ldots + \sum_y f(x - n\Delta x, y),$$

d. i.

$$\begin{aligned}\sum_{x,y}^2 f(x,y) = {} & f(x-\Delta x, y-\Delta y) + f(x-\Delta x, y-2\Delta y) + \ldots \\ & \ldots + f(x-\Delta x, y-n\Delta y) \\ & + f(x-2\Delta x, y-\Delta y) + f(x-2\Delta x, y-2\Delta y) + \ldots \\ & \ldots + f(x-2\Delta x, y-n\Delta y) \\ & + f(x-3\Delta x, y-\Delta y) + f(x-3\Delta x, y-2\Delta y) + \ldots \\ & \ldots + f(x-3\Delta x, y-n\Delta y) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + f(x-n\Delta x, y-\Delta y) + f(x-n\Delta x, y-2\Delta y) + \ldots \\ & \ldots + f(x-n\Delta x, y-n\Delta y).\end{aligned}$$

Setzt man nun auch hier, wie diefs in der Gleichung 3) des vorigen Paragraphes geschehen ist, statt x $x + n\Delta x$, und eben so auch statt y $y + m\Delta y$, ferner $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 1$, $\Delta y = 1$, und schreibt die Reihe in umgekehrter Ordnung; so erhält man:

$$\begin{aligned}\sum_{n,m}^2 f(n+1, m+1) = {} & f(1,1) + f(1,2) + f(1,3) + \ldots + f(1,m) \\ & f(2,1) + f(2,2) + f(2,3) + \ldots + f(2,m) \\ & f(3,1) + f(3,2) + f(3,3) + \ldots + f(3,m) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & f(n,1) + f(n,2) + f(n,3) + \ldots + f(n,m)\end{aligned}$$

welches offenbar die Summe jeder Doppelreihe ist; dabei kann man noch, wenn man will, die Zeiger n und m mit jenen x und y vertauschen, was aber nicht wesentlich ist.

$$S = \Sigma^2_{x,y} . (x + 1)(y + 1),$$

oder, wenn man in der Formel r), §. 185., 4. statt x und y $x + 1$ und $y + 1$, dann $\Delta x = \Delta y = 1$ setzt:

$$S = \frac{(x+1)(y+1)\,xy}{4} + \varphi(x) + \psi(y).$$

Um noch die Constanten oder eigentlich die willkürlichen Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ der Integration zu bestimmen, berücksichtige man, daſs für $x = 1$ und $y = 1$, nach der Natur der vorliegenden Reihe, auch $S = 1$ seyn muſs; also ist

$$1 = 1 + \varphi(x) + \psi(y)$$

und daraus folgt: $\varphi(x) + \psi(y) = 0$ so, daſs diese Functionen hier gänzlich wegfallen und daher endlich das gesuchte Summenglied

$$S = \frac{x(x+1)\,y(y+1)}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2}$$

wird. Ist z. B. $x = 3$ und $y = 5$, so ist die Summe von fünf horizontalen Reihen (als Glieder der Doppelreihe) deren jede aus drei Gliedern besteht: $S = 6 . 15 = 90$.

§. 189.

Die nächste Anwendung, die wir von der Differenzenrechnung machen wollen, soll in der Entwicklung einiger bekannten Sätze der Combinationslehre bestehen.

1. Wir wollen zuerst untersuchen, wie oft sich x verschiedene Elemente zu zwei, ohne Wiederholung combiniren lassen. Zu diesem Ende bezeichnen wir diese Zahl, welche offenbar irgend eine Function von x seyn wird, durch $f(x)$. Vermehrt man nun x um 1, so ist klar, daſs die Anzahl der Binionen, welche aus $x + 1$ Elementen gebildet werden können, d. i. $f(x+1)$, gleich ist der vorigen Anzahl $f(x)$ noch vermehrt um x; weil das zuletzt hinzugekommene Element noch mit jedem der x Elemente eine binäre Verbindung eingeht. Man hat also:

$$f(x+1) = f(x) + x, \text{ oder } f(x+1) - f(x) = x,$$

d. i. $\Delta . f(x) = x$ (wobei nämlich $\Delta x = 1$ ist); und daraus

folgt unmittelbar $f(x) = \Sigma x'$ oder (§. 183., 3):

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + C.$$

Da aber für $x = 0$ auch $f(x) = 0$ wird, indem man dann keine Verbindung hat; so verschwindet auch die Constante, welche hier also wegzulassen ist. Man hat daher endlich für die Anzahl der Combinationen zu 2 aus x Elementen:

$$C_2 = \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}.$$

Bezeichnet man eben so die Anzahl der Combinationen zu 3 aus x Elementen, durch $f(x)$, und läſst abermals x in $x+1$ übergehen, also x um 1 zunehmen ($\Delta x = 1$); so erhält man die Anzahl der Ternionen aus $x+1$ Elementen, d. i $f(x+1)$, wenn man die vorhergehende Zahl $f(x)$ noch um jene $\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}$, d. i. um die Zahl der Binionen der vorhergehenden x Elemente vermehrt, weil das $x+1^{\text{ste}}$ Element mit jeder dieser binären Verbindungen eine Verbindung zu dreien eingeht, und dadurch der Zuwachs zu den schon vorhandenen $f(x)$ Ternionen gebildet wird. Man hat also

$$f(x+1) = f(x) + \frac{x(x-1)}{2}, \text{ oder } f(x+1) - f(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

d. i. (wieder für $\Delta x = 1$) $\Delta . f(x) = \frac{x(x-1)}{2}$, folglich $f(x) = \frac{1}{2} \Sigma (x^2 - x) = \frac{1}{2} \Sigma x^2 - \frac{1}{2} \Sigma x$, und wenn man wieder aus §. 183., 3. substituirt:

$$f(x) = \frac{x(x-1)(2x-1)}{2 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{x(x-1)}{2 \cdot 2},$$

wo wieder keine Constante hinzukommt, weil wie vorhin für $x = 0$ auch $f(x) = 0$ seyn muſs. Es ist also endlich, wenn man noch reducirt:

$$C_3 = \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Auf dieselbe Weise findet man für die Combinationen zu 4:

$$C_4 = \Sigma \frac{x(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

u. s. w., so, daſs man endlich allgemein für die Anzahl der Combinationen von x Elementen zu n, ohne Wiederholungen hat:

$$C_n = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x+1-n)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ n};$$

wie dieſs ohnehin bekannt ist.

2. Wir suchen ferner die Anzahl der Combinationen der x Elemente zu 2, 3, ... n, wenn zugleich die möglichen Permutationen berücksichtiget werden, d. i. die Variationen, und zwar zuerst ohne Wiederholungen.

Wird die Anzahl der Variationen der x Elemente zur zweiten Classe durch $f(x)$ bezeichnet, so ist die Anzahl der Variationen für dieselbe Classe, wenn noch ein Element hinzukommt oder $f(x+1)$, gleich der vorigen Zahl $f(x)$, noch um $2x$ vermehrt (weil das $x+1^{\text{ste}}$ Element mit den x vorhergehenden, x Verbindungen zu 2 eingeht, und jede davon zwei Permutationen zuläſst). Es ist nämlich

$$f(x+1) = f(x) + 2x, \text{ oder } f(x+1) - f(x) = 2x,$$
$$\text{d. i. } \Delta . f(x) = 2x, \text{ also } f(x) = 2\Sigma x = x(x-1),$$

wo wieder keine Constante beigefügt werden darf, oder vielmehr, wobei diese wieder verschwindet, weil für $x=0$ auch $f(x) = 0$ werden muſs.

Für die dritte Variationsclasse hat man eben so $f(x+1) = f(x) + 6x(x-1)$ (weil sich das $x+1^{\text{ste}}$ Element mit jeder der $x(x-1)$ Binionen der vorhergehenden x Elemente Einmal zu drei verbindet, und jede solche Verbindung sechs Permutationen gestattet). Es ist also

$$\Delta . f(x) = 6x(x-1), \text{ oder } f(x) = 6\Sigma x(x-1) = x(x-1)(x-2).$$

Auf diese Art findet man allgemein für die n^{te} Variationsclasse der x Elemente, ohne Wiederholungen:

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x+1-n),$$

wie ebenfalls bekannt.

3. Sucht man endlich noch die Anzahl der Variationen mit Wiederholungen (wonach z. B die zweite Classe für die Elemente a, b ist: aa, ab, ba, bb), so bezeichne $f(x)$ die Anzahl der Variationen von x Elementen in der

zweiten Classe; dadurch wird, wenn wieder x um 1 zunimmt, $f(x+1)=f(x)+2x+1$ (das $x+1^{ste}$ Element verbindet sich nämlich mit jedem der x Elemente Einmal zu 2, davon jede zwei Permutationen zuläſst, und dann auch Einmal mit sich selbst, welche Verbindung sich nicht weiter permutiren läſst); also ist $\Delta . f(x) = 2x + 1$ oder $f(x) = 2\Sigma x + \Sigma 1 = x(x-1) + x = x^2$ (§. 183., 3.) wieder ohne Constante.

Eben so hat man für die dritte Classe: $f(x+1) = f(x) + 3x^2 + 3x + 1$ (das $x + 1^{ste}$ Element verbindet sich mit jeder der schon vorhandenen x^2 Binionen der x Elemente Einmal zu 3, von welchen neuen Verbindungen jede drei Permutationen liefert — nicht sechs, weil, wenn unter den x^2 Binionen jene ab vorhanden ist, auch die ba vorkommt — wodurch also zuerst $3x^2$ neue Ternionen entstehen; ferner gibt es $3x$ solcher Ternionen, in welchen das $x + 1^{ste}$ Element zwei Mal und immer eines der vorhergehenden x Elemente steht; und endlich läſst sich aus diesem $x + 1^{sten}$ Elemente selbst eine Ternion bilden; also ist die Zunahme $= 3x^2 + 3x + 1$); daraus folgt:

$$f(x) = 3\Sigma x^2 + 3\Sigma x + \Sigma 1 = \frac{x(x-1)(2x-1)}{2} + \frac{3x(x-1)}{2} + x = x^3.$$

Allgemein findet man auf diese Art für die n^{te} Variationsclasse: x^n; was gleichfalls schon aus den Elementen bekannt ist.

§. 190.

Eine nicht unbedeutende Anwendung findet die Lehre von den endlichen Differenzen auch auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wir können indeſs auf diese Anwendung nicht weit eingehen; theils, weil wir sonst die Summirung der Functionen vollständiger, und namentlich die Integration der Gleichungen mit endlichen Differenzen, des ersten sowohl, wie auch der höhern Grade hätten durchführen müssen, theils und vorzüglich, weil es uns viel zu weit über

die vorgezeichneten Grenzen dieses Lehrbuches hinausführen würde. Es mag also genügen, diese Anwendung wenigstens in ein paar Beispielen zu zeigen.

Beispiel 1.

Wir wählen zuerst das schon im §. 174. (2.) behandelte Beispiel, und suchen sofort die Wahrscheinlichkeit, dafs man aus einer Urne, welche x vollkommen gleiche Kugeln enthält, auf einen zufälligen Griff davon entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl ziehen wird.

Bezeichnet man die Zahl der Fälle, in welchen man eine gerade Anzahl ergreifen kann, durch $f(x)$, und die Zahl aller Fälle, in welchen man eine ungerade Anzahl ziehen kann, durch $f'(x)$; so ist, wenn x um 1 wächst, die Summe oder die sämmtliche Anzahl der geraden Verbindungen, d. i. $f(x+1)$, offenbar gleich der vorigen Zahl $f(x)$, noch vermehrt um die Summe der ursprünglichen ungeraden Verbindungen $f'(x)$ (weil das neue oder $x+1^{ste}$ Element mit jeder der vorigen $f'(x)$ ungeraden Combinationen eine gerade Verbindung eingeht); es ist nämlich

$$1)\quad f(x+1)=f(x)+f'(x).$$

Auf dieselbe Art wird bei $x+1$ Elementen die Anzahl der ungeraden Combinationen aus der vorigen Anzahl ungerader, nämlich aus $f'(x)$, und dann noch aus der Anzahl der geraden Verbindungen $f(x)$, diese noch um 1 vermehrt, bestehen (weil das $x+1^{ste}$ Element mit jedem der $f(x)$ geraden Verbindungen eine ungerade Combination bildet, und zugleich noch durch dasselbe Element die Verbindungen zu 1 um Eins vermehrt werden); es ist nämlich;

$$2)\quad f'(x+1)=f'(x)+f(x)+1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen 1) und 2) folgt beziehungsweise $\Delta.f(x)=f'(x)$ und $\Delta.f'(x)=f(x)+1$ (dabei ist wieder $\Delta x=1$), oder

$$f(x)=\Sigma f'(x) \quad \text{und} \quad f'(x)=\Sigma[f(x)+1],$$

so, dafs also die Auflösung unserer Aufgabe von der Summirung oder Integrirung dieser beiden Ausdrücke abhängt.

Diese Summen lassen sich aber leichter durch folgende Betrachtungen erhalten: Mit Berücksichtigung der Gleichung 1) läfst sich jene 2) auch so darstellen:

$$f'(x+1) = f(x+1) + 1,$$

oder wenn man statt $x+1$ wieder x schreibt:

$$3)\quad f'(x) = f(x) + 1.$$

Wird dieser Werth von $f(x)+1$ in der Gleichung 2) substituirt, so erhält man

$$f'(x+1) = 2f'(x).$$

Um nun die Summe dieser Gleichung zu erhalten, nehmen wir beiderseits natürliche Logarithmen, so wird

$lf'(x+1) = l2 + lf'(x)$ oder $lf'(x+1) - lf'(x) = l2$, d. i. $\Delta . lf'(x) = l2$ (§. 178., 3., wo $\Delta x = 1$ ist), folglich auch:

$$lf'(x) = \Sigma l2 = l2 \Sigma 1 = xl2 + C$$

$$\text{oder}\quad lf'(x) = l2^x + C,$$

wo C die willkürliche Constante der Integration bezeichnet.

Ist nun e die Basis der natürlichen Logarithmen, so hat man aus dieser letzten Gleichung auch

$$f'(x) = e^{l2^x + C} = e^C . e^{l2^x} = Ae^{l2^x},$$

wo jetzt A die unbestimmte Constante vorstellet. Bemerkt man endlich, dafs $e^{l2^x} = 2^x$ ist, so hat man zuletzt für die gesuchte Function:

$$f'(x) = A2^x \text{ *)}.$$

Um endlich die Constante A zu bestimmen, erwäge man, dafs für $x=1$ auch die Anzahl der ungeraden Combinationen, d. i. $f'(x)=1$ wird; man hat also

*) Man erhält also, was wir im Vorbeigehen anmerken wollen, durch die Integration der Differenzengleichung des ersten Grades: $\varphi(x+1) - a\varphi(x) = 0$, die folgende: $\varphi(x) = Aa^x$, wobei A die willkürliche Constante und $\Delta x = 1$ ist. [Für $\varphi(x+\Delta x) - a\varphi(x) = 0$ ist $\varphi(x) = Aa^{\frac{x}{\Delta x}}$].

$$1 = 2A, \text{ und daraus } A = \tfrac{1}{2}.$$

Es ist daher schlüfslich: $f'(x) = 2^{x-1}$.

Aus der Gleichung 3) folgt $f(x) = f'(x) - 1$, also ist auch $f(x) = 2^{x-1} - 1$.

Da endlich die Anzahl aller gleich möglichen Fälle $= f(x) + f'(x) = 2^{x-1} + 2^{x-1} - 1 = 2^x - 1$ ist; so ist die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Anzahl Kugeln zu ziehen $= \frac{2^{x-1} - 1}{2^x - 1}$, und jene, eine ungerade Anzahl zu ziehen $= \frac{2^{x-1}}{2^x - 1}$; wie wir bereits auch oben im §. 174. gefunden haben.

Beispiel 2.

Zwei Spieler A und B kommen mit einander überein, dafs derjenige das Spiel oder den ganzen Einsatz gewinnen soll, welcher zuerst n Parthien gewinnt; nun fehlen dem A nur noch Eine, dem B aber noch x Parthien bis zu dieser Zahl n. Es ist die Frage, welche Wahrscheinlichkeit jeder der beiden Spieler für sich hat, das Spiel zu gewinnen?

Es seyen beziehungsweise a und b die einfachen Wahrscheinlichkeiten, welche A und B haben, um eine Parthie zu gewinnen; ferner bezeichne man die gesuchte Wahrscheinlichkeit, welche A unter den angeführten Umständen für sich hat, das Spiel zu gewinnen, mit $f(x)$.

Gewinnt nun A die nächste Parthie, so gewinnt er auch das Spiel selbst, und es geht sonach seine gesuchte Wahrscheinlichkeit in Gewifsheit über. Gewinnt dagegen B diese Parthie, so, dafs ihm nur mehr $x - 1$ Parthien zur bestimmten Zahl n fehlen; so geht die gesuchte W. des A in $f(x-1)$ über, und man hat nun offenbar, den im eilften Capitel entwickelten Principien gemäfs: $f(x) = a \cdot 1 + bf(x-1)$, oder auch, wenn man statt x, $x+1$ schreibt:

$$1)\quad f(x+1) - bf(x) = a,$$

und es hängt die Auflösung der gegebenen Aufgabe nur mehr von der Summirung oder Integration dieser Gleichung ab. Um diese ausführen zu können, setzen wir

$$2)\quad f(x) = \varphi(x)\,\Sigma\,\psi(x),$$

wo $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ noch vorläufig unbestimmte Functionen von x sind. Aus dieser Gleichung folgt auch

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \varphi(x+1)\,\Sigma\,\psi(x+1) \\ &= \varphi(x+1)[\psi(x) + \Sigma\,\psi(x)] \quad (\text{§. 187., Gl. 1)}). \end{aligned}$$

Setzt man diesen Werth von $f(x+1)$ und den vorigen von $f(x)$ aus 2) in die zu integrirende Gleichung 1), so erhält man:

$$\varphi(x+1)\,\psi(x) + [\varphi(x+1) - b\,\varphi(x)]\,\Sigma\,\psi(x) = a.$$

Da uns aber zur Bestimmung der beiden in die Rechnung eingeführten Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, aufser der durch die obige Gleichung 2) ausgedrückten Bedingung, noch eine zu Gebote steht; so setzen wir noch

$$3)\quad \varphi(x+1) - b\,\varphi(x) = 0.$$

Dadurch geht die vorige Gleichung in folgende über:

$$4)\quad \varphi(x+1)\,\psi(x) = a.$$

Nun folgt aus der Gleichung 3) (m. s. die Note des vorigen Beispiels) $\varphi(x) = A\,b^x$, folglich auch aus der Gleichung 4):

$$\psi(x) = \frac{a}{\varphi(x+1)} = \frac{a}{A\,b^{x+1}}.$$

Endlich hat man mit diesen Werthen aus der Gleichung 2):

$$f(x) = A\,b^x\,\Sigma\,\frac{a}{A\,b^{x+1}} = b^x\,a\,\Sigma\,b^{-(x+1)},$$

und da (§. 183., 6.) $\Sigma\,b^{-(x+1)} = \dfrac{b^{-x-1}}{b^{-\Delta x} - 1} + C$, oder wegen $\Delta x = 1$, $= \dfrac{b^{-x-1}}{b^{-1} - 1} = \dfrac{b^{-x}}{1-b} + C$ ist, auch:

$$f(x) = b^x\,a\left(C + \frac{b^{-x}}{1-b}\right) = C\,a\,b^x + \frac{a}{1-b}.$$

Um endlich noch die Constante C zu bestimmen, berücksichtige man, dafs für $x = 1 : f(x) = a$ seyn mufs (fehlt dem B nämlich zur bestimmten Anzahl n ebenfalls nur eine Parthie, so fällt die gesuchte Wahrscheinlichkeit des A, das

Spiel zu gewinnen, d. i. $f(x)$, mit seiner einfachen W. a, eine Parthie überhaupt zu gewinnen, zusammen); es ist also

$$a = Cab + \frac{a}{1-b}, \text{ und daraus } C = \frac{1}{b-1}.$$

Dieser Werth in der vorhergehenden Gleichung substituirt, gibt endlich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, daſs A unter den angeführten Umständen das Spiel gewinnen werde:

$$f(x) = \frac{ab^x - a}{b-1}.$$

Bezeichnet man eben so die Wahrscheinlichkeit, welche B hat, das Spiel zu gewinnen, durch $f'(x)$; so findet man durch ein ähnliches Raisonnement $f'(x) = bf'(x-1)$, oder auch $f'(x+1) - bf'(x) = 0$; diese Gleichung wieder summirt gibt (Note des vorigen Beisp.):

$$f'(x) = Ab^x;$$

um die Constante A zu bestimmen, hat man für $x = 1$: $f'(x) = b$ (wie leicht zu sehen), also $b = Ab$, oder $A = 1$. Es ist demnach die gesuchte Wahrscheinlichkeit, welche B unter den obigen Bedingungen hat, das Spiel zu gewinnen:

$$f'(x) = b^x.$$

Wäre $a + b = 1$, also $a = 1 - b$, so wäre auch

$$f(x) + f'(x) = \frac{ab^x - a}{b-1} + b^x = \frac{(1-b)(b^x - 1)}{b-1} + b^x$$
$$= -b^x + 1 + b^x = 1,$$

und man könnte also auch kürzer $f'(x)$ aus der Relation $f'(x) = 1 - f(x)$ bestimmen.

Für $a = b = \frac{1}{2}$ ist

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2^x} \quad \text{und} \quad f'(x) = \frac{1}{2^x}.$$

So ist in dem im §. 170., Beisp. 2. behandelten Falle $x = 2$, folglich nach diesen letzten Formeln die Wahrscheinlichkeit, daſs A gewinnt $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, und jene, daſs B das Spiel gewinnt $= \frac{1}{4}$; wie wir dieſs auch in der That am angeführten Orte gefunden haben.

Anmerk. Das hier aufgelöste Problem löst zugleich auch das folgende auf: die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dafs man aus einer Urne, welche weifse und schwarze Kugeln enthält, in x Versuchen oder Zügen wenigstens eine weifse Kugel ziehen wird, vorausgesetzt, dafs die gezogene Kugel jedes Mal wieder in die Urne gethan wird, und dafs die Wahrschein lichkeit, eine weifse Kugel zu ziehen $= a$, und jene eine schwarze zu ziehen $= b$ ist.

Denn obschon dieser Fall von dem hier behandelten verschieden zu seyn scheint, so zeigt doch eine einfache Betrachtung sogleich, dafs die hier gesuchte Wahrscheinlichkeit jener gleich ist, welche im vorigen Falle A hat, das Spiel zu gewinnen, wenn diesem noch ein günstiger Zug, seinem Gegner B dagegen noch x günstige Züge fehlen. Es ist also diese gesuchte Wahrscheinlichkeit (da hier $a + b = 1$ ist) $= 1 - b^x$; wie wir auch in der That dasselbe Resultat am betreffenden Orte (§§. 165. u. 166) gefunden haben *).

*) Mehreres über die Anwendung der endlichen Differenzen auf diesen, so wie noch auf einige Gegenstände der Geometrie, findet man vorzüglich in dem oben angeführten Werke des *Brunacci* (im ersten Bande).

Berichtigungen.

		statt:	soll es heifsen:
Seite 12,	letzte Zeile,	x^n	x^4
» 63,	22. »	können	kann
» 134,	13. »	Glieder	Wurzeln
» 151,	14. »	$+$	$-$
» —	17. »	$-1{\cdot}4$ und -2	$-{\cdot}7$ und $-1{\cdot}4$
» 185,	7. u. 10. »	F_1 und F'_1	o

» — 15. bis 17. » mufs es statt: »dafs zufolge etc. Null ist«, heifsen: dafs in beiden Gleichungen die erste Zeile beziehungsweise $= F_1$ und F'_1 ist.

» — in den folgenden sechs Gleichungen soll vor F_1, F'_1, F_2, . . . F'_3 das Zeichen — stehen.

		statt:	soll es heifsen:
» 193,	20. Zeile,	Δ^m und a_n	$\Delta^m a_n$
» 250,	vorletzte »	$a^4 x_3$	$a_4 x^3$
» 255,	8. Z. v. U.	Nennt	Nimmt
» 260,	7. detto	zu erzeugende	erzeugende
» 299,	4. detto	$-2 \log. 2$	$-2 \log. x$

» 331, 5. Zeile, ist das letzte Glied $\pm \frac{x^n}{2 \,.\, 3 \ldots n}$ auszulassen.

» 401, 6. » soll im vorkommenden Bruche der Nenner statt 2^5, 5^5 heifsen.

» 406, 6. Z. v. U., soll statt $\ldots = s$ stehen: $\ldots = n$.

» 439, 10. Z., statt $\frac{1}{3x}$ soll es heifsen: $\frac{1}{3x^3}$

» 440, 3. Z. v. U. ist der Accent auf p in $p + p'k + \ldots$ undeutlich.

» 441, 7. Z. gilt dasselbe bei $p = f'(x)$

» — 15. » » » » $r = \frac{f'''(x)}{2 \,.\, 3}$

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Burg, Adam von

Ausführliches Lehrbuch der höhern Mathematik mit besonderer Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens

Bd.: 1

Wien 1832

Math.p. 61 m-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081556-7